UNIVERSITÄT GHS ESSEN, FB PHYSIK

Vorlesung: Konforme Feldtheorie

Priv.-Doz. Dr. K. J. Wiese

Vorlesung:
Dienstag,
10-12 Uhr
Übung:
Donnerstag,
15-16 Uhr

Version: 29. August 2001

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] AA. Belavin, AM. Polyakov and AB. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **B241** (1984) 333–80.

[2] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, New York, 1997.

[3] J. Cardy, *Conformal invariance*. volume *11* of *Phase Transitions and Critical Phenomena*, pages 55–126, Academic Press London, 1987.

[4] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, in E. Brézin and J. Zinn-Justin, editors, *Fields, strings and critical phenomena*, volume *XLIX* of *Les Houches, école d'été de physique théorique 1988*, North Holland, Amsterdam, 1988.

[5] J. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics*, in E. Brézin and J. Zinn-Justin, editors, *Fields, strings and critical phenomena*, volume *XLIX* of *Les Houches, école d'été de physique théorique 1988*, North Holland, Amsterdam, 1988.

[6] Vl. S. Dotsenko, Série de cours sur la théorie conforme, Lecture notes, Universités Paris VI and VII.

[7] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, volume *2*, Cambridge University Press, 1989.

[8] Vl. S. Dotsenko, *Lectures on conformal field theory*, Advanced Studies in Pure Mathematics **16** (1988) 123–170.

1 Einleitung

2 Konforme Transformationen

2.1 Beliebige Dimension

Metrik

$$g_{\mu\nu} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle \tag{1}$$

Definition: Eine Abbildung $x \longrightarrow x' = f(x)$ heißt konform, wenn die Metrik sich transformiert wie

$$g_{\mu\nu}(x) \;\longrightarrow\; g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \ . \tag{2}$$

Infinitesimal: Sei $x \longrightarrow x' = x - \varepsilon$ und $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, dann ist

$$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} \ . \tag{3}$$

Damit wird Eq. (2) zu

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \left(\partial \varepsilon\right) \delta_{\mu\nu} \ . \tag{4}$$

Konforme Transformationen werden für $d > 2$ generiert durch

- Translationen
- Rotationen

- Dilatationen
- Spezielle konforme Transformationen

$$\varepsilon^\mu = 2x^\mu(bx) - x^2 b^\mu \tag{5}$$

2.2 $d = 2$

Eq. (4) liefert die Cauchy-Riemannschen Differential-Gleichungen

$$\partial_1\varepsilon_1 = \partial_2\varepsilon_2\ , \qquad \partial_1\varepsilon_2 + \partial_2\varepsilon_1 = 0\ . \tag{6}$$

Das heißt, daß $\varepsilon := \varepsilon^1 + i\varepsilon^2$ nur von z abhängt: $\varepsilon = \varepsilon(z)$.
Transformationen in konforme Koordinaten:
Maß:

$$\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} \tag{7}$$

Metrik

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}\ , \qquad g^{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{ij}\ , \tag{8}$$

wobei lateinische Indizes $i = 1, 2$ über z und $\bar{z}$ laufen.
Generatoren konformer Abbildungen in d=2:

$$\ell_n := -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\ , \qquad \bar{\ell}_n := -\bar{z}^{n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ . \tag{9}$$

Algebra

$$\begin{aligned} [\ell_m, \ell_n] &= (m-n)\ell_{m+n} \\ \left[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n\right] &= (m-n)\bar{\ell}_{m+n} \\ \left[\bar{\ell}_m, \ell_n\right] &= 0\ . \end{aligned} \tag{10}$$

2.3 Globale versus lokale konforme Transformationen

Achtung: ℓ_n nicht global definiert. Global sind ℓ_{-1}, ℓ_0 und ℓ_1.

- ℓ_{-1} und $\bar{\ell}_{-1}$ = Generatoren von Verschiebungen
- $\ell_0 + \bar{\ell}_0$ = Dilatation
- $i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$ = Rotation
- ℓ_1 und $\bar{\ell}_1$ sind Generatoren spezieller konformer Transformtionen. Integriert ergibt sich:

$$z \longrightarrow z' = \frac{az+b}{cz+d}\ , \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \tag{11}$$

2.4 Konform invariante Theorien und Felder

Definition: Eine Theorie mit Feldern $\{A_i\}$ (i =Index), die zu jedem A_i auch dessen Ableitungen enthält, heißt konform invariant, wenn es eine Menge von quasi-primären Feldern $\{\Phi_j\} \subset \{A_i\}$ gibt, die sich unter *globalen* konformen Transformationen $x \longrightarrow x'$ transformieren wie

(i)

$$\Phi_j(x) \longrightarrow \Phi'_j(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{\frac{\Delta_j}{d}} \Phi_j(x') \tag{12}$$

(ii) Die anderen $\{A_i\}$ lassen sich als Linear-Kombination quasi-primärer Felder und ihrer Ableitungen schreiben.

(iii) Es ein unter der konformen Gruppe invariantes Vakuum gibt.

Konsequenzen:
Cross-Ratios: Sei $r_{12} := x_1 - x_2$. Dann sind invariant unter speziellen konformen Transformationen $\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}$.
2-Punkt Funktion:

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} & , \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & , \text{sonst} . \end{cases} \tag{13}$$

3-Punkt Funktion[1]:

$$\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_1-x_3|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}|x_2-x_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}} . \tag{14}$$

3 Konforme Feldtheorie in $d = 2$

3.1 Definitionen

In Analogie zu Kapitel 2.4 definieren wir: Ein Feld Φ heißt primär, wenn unter einer konformen Transformation $z \longrightarrow z' = f(z)$ (Notation in Ginsparg [4] und Dotsenko [6])

$$\Phi(z,\bar z) \longrightarrow \Phi'(z,\bar z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}\right)^{\bar h} \Phi(f(z),\bar f(\bar z)) . \tag{15}$$

Das kann auch geschrieben werden als (Notation in Di Francesco et al. [2])

$$\Phi'(z',\bar z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar z'}{\partial \bar z}\right)^{-\bar h} \Phi(z,\bar z) . \tag{16}$$

Das heißt insbesondere, daß

$$\langle \Phi'_1(z'_1,\bar z'_1)\dots\Phi'_N(z'_N,\bar z'_N)\rangle = \left(\frac{\partial z'_1}{\partial z_1}\right)^{-h_1} \left(\frac{\partial \bar z'_1}{\partial \bar z_1}\right)^{-\bar h_1} \dots \left(\frac{\partial z'_N}{\partial z_N}\right)^{-h_N} \left(\frac{\partial \bar z'_N}{\partial \bar z_N}\right)^{-\bar h_N} \times \langle \Phi_1(z_1,\bar z_1)\dots\Phi_N(z_N,\bar z_N)\rangle . \tag{17}$$

[1]Achtung: Beweis in [4] and [2] falsch.

Unter einer infinitesimalen Transformation $z \longrightarrow z' = f(z) = z + \varepsilon(z)$ ändert sich $\Phi(z,\bar{z})$ um

$$\begin{aligned}\delta_{\varepsilon,\bar{\varepsilon}}\Phi(z,\bar{z}) &:= \Phi'(z,\bar{z}) - \Phi(z,\bar{z}) \\ &= \left(\frac{\partial(z+\varepsilon(z))}{\partial z}\right)^{h}\left(\frac{\partial(\bar{z}+\bar{\varepsilon}(\bar{z}))}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}}\Phi(z+\varepsilon(z),\bar{z}+\bar{\varepsilon}(\bar{z})) - \Phi(z,\bar{z}) \\ &= \left[h\partial\varepsilon(z) + \varepsilon(z)\partial_z + \bar{h}\bar{\partial}\bar{\varepsilon}(\bar{z}) + \bar{\varepsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}}\right]\Phi(z,\bar{z})\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Konsequenzen (in Analogie zu Kapitel 2.4):
2-Punkt Funktion:

$$\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \begin{cases} \dfrac{C_{12}}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2}} & ,\ h_1 = h_2 \text{ und } \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \\ 0 & ,\ \text{sonst} \end{cases}\,. \tag{19}$$

3-Punkt Funktion:

$$\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\Phi_3(z_3,\bar{z}_3)\rangle = \frac{C_{123}}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2-h_3}(z_2-z_3)^{h_2+h_3-h_1}(z_1-z_3)^{h_1+h_3-h_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}(\bar{z}_2-\bar{z}_3)^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}(\bar{z}_1-\bar{z}_3)^{\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_2}}\,. \tag{20}$$

3.2 Der Energie-Implus-Tensor

Definition:

$$T^{\mu\nu}(x) := -\frac{2}{\sqrt{g(x)}}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\,. \tag{21}$$

Equivalent zu

$$T_{\mu\nu}(x) := \frac{2}{\sqrt{g(x)}}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta g^{\mu\nu}(x)}\,. \tag{22}$$

Erhaltungssatz

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0\,. \tag{23}$$

Satz

$$T^{\mu}_{\mu} = 0 \implies \mathcal{H} \text{ ist konform invariant.}\,. \tag{24}$$

Beweis: (Man benutzt zuerst Eq. (4) und dann $T^{\mu}_{\mu} = 0$.)

$$\delta_\varepsilon\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, T^{\mu\nu}(x)\left[\partial_\mu\varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu\varepsilon_\mu(x)\right] = \frac{1}{d}\int \mathrm{d}^d x\, T^{\mu}_{\mu}(x)(\partial\varepsilon(x)) = 0\,. \tag{25}$$

3.3 Der Energie-Impuls-Tensor in $d = 2$

$$T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} - 2iT_{xy})\,, \qquad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} + 2iT_{xy}) \tag{26}$$

$$T^{\mu}_{\mu} = 0 \iff T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0\,. \tag{27}$$

3.4 Konforme Ward-Identität

Die Kontour C läuft im Gegenuhrzeigersinn um alle Punkte z_i herum:

$$\left\langle \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}z\, T(z)\varepsilon(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\bar{z}\, \bar{T}(\bar{z})\bar{\varepsilon}(\bar{z}) \right) \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_N(z_N) \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(h_i \partial\varepsilon(z_i) + \varepsilon(z_i)\partial_{z_i} + \bar{h}_i \bar{\partial}\bar{\varepsilon}(\bar{z}_i) + \bar{\varepsilon}(\bar{z}_i)\partial_{\bar{z}_i} \right) \langle \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_N(z_N) \rangle \ . \tag{28}$$

Unintegrierte Version (holomorpher Anteil)

$$\boxed{\langle T(z)\Phi_1(z_1) \ldots \Phi_N(z_N) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{\partial_{z_i}}{(z-z_i)} \right] \langle \Phi_1(z_1) \ldots \Phi_N(z_N) \rangle + \text{reg.}} \ . \tag{29}$$

reg. meint in $(z - z_i)$ reguläre Terme.

3.5 Beispiel: Bosonen

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}^2 x\, (\nabla\Phi)^2 = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\, \partial\Phi\bar{\partial}\bar{\Phi} \ . \tag{30}$$

Ergibt

$$\langle \Phi(x)\Phi(0) \rangle = -\frac{1}{2} \ln|x| = -\frac{1}{4}(\ln z + \ln\bar{z}) \ . \tag{31}$$

Setze $\Phi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}))$ ergibt

$$\langle \varphi(z)\varphi(w) \rangle = -\ln(z - w) \tag{32}$$

$$\langle \bar{\varphi}(\bar{z})\bar{\varphi}(\bar{w}) \rangle = -\ln(\bar{z} - \bar{w}) \ . \tag{33}$$

Energie-Impuls-Tensor

$$T(z) = -\frac{1}{2} :\partial\varphi\partial\varphi: \ . \tag{34}$$

Primäres Feld mit $h = \alpha^2/2$, $\bar{h} = 0$:

$$V_\alpha(z) := \mathrm{e}^{i\alpha\varphi(z)} \ . \tag{35}$$

3.6 Konforme Ladung

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \text{reg} \ . \tag{36}$$

Für Bosonen (30) ist $c = 1$.

3.7 Transformation von T und Energie eines endlich großen Systems

Infinitesimale konforme Transformation

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon T(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}z\, T(z)\varepsilon(z)T(w) \\ &= \frac{c}{12}\varepsilon'''(w) + 2\varepsilon'(w)T(w) + T'(w) \ . \end{aligned} \tag{37}$$

Bemerkung: $T(z)$ ist nicht primär aber quasi-primär (spezielle konforme Transformationen sind $O(z^2)$).
Endliche Transformation:

$$T'(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 T(w) + \frac{c}{12}\{w,z\} \ , \tag{38}$$

wobei die Schwarzsche Ableitung definiert ist als

$$\{w,z\} = \frac{\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}z^3}}{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}}{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}}\right) \ . \tag{39}$$

Zusammensetzung zweier Abbildungen mithilfe von

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 \{u,w\} + \{w,z\} = \{u,z\} \ . \tag{40}$$

Zylinder-Geometrie ($z \in$ Zylinder und $w \in$ Ebene):

$$z = \frac{L}{2\pi}\ln w \iff w = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{L}z} \tag{41}$$

ergibt

$$T_{\text{Zylinder}}(z) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left[w^2 T_{\text{Platte}}(w) - \frac{c}{24}\right] \ . \tag{42}$$

Wenn man die Nullpunkts-Energie $T_{\text{Platte}}(w) = 0$ setzt, so ergibt sich die Casimir-Energie des Zylinders zu

$$\langle T_{\text{Zylinder}}\rangle = -\frac{\pi^2 c}{6L^2} \ . \tag{43}$$

3.8 Moden-Entwicklung und Virasoro-Algebra

Definition

$$T(z)\Phi(w) := \sum_{n=-\infty^\infty} \frac{1}{(z-w)^{n+2}} L_n(w)\Phi(w) \ . \tag{44}$$

Äquivalent ist

$$L_n(w)\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_w} \mathrm{d}z\,(z-w)^{n+1}\,T(z)\Phi(w) \ . \tag{45}$$

Virasoro-Algebra

$$\boxed{[L_n, L_m] = \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n,-m} + (n-m)L_{n+m}} \ . \tag{46}$$

Bemerkung: Dieses ist die Quanten-Verallgemeinerung von (10). Keine Anomalie für spezielle konforme Abbildungen!
Φ primär:

$$\begin{aligned} L_n\Phi_\Delta &= 0 && \forall n > 0 \\ L_0\Phi_\Delta &= \Delta\Phi_\Delta && \text{(Dilatations-Operator)} \\ L_{-1}\Phi_\Delta &= \partial\Phi && \text{(Translations-Operator)} \\ L_{-n}\Phi_\Delta &= \Phi_\Delta^{(-n)} && \text{(Descendent)} \end{aligned} \ . \tag{47}$$

Transformation von Descendenten

$$\delta_\varepsilon \Phi_\Delta^{(-1)}(w) = \Delta\varepsilon''(w)\Phi_\Delta(w) + (\Delta+1)\varepsilon'(w)\Phi_\Delta^{(-1)}(w) + \varepsilon(w)\partial\Phi_\Delta^{-1}(w) \ . \tag{48}$$

4 Minimale Modelle

Wir möchten Feldtheorien, die konform invariant sind, explizit lösen. "Lösen" heißt, man möchte alle Korrelationsfunktionen explizit angeben können. Dieses ist für Minimale Modelle möglich. Von deren vielfältigen Eigenschaften werden wir kennenlernen:

1. Konforme Ladung $c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'}$, wobei p und p' keinen gemeinsamen Teiler (außer 1) haben.
2. Es gibt $p \times p'$ primäre Operatoren.
3. Die OPE schließt mit diesen Operatoren.
4. Die 3-Punkt-Funktion verschwindet nur für endlich viele Operatoren nicht. Diese bilden die "building blocks" der Theorie. Equivalent zu 3.
5. Wenn zusätzlich $p' = p + 1$, ist die Theorie unitär, d.h. der zugehörige Hamiltonian hermitesch, bzw. die Transfermatrix selbstadjungiert. Es gibt keine anderen Modelle mit $c < 1$, die unitär sind.
6. Die Darstellung der Virasoro-Algebra auf den Verma-Modulen ist entartet.
7. Die 4-Punkt Funktion verschwindet nicht.
8. Die Korrelations-Funktionen lassen sich durch die Coulomb-Gas-Darstellung erhalten (bosonische Theorie plus Vertex-Operator bei ∞)
9. Korrelations-Funktionen erfüllen zusätzliche Differential-Gleichungen.
10. Die in der Statistischen Physik bekannten 2-dimensionalen Systeme (ohne Unordnung) gehören zu der unter Punkt 5 genannten Klasse, z.B. hat das Ising-Modell $p = 2$.

4.1 Heighest weight Darstellungen

$$
\begin{aligned}
J_0 &= J_z && (49)\\
J_\pm &= J_x \pm iJ_y && (50)\\
[J_0, J_\pm] &= \pm J_\pm && (51)\\
[J_+, J_-] &= 2J_0 && (52)\\
J^2 &:= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_0^2 + \tfrac{1}{2}\{J_+, J_-\} && (53)\\
\left[J_\pm, J^2\right] &= 0\,. && (54)
\end{aligned}
$$

Darstellungen

$$
\begin{aligned}
J_0 |j\rangle &= j\,|j\rangle && (55)\\
J_+ |j\rangle &= 0\,. && (56)
\end{aligned}
$$

Zusände:

$$|m\rangle := (J_-)^{j-m}\,|j\rangle \tag{57}$$

impliziert

$$J_0\,|m\rangle = m\,|m\rangle\ . \tag{58}$$

Skalar-Produkt

$$\langle m-1|m-1\rangle = [j(j+1)-m(m+1)]\,\langle m|m\rangle \ . \tag{59}$$

Hat negative Norm, falls $m > j$. Unitarität nur möglich, wenn $2j$ integer: Dann ist für $m = -j$ die Norm 0, und alle weiteren Descendenten auch. Man kann formal die Nullzustände aus dem Darstellungsraum, gegeben durch ein j, ausdividieren.

4.2 Verma-Modul und Descendenten

Sei Φ_h primärer Operator, dann bilden die Descendenten

$$\left\{\Phi_h^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)} := L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}\Phi_h\right\},\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k \tag{60}$$

eine Darstellung der Virasoro-Algebra, auch Verma-Modul $V(c,h)$ genannt. Nur L_0 ist diagonal

$$L_0\Phi_h^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)} = \left(h + \sum_{i=1}^{k} n_i\right)\Phi_h^{(-n_1,-n_2,\ldots,-n_k)} \ . \tag{61}$$

Skalar-Produkt:
Durch

$$\boxed{L_n^+ := L_{-n}} \tag{62}$$

ist wegen $L_n\Phi_h = 0\ \forall n > 0$ ein Skalar-Produkt definiert.

4.3 Null-Zustände

Sei $|\chi\rangle$ kein primärer Operator aber $L_n\,|\chi\rangle = 0\ \forall n > 0$. Dann nennt man $|\chi\rangle$ singulären Vektor, Nullvektor oder Null-Zustand. Er ist orthogonal zum kompletten Verma-Modul und entkoppelt. Gleiches gilt für die Descendenten von $|\chi\rangle$. Dieses liefert irreduzible Darstellungen (building blocks)

$$M(c,h) := V(c,h)/\{\text{Null-Zustände}\} \ . \tag{63}$$

4.4 Beispiel: Level 2

Ansatz: $\chi(z) := [L_{-2} + aL_{-1}]\,\Phi_h(z)$. Fordere, daß $L_1\chi(z) = L_2\chi(z) = 0$. Impliziert

$$\chi(z) = \left[L_{-2} - \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}\right]\Phi_h(z) \ . \tag{64}$$

Auflösen nach h ergibt zwei Lösungen

$$h_{1/2} = \frac{1}{16}\left[5 - c \pm \sqrt{(25-c)(1-c)}\right] \ . \tag{65}$$

4.5 Differential-Gleichung für Korrelations-Funktion

Sei h Lösung von Gleichung (65). Dann gilt

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{(z-z_i)^2}+\frac{\partial_{z_i}}{z-z_i}-\frac{3}{2(2h+1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\langle\Phi_h(z)\Phi_{h_1}(z_1)\dots\Phi_{h_n}(z_n)\rangle=0\;. \tag{66}$$

<u>Beispiel: 3-Punkt-Funktion</u>

Wir hatten in Gleichung (20) die explizite Form der 3-Punkt-Funktion hergeleitet. Gleichung (66) ergibt die zusätzliche Bedingung

$$h_2=h_1+\frac{1}{6}+\frac{h}{3}\pm\frac{2}{3}\sqrt{h^2-\frac{h}{2}+\frac{1}{16}+3hh_1+\frac{3}{2}h_1}\;. \tag{67}$$

4.6 Kac-Formel

Definiere

$$M^N_{\{n_i\}\{m_i\}}:=\langle\Phi_h|\,L_{n_k}\dots L_{n_1}L_{-m_1}\dots L_{-m_l}\,|\Phi_h\rangle\;. \tag{68}$$

Nullvektoren dieser Matrix sind Eigenwerte Null der <u>Kac-Determinante</u>

$$\det(M^N)=\alpha_l\prod_{\substack{r,s\geq 1\\ rs\leq N}}[h-h_{r,s}(c)]^{p(N-rs)}\;. \tag{69}$$

Dabei bedeutet: $p(l)=$ Anzahl der Partitionen von l, und α_l ist eine berechenbare aber uninterssante Zahl. Die Eigenwerte sind

$$\boxed{\begin{array}{c} h_{r,s}(c)=\frac{1}{4}\left[(r\alpha_++s\alpha_-)^2-(\alpha_++\alpha_-)^2\right]\\ \alpha_+=\frac{\sqrt{1-c}+\sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}\;,\;\alpha_-=\frac{\sqrt{1-c}-\sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}\\ \text{oder:}\qquad \alpha_\pm=\alpha_0\pm\sqrt{\alpha_0^2+1}\;,\;\alpha_0^2=\frac{1-c}{24}\\ \alpha_+\alpha_-=-1\;,\;(\alpha_++\alpha_-)^2=4\alpha_0^2 \end{array}}\;. \tag{70}$$

4.7 OPE primärer Operatoren

$$\begin{aligned}\Phi_1(z)\times\Phi_2(0)=\sum_p\frac{D^p_{12}}{z^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}}\Big[\Phi_p(0)&+z\beta_p^{(-1)}\Phi_p^{(-1)}\\ &+z^2\left(\beta_p^{(-1,-1)}\Phi_p^{(-1,-1)}(0)+\beta_p^{(-2)}\Phi_p^{(-2)}(0)\right)\\ &+\dots\Big]\;.\end{aligned} \tag{71}$$

Die Koeffizienten $\beta_p^{(\dots)}$ sind durch die konforme Invarianz eindeutig festgelegt, s. [6].

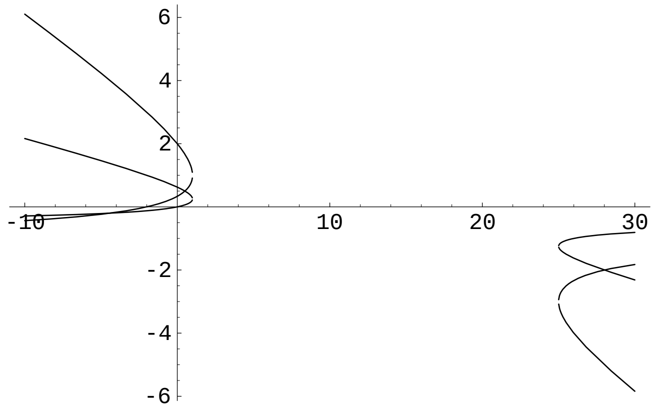

Abbildung 1: Kurven für $h(c)$ zum Niveau $\ell = 2, 3$, direkte Berechnung mit Mathematica.

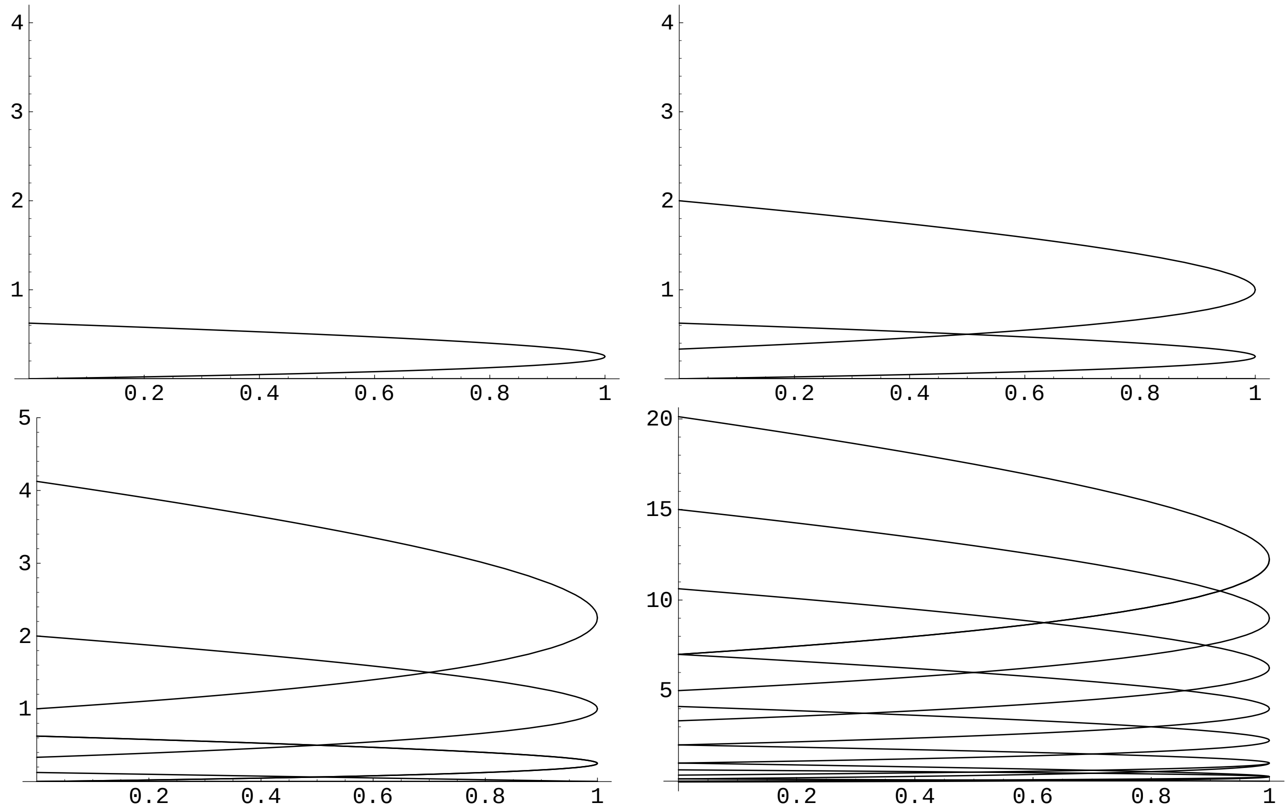

Abbildung 2: Kurven für $h(c)$ zum Niveau $\ell = 2, 3, 4$, direkte Berechnung mit Mathematica. Letzte Graphik aus Kac-Formel.

Explizite Ausnutzung von (67) ergibt für h's aus der Kac-Foremel (h in (67) ist $h_{1,2}$ oder $h_{2,1}$ aus der Kac-Formel)

$$\Phi_{(1,2)} \times \Phi_{(p,q)} = \left\{ \Phi_{(p,q-1)}, \Phi_{(p,q+1)} \right\} \ . \tag{72}$$

Hierbei steht $\Phi_{(p,q)}$ als Abkürzung für $\Phi_{h_{p,q}}$. Nächstes Level

$$\Phi_{(1,3)} \times \Phi_{(p,q)} = \left\{ \Phi_{(p,q-2)}, \Phi_{(p,q)}, \Phi_{(p,q+2)} \right\} \ . \tag{73}$$

Im allgemeinen verhält sich jeder Index wie eine su(2)-Algebra

$$\Phi_{(n',n)} \times \Phi_{(k',k)} = \left\{ \Phi_{(n'+k'-1,n+k-1)}, \Phi_{(|n'-k'|+1,n+k-1)}, \Phi_{(n'+k'-1,|n-k|+1)}, \Phi_{(|n'-k'|+1,|n-k|+1)} \right\} \ . \tag{74}$$

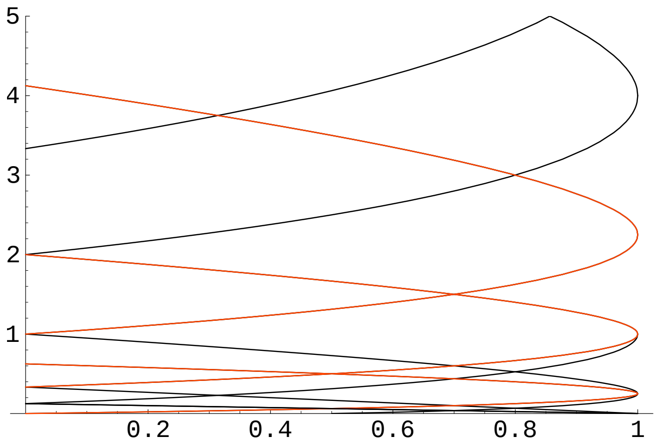

Abbildung 3: Kurven für $h(c)$ aus der Kac-Formel. Man sieht wie in höheren Ordnungen zusätzliche Kurven auftauchen (in Schwarz).

4.8 Neue Parametrisierung

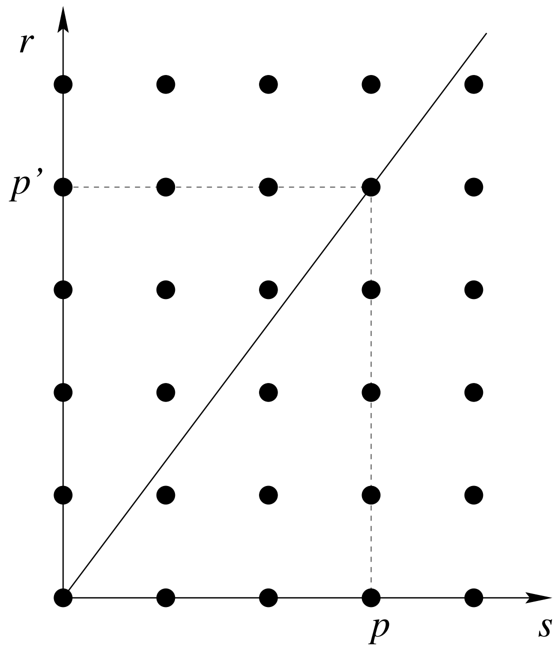

Abbildung 4: Kac-Tabelle. Die Dimensionen ergeben sich aus dem Abstand zur Geraden mit Steigung p'/p. Operatoren innerhalb des eingezeichneten Rechtecks bilden eine abgeschlossene Algebra.

$$\boxed{\begin{array}{c} c = 1 - \dfrac{6(p-p')^2}{pp'}\,, \quad 0 < p < p' \text{ (Konvention)} \\ \alpha_+ = \sqrt{\dfrac{p'}{p}}\,, \quad \alpha_- = -\sqrt{\dfrac{p}{p'}} \\ h_{r,s} = \dfrac{1}{4pp'}\left[(rp - sp')^2 - (p-p')^2\right] \end{array}}\,. \tag{75}$$

Einige Identitäten

$$h_{r+p',s+p} = h_{p'-r,p-s} = h_{r,s} \; . \tag{76}$$

Es gilt (s. Figure 4)

$$h_{r,s} = \delta^2 \left(\frac{p'}{p} + \frac{p}{p'} \right) - \frac{(p-p')^2}{4pp'} \; , \tag{77}$$

wobei δ der Abstand zur Kurve ist.

Daraus folgt: Sind p', p ganze Zahlen, dann ist das Spektrum diskret. Sonst kontinuierlich. Die bekannten Modelle der statistischen Mechanik sollten also auf ganze Zahlen für p' und p führen.

4.9 Beispiel: $p' = 4,\ p = 3$ (Ising-Modell)

Zur Illustration s. Figure 4.

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= 0 \\ h_{1,2} = h_{3,1} &= \frac{1}{2} \\ h_{2,1} = h_{2,2} &= \frac{1}{16} \; . \end{aligned} \tag{78}$$

Operatoren

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &:= \Phi_{(1,1)} \\ \varepsilon &:= \Phi_{(1,2)} \\ \sigma &:= \Phi_{(2,1)} \; . \end{aligned} \tag{79}$$

Abgeschlossene Algebra

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \times \varepsilon &\to \varepsilon \\ \mathbb{1} \times \sigma &\to \sigma \\ \sigma \times \sigma &\to \mathbb{1} + \varepsilon \\ \varepsilon \times \varepsilon &\to \mathbb{1} \\ \varepsilon \times \sigma &\to \sigma \; . \end{aligned} \tag{80}$$

Holomorpher und antiholomorpher Anteil zusammen

$$\langle \sigma(z,\bar{z}) \sigma(0,0) \rangle \sim |z|^{-2\times 2\times \frac{1}{16}} = |z|^{-\frac{1}{4}} \tag{81}$$

$$\langle \sigma(z,\bar{z}) \sigma(0,0) \rangle \sim |z|^{-2\times 2\times \frac{1}{2}} = |z|^{-2} \; . \tag{82}$$

$\sigma =$ Spin im Ising-Modell, $\varepsilon =$ Energie.

4.10 Minimale Modelle

Theorem:
Sei $c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'}$, $p' > p$ koprim. Dann ist die Algebra der Operatoren $\Phi_{r,s}$ mit $1 \leq r < p'$ und $1 \leq s < p$ abgeschlossen.

4.11 Unitarität

Satz:
Theorien mit $c \geq 1$ und $h > 0$ sind unitär.

Satz:
Die minimalen Modelle $M(p+1,p)$ sind unitär.

5 Coulomb-Gas-Methoden

5.1 Wiederholung: Theorie mit $c = 1$

Freie Bosonen:

$$T(z) = -\frac{1}{2} :(\partial\phi(z))^2: \ . \tag{83}$$

Vertex-Operatoren (Achtung: neue Normierung)

$$U_\alpha(z) = \mathrm{e}^{i\alpha\sqrt{2}\phi(z)} \ . \tag{84}$$

Korrelationsfunktionen ($\sum_i \alpha_i = 0$)

$$\langle U_{\alpha_1}(z_1) U_{\alpha_2}(z_2) \dots U_{\alpha_n}(z_n)\rangle = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i\alpha_j} \ . \tag{85}$$

5.2 Deformation der Theorie zu $c \neq 1$

Definiere

$$T(z) := -\frac{1}{2} :(\partial\phi(z))^2: + i\sqrt{2}\partial_z^2\phi(z) \ . \tag{86}$$

Ändert die Randbedingung für ϕ.

$$\frac{c/2}{z^4} = \langle T(z)T(0)\rangle = \frac{1/2}{z^4}\left(1 - 24\alpha_0^2\right) \ . \tag{87}$$

Ergibt

$$\boxed{c = 1 - 24\alpha_0^2} \ . \tag{88}$$

Aus der OPE folgt für den Vertex-Operator $U_\alpha(z)$:

$$\boxed{h_\alpha = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0} \ . \tag{89}$$

Gleiche Dimension:

$$h_\alpha = h_{\alpha'} \quad \text{g.d.w.} \quad \alpha + \alpha' = 2\alpha_0 \ . \tag{90}$$

Definition: Sei $\alpha + \alpha' = 2\alpha_0$. Dann setze

$$\langle U_\alpha(z) U_{\alpha'}(w)\rangle_{\alpha_0} := \lim_{R\to\infty} R^{8\alpha_0^2} \langle U_\alpha(z) U_{\alpha'}(w) U_{-2\alpha_0}(R)\rangle_0 = (z-w)^{2\alpha\alpha'} \ . \tag{91}$$

Der letzte Operator ist für die Ladungsneutralität notwendig. Analog erhält man Korrelationsfunktionen für mehr Vertices ($\sum_i \alpha_i = 2\alpha_0$)

$$\langle U_{\alpha_1}(z_1) U_{\alpha_2}(z_2) \dots U_{\alpha_n}(z_n)\rangle_{\alpha_0} = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2\alpha_i\alpha_j} \ . \tag{92}$$

5.3 Zweite Modifikation der Theorie, nichttriviale Erwartungswerte

Frage: Was kann man noch zu $\mathcal{H}$ dazuaddieren, ohne daß die Theorie die konforme Invarianz verliert?
Antwort:

$$\delta\mathcal{H} = -\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\,[\mu_- U_- + \mu_+ U_+] \ . \tag{93}$$

Dabei müssen U_- und U_+ Dimension 1 haben (+1 für den antiholomorphen Anteil).

$$U_\pm = U_{\alpha_\pm} \ , \quad h_{\alpha_\pm} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1} \ . \tag{94}$$

Keine Änderung von T und damit von c, da $\int U_\pm$ reiner Potential-Term.

Wir erhalten damit Korrelations-Funktionen

$$\begin{aligned}\langle U_{\alpha_1}(x_1)\ldots U_{\alpha_n}(x_n)\rangle &= \left\langle U_{\alpha_1}(x_1)\ldots U_{\alpha_n}(x_n)\, \mathrm{e}^{\int \mu_- U_- + \mu_+ U_+}\right\rangle_{\alpha_0} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle U_{\alpha_1}(x_1)\ldots U_{\alpha_n}(x_n)\ \left[\int \mu_- U_-\right]^l \left[\int \mu_+ U_+\right]^k \right\rangle_{\alpha_0} \ .\end{aligned} \tag{95}$$

Verschwindet genau dann nicht, wenn ($l, k \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + l\alpha_- + k\alpha_+ = 2\alpha_0 \ . \tag{96}$$

Forderung: 4-Punkt Funktion soll nicht verschwinden für $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$. Setze $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_4 = 2\alpha_0 - \alpha$. Gleichung (96) liefert

$$\alpha = -\frac{1}{2}(l\alpha_- + k\alpha_+) = \alpha_0 - \frac{1}{2}(s\alpha_- + r\alpha_+) = \alpha_-\frac{1-s}{2} + \alpha_+\frac{1-r}{2} =: \alpha_{r,s} \ , \tag{97}$$

wobei $s = l+1$ und $r = k+1$ und damit für h_α:

$$h_\alpha = \frac{1}{4}\left(s\alpha_- + r\alpha_+\right)^2 - \alpha_0^2 = \frac{1}{4}\Big[\left(s\alpha_- + r\alpha_+\right)^2 - \left(\alpha_- + \alpha_+\right)^2\Big] \ . \tag{98}$$

Das ist die Kac-Formel.

5.4 Explizites Beispiel für 4-Punkt-Funktion

Wir möchten nun berechnen

$$\langle \Phi_{r,s}(0)\Phi_{2,1}(z,\bar{z})\Phi_{2,1}(1)\Phi_{r,s}(R)\rangle \tag{99}$$

für $R \to \infty$. Nach Wegskalen der R-Potenz ergibt sich

$$\int \mathrm{d}^2 v\ \left\langle U_{\alpha_{r,s}} U_{\alpha_{2,1}}(z,\bar{z}) U_{\alpha_{2,1}}(1) U_{\alpha_{r,s}}(R) U_+(v,\bar{v})\right\rangle \ . \tag{100}$$

Nach einigen Zwischen-Rechnungen erhält man

$$\sim \int \mathrm{d}^2 v\, |v|^{2a} |1-v|^{2b} |v-z|^{2c} \tag{101}$$

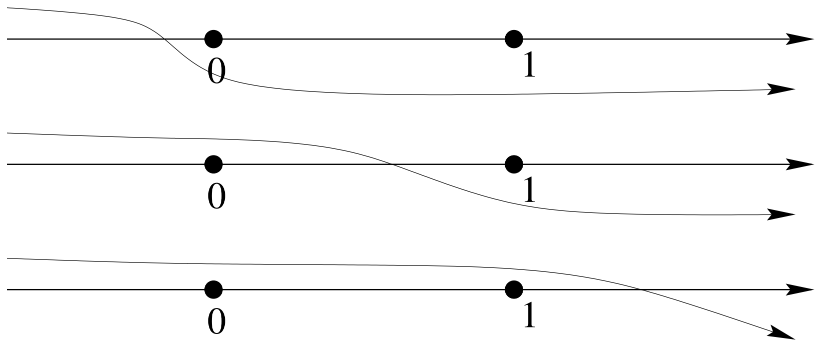

Abbildung 5: Die 3 Beiträge zum Integral.

mit $a = 2\alpha_{r,s}\alpha_+$, $b = c = 2\alpha_{2,1}\alpha_+$.

Wir berechnen zuerst ein einfaches Beispiel

$$I := \int \mathrm{d}^2 v \, |v|^{2a} |1 - v|^{2b} \, . \tag{102}$$

Durch Drehen der Integrations-Konturen ins Komplexe, s. Figur 5, kann dieses reduziert werden auf

$$I = \frac{\sin \pi a \, \sin \pi b}{\sin \pi(1 + a + b)} \left[\int_0^1 \mathrm{d}z \, z^a (1 - z)^b \right]^2 = \frac{\sin \pi a \, \sin \pi b}{\sin \pi(1 + a + b)} \left[\frac{\Gamma(1 + a)\Gamma(1 + b)}{\Gamma(2 + a + b)} \right]^2 \tag{103}$$

Für das Integral (101) ergeben sich Quadrate der Integrale in Figur 6, und damit hypergeometrische Funk-

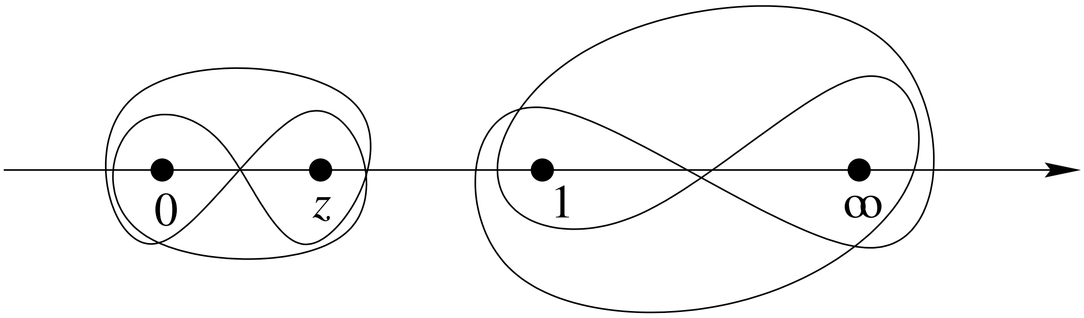

Abbildung 6: 2 unabhängige Integrations-Wege.

tionen.