

Examen de physique quantique, M2 ICFP 2018-2019

Alice Sinatra et David Papoular

Durée 3 heures. Les cahiers de cours et de travaux dirigés ainsi que les documents imprimés distribués par les enseignants sont autorisés.

Temps de cohérence d'un condensat de Bose-Einstein

À la limite thermodynamique, la condensation de Bose-Einstein confère au gaz de bosons à très basse température une cohérence temporelle infinie. Cependant, dans un système de taille finie, même isolé de l'environnement pendant son évolution, le gaz en interaction acquiert un temps de cohérence fini que nous allons calculer.

Nous considérons un gaz dilué de bosons non relativistes de masse m à l'équilibre thermique, dans le régime de très basse température $T \ll T_c$, avec un condensat de Bose-Einstein bien formé. Le gaz, isolé et homogène à trois dimensions, est constitué de N atomes dans un volume de quantification V avec des conditions aux limites périodiques. Les atomes froids interagissent par un potentiel à courte portée caractérisé par le paramètre a , longueur de diffusion en onde- s . On se limite au cas $a > 0$ et au régime d'interaction faible $(\rho a^3)^{1/2} \ll 1$ avec $\rho = N/V$ la densité moyenne. Pour décrire les interactions, on utilise le modèle sur réseau introduit en cours, avec un potentiel d'interaction entre deux particules

$$V_{12} = g_0 \frac{\delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}}{b^3} \quad (1)$$

où b est le pas du réseau et g_0 la constante de couplage nue qui est cependant proche de la constante de couplage vraie $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ dans le régime d'interaction faible considéré ici.

1 Opérateur phase et étalement de la phase dans un modèle à un mode

1.1 Opérateur phase du condensat

En présence d'un condensat, il est commode d'introduire une représentation "module-phase" pour l'opérateur a_0 qui annihile un atome dans le mode du condensat :

$$a_0 = e^{i\hat{\theta}} \sqrt{\hat{n}_0} \quad (2)$$

où $\hat{\theta}$ est un opérateur hermitien, $\hat{n}_0 = a_0^\dagger a_0$ et

$$[\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i \quad (3)$$

Comme nous allons le montrer, cette représentation est justifiée si l'on néglige la possibilité que le mode du condensat soit vide.

1. (a) Justifier que, dans la base de Fock $|n_0\rangle$ du mode du condensat, l'opérateur \hat{n}_0 s'écrit

$$\hat{n}_0 = \sum_{n_0=0}^{\infty} n_0 |n_0\rangle\langle n_0| \quad (4)$$

- (b) On définit l'opérateur $\sqrt{\hat{n}_0}$ de la façon suivante

$$\sqrt{\hat{n}_0} = \sum_{n_0=0}^{\infty} \sqrt{n_0} |n_0\rangle\langle n_0| \quad (5)$$

vérifier alors que $\sqrt{\hat{n}_0}$ est hermitien.

2. A partir de la définition (2), où cependant l'on ne sait pas encore si $\hat{\theta}$ est hermitien, calculer l'action des l'opérateurs $e^{i\hat{\theta}}$ et $(e^{i\hat{\theta}})^\dagger$ sur les états de Fock $|n_0\rangle$ avec $n_0 \neq 0$.
3. Montrer que dans l'espace de Fock privé de l'état $|n_0 = 0\rangle$, on a $e^{i\hat{\theta}} (e^{i\hat{\theta}})^\dagger = 1$ et $(e^{i\hat{\theta}})^\dagger e^{i\hat{\theta}} = 1$, si bien que l'opérateur $e^{i\hat{\theta}}$ est unitaire.
4. Justifier le fait que, dans les conditions spécifiées en début d'énoncé, pourvu que $N \gg 1$, on peut négliger la possibilité que le mode du condensat soit vide, et donc introduire un opérateur phase $\hat{\theta}$ hermitien du condensat.
5. À partir les règles de commutation (3), avec $\sqrt{\hat{n}_0}$ et $\hat{\theta}$ hermitiens :
- montrer que $[\hat{n}_0, \hat{\theta}^p] = ip \hat{\theta}^{p-1}$
 - montrer que $[\hat{n}_0, F(\hat{\theta})] = i F'(\hat{\theta})$
 - retrouver à partir de (2) les règles de commutations attendues $[a_0, a_0^\dagger] = 1$.
6. Souligner l'analogie entre les opérateurs $-\hat{\theta}$ et \hat{n}_0 et les opérateurs \hat{x} et \hat{p} , position et impulsion d'une particule à une dimension.

1.2 Étalement balistique de la phase dans un modèle à un mode

Dans cette section, nous allons étudier la dynamique de phase du condensat dans un modèle simple où toutes particules du gaz sont dans le mode du condensat $\hat{n}_0 = \hat{N}$. Le hamiltonien du système est

$$H^{\text{1 mode}} = \frac{g\hat{N}^2}{2V} \quad \text{avec} \quad [\hat{N}, \hat{\theta}] = i \quad (6)$$

et on suppose que l'état initial du système est un mélange statistique avec des faibles fluctuations du nombres d'atomes autour de $N = \bar{N}$:

$$\hat{\sigma} = \sum_N \Pi_N |N\rangle\langle N| \quad (7)$$

avec $\hat{N}|N\rangle = N|N\rangle$ et Π_N une fonction assez étroite de $N - \bar{N}$ pour que $\text{Var}[\hat{N}] \ll \bar{N}$. On rappelle que pour chaque opérateur \hat{A} , on définit la variance $\text{Var}[\hat{A}]$ et l'écart-type ΔA :

$$\text{Var}[\hat{A}] = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \quad \text{et} \quad \Delta A = \sqrt{\text{Var}[\hat{A}]} = \left(\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

où la moyenne $\langle \cdot \rangle$ est prise dans l'état représenté par la matrice densité $\hat{\sigma}$.

7. (a) Quelle est la condition de normalisation sur la matrice densité $\hat{\sigma}$?
L'exprimer en termes des populations Π_N .
- (b) Dessiner qualitativement l'allure des coefficients Π_N en fonction de N .
8. On utilisera dans tout le problème la représentation de Heisenberg, dans laquelle chaque opérateur $\hat{A}(t)$ évolue en fonction du temps selon l'équation d'évolution

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (9)$$

- (a) Montrer que, pour ce modèle simple, l'opérateur \hat{N} est une constante du mouvement.
Cela signifie-t-il que le nombre de particules ne présente aucune fluctuation ?
- (b) Etablir l'équation du mouvement pour l'opérateur $\hat{\theta}(t)$, et écrire l'opérateur $d\hat{\theta}/dt$ explicitement en termes de l'opérateur \hat{N} .
- (c) Montrer que l'opérateur $d^2\hat{\theta}/dt^2 = 0$.
9. On va introduire

$$\mu_0(\hat{N}) \equiv -\hbar \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}(\hat{N}) \quad (10)$$

Exprimer $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ en fonction de $\mu_0(\hat{N})$ et de t . On remarquera au passage que dans ce modèle simple à un seul mode, $\mu_0(N)$ coïncide avec le potentiel chimique d'un gaz à N particules.

10. Montrer que l'écart-type $\Delta\phi = \Delta[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$ de l'opérateur $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ satisfait :

$$\Delta\phi = \Delta[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = \frac{1}{\hbar} \frac{g}{V} \Delta N t, \quad (11)$$

où l'écart-type ΔN reflète l'incertitude sur le nombre de particules dans le mélange statistique décrit par la matrice densité σ .

11. Donner une interprétation physique simple de cet étalement de la phase dû aux fluctuations de \hat{N} . On pourra s'inspirer de la dernière question de la partie 1.1. Pourquoi parle-t-on dans ce cas d'"étalement balistique" de la phase du condensat ?
12. Dans le groupe de Jörg Schmiedmayer à Vienne ils ont mesuré la variation de $\mu_0(N)$ avec le nombre d'atomes autour de $N = \bar{N}$ dans un gaz à très basse température. Les résultats sont montrés en figure 1, panneau de gauche, où

$$\Delta\mu = \mu_0(\bar{N}(1-z)) - \mu_0(\bar{N}(1+z)) \quad (12)$$

Déduire de la figure la valeur de $\frac{1}{\hbar} \frac{d\mu_0}{dN} \Big|_{(N=\bar{N})} \times \bar{N}$ pour un condensats avec \bar{N} atomes.

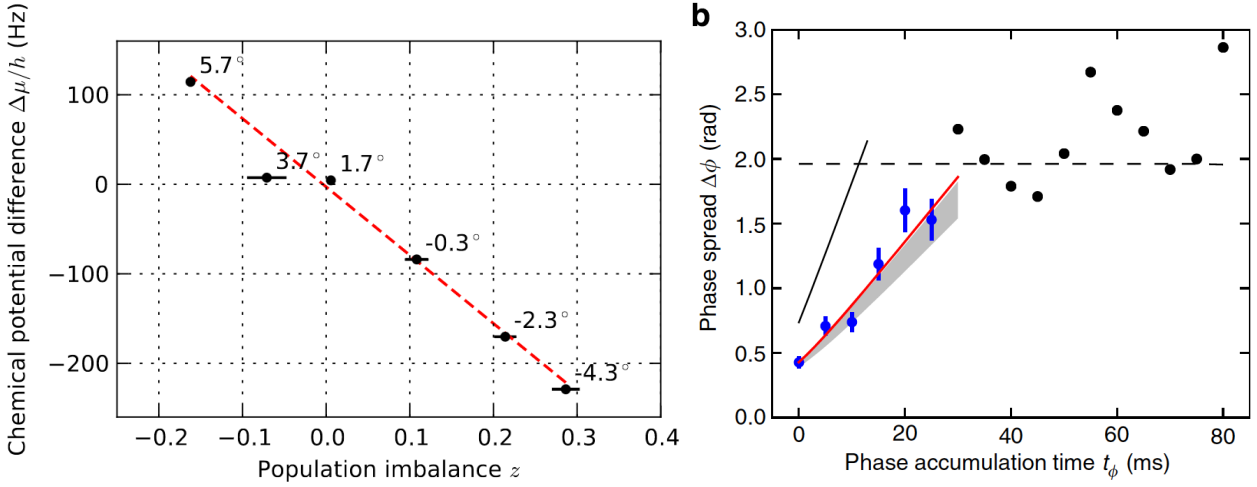


Figure 1: Extrait de Tarik Berrada et al. Nat. Comm. (2013).

13. Dans la figure 1, panneau de droite, on montre l'étalement de la phase du condensat en fonction du temps dû aux fluctuations de N dans le mélange initial

$$\Delta\phi = \left\{ \text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \right\}^{1/2} \quad (13)$$

La courbe noire correspond a des fluctuations poissonniennes avec $\text{Var}[\hat{N}] = \bar{N}$ et la courbe rouge à des fluctuations sub-poissonniennes avec $\text{Var}[\hat{N}] \simeq \bar{N}/2$. À combien estimez-vous le nombre d'atomes dans cette expérience ?

2 Fonction de corrélation temporelle et lien avec la PGP

Dans la section précédente, avec un modèle à un mode, nous avons vu qu'en présence de fluctuations du nombre des particules (quantité conservé par l'évolution hamiltonienne), la phase du condensat s'étalement, avec une variance $\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$ qui croît au cours du temps.

Dans la suite nous allons considérer un état initial à nombre de particules fixé égale à N , et nous allons nous concentrer sur les effets multimode à température non nulle. Nous verrons que si le système est préparé dans l'ensemble canonique, la phase du condensat s'étalement encore de façon balistique à cause des fluctuations de l'énergie totale du gaz E (autre quantité conservée par l'évolution hamiltonienne). Si par contre le système est préparé dans l'ensemble microcanonique à N et E fixés, l'étalement de la phase devient diffusif.

Au lieu de regarder directement $\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$ comme dans la section précédente, nous étudierons la fonction de corrélation temporelle $g_1(t)$. Les deux expressions sont reliés par la relation suivante, valable pour une distribution de $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ gaussienne :

$$g_1(t) \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle \langle e^{-i\hat{\theta}(t)} e^{i\hat{\theta}(0)} \rangle \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle \langle e^{-i[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]} \rangle = \langle \hat{n}_0 \rangle e^{-\frac{1}{2} \text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]} \quad (14)$$

dont on ne vous demande pas la démonstration.

2.1 Fonction de corrélation temporelle

Au temps longs, la cohérence temporelle du gaz de bosons est dominée par la contribution du condensat. Elle est alors décrite par la fonction de corrélation temporelle du condensat

$$g_1(t) = \langle a_0^\dagger(t) a_0(0) \rangle \quad (15)$$

où les opérateurs sont en représentation de Heisenberg.

14. Soit \hat{U} un opérateur unitaire et F une fonction développable en série. Démontrer l'identité :

$$\hat{U}F(\hat{B})\hat{U}^\dagger = F(\hat{U}\hat{B}\hat{U}^\dagger) \quad (16)$$

15. Dans la suite on va négliger la contribution des fluctuations de n_0 qui est faible en valeur relative. Montrer qu'en remplaçant $\hat{n}_0(t)$ par $\langle \hat{n}_0 \rangle$ dans (15) on obtient :

$$g_1(t) \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle \langle e^{-i\hat{\theta}(t)} e^{i\hat{\theta}(0)} \rangle \quad (17)$$

avec $\hat{\theta}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\theta}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ et $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}$.

16. En utilisant par deux fois la relation (16), montrer qu'on peut récrire la fonction de corrélation (17) sous la forme

$$g_1(t) \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle \langle e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\theta t} \rangle \quad (18)$$

où \hat{H} est le hamiltonien du système et où on a introduit

$$\hat{H}_\theta \equiv e^{-i\hat{\theta}}\hat{H}e^{i\hat{\theta}} \quad (19)$$

2.2 Lien avec la PGP

Dans le cas le plus général, qui inclue l'ensemble canonique et micro canonique, on suppose que le système est préparé dans un mélange statistique d'états propres du Hamiltonien \hat{H} à N -particules, décrit par l'opérateur densité à N -corps :

$$\hat{\sigma} = \sum_{\lambda} \Pi_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}| \quad (20)$$

où $\hat{H}|\psi_{\lambda}\rangle = E_{\lambda}|\psi_{\lambda}\rangle$ et E_{λ} est l'énergie totale du gaz dans l'état $|\psi_{\lambda}\rangle$. Il faut donc d'abord calculer la fonction de corrélation dans un état $|\psi_{\lambda}\rangle$.

17. Montrer que d'après l'équation (18), on a

$$g_1^\lambda(t) \equiv \langle \psi_{\lambda} | a_0^\dagger(t) a_0(0) | \psi_{\lambda} \rangle \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}E_{\lambda}t} \langle \psi_{\lambda} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\theta t} | \psi_{\lambda} \rangle \quad (21)$$

On écrit ensuite \hat{H}_θ comme la somme du hamiltonien \hat{H} du gaz plus une différence \hat{W} que nous verrons être N fois plus petite que \hat{H} à la limite d'un grand système

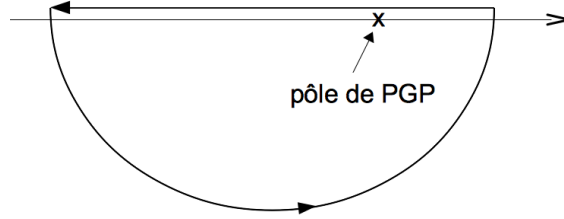
$$\hat{H}_\theta = \hat{H} + (\hat{H}_\theta - \hat{H}) \equiv \hat{H} + \hat{W} \quad (22)$$

On reconnaît alors dans (21) l'amplitude de probabilité que le système reste dans l'état $|\psi_{\lambda}\rangle$, état propre de \hat{H} , après évolution avec le "hamiltonien perturbé" \hat{H}_θ .

18. On veut calculer $g_1^\lambda(t)$ dans (21) en utilisant le formalisme de la résolvante et la méthode des projecteurs. Il s'agit bien sûr de $G_\theta(z)$: la résolvante du hamiltonien \hat{H}_θ . Quelle est le projecteur P qu'il convient de choisir ?
19. Rappeler la forme de $PG_\theta(z)P$ en fonction du hamiltonien effectif $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$, et donner $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ en fonction de P , $Q = 1 - P$, \hat{W} et \hat{H}_θ .
20. Ecrire $PG_\theta(z)P$ à l'ordre le plus bas (non nul) en \hat{W}
21. Rappeler le lien entre la résolvante et l'opérateur d'évolution, et montrer qu'à cet ordre

$$g_1^\lambda(t) \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} W_\lambda t} \quad (23)$$

avec $W_\lambda \equiv \langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle$. On utilisera le théorème des résidus en intégrant dans le plan complexe sur un contour fermé comme indiqué ci-dessous



2.3 Identification de \hat{W}

Pour obtenir des résultats explicites, nous devons donner un sens physique à l'opérateur \hat{W} . Nous allons pour cela identifier \hat{H} avec le hamiltonien de Bogoliubov $H_{\text{Bog}}(\hat{N}, \hat{\Lambda}, \hat{\Lambda}^\dagger)$, voir l'équation (27) plus bas, qui dépend des opérateurs $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}^\dagger$ ¹ et du nombre total d'atomes $\hat{N} = \hat{n}_0 + \hat{N}_\perp$ où $\hat{N}_\perp = \sum_{\mathbf{r}} b^3 \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r})$ est le nombre de particules dans les modes orthogonaux au condensat.

22. On rappelle que $[\hat{\Lambda}(\mathbf{r}), \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}')] = \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{b^3} - \frac{1}{V}$. Montrer que les opérateurs $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}^\dagger$ conservent le nombre total de particules : $[\hat{N}, \hat{\Lambda}(\mathbf{r}')] = 0$. On pourra calculer séparément les deux contributions $[\hat{N}_\perp, \hat{\Lambda}(\mathbf{r}')] et $[\hat{n}_0, \hat{\Lambda}(\mathbf{r}')] où on rappelle que $[\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i$.$$
23. Justifier les règles de commutation $[\hat{\Lambda}^\dagger, \hat{\theta}] = 0$, $[\hat{\Lambda}, \hat{\theta}] = 0$, $[\hat{N}_\perp, \hat{\theta}] = 0$.
24. Comme nous l'avons vu en cours, le nombre de particules dans le mode du condensat \hat{n}_0 est finalement éliminé de la description de Bogoliubov, remplacé par $\hat{N} - \hat{N}_\perp$. A partir de $[\hat{n}_0, \hat{\theta}] = i$ déduire que $[\hat{N}, \hat{\theta}] = i$.
25. Montrer que

$$\hat{H}_\theta = e^{-i\hat{\theta}} \hat{H}(\hat{N}, \hat{\Lambda}, \hat{\Lambda}^\dagger) e^{i\hat{\theta}} = \hat{H}(\hat{N} - 1, \hat{\Lambda}, \hat{\Lambda}^\dagger) \quad (24)$$

26. Ecrire l'équation de Heisenberg pour $\hat{\theta}(t)$ et montrer que

$$i\hbar \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -i \left. \frac{\partial \hat{H}(\hat{N}, \hat{\Lambda}, \hat{\Lambda}^\dagger)}{\partial \hat{N}} \right|_{\Lambda, \Lambda^\dagger} \quad (25)$$

¹On rappelle que $\hat{\Lambda}(\mathbf{r}) = e^{-i\hat{\theta}} \hat{\psi}_\perp(\mathbf{r})$, où $\hat{\psi}_\perp(\mathbf{r})$ est la projection de l'opérateur champ sur les modes orthogonaux au condensat.

27. Montrer qu'à l'ordre dominant en $1/N$ on peut identifier :

$$\hat{W} = \hbar \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} \quad (26)$$

3 Expression microscopique de la dérivée de la phase

3.1 Dérivée de la phase dans la théorie de Bogoliubov

Nous allons dans cette section calculer la dérivée temporelle de la phase du condensat à partir du hamiltonien de Bogoliubov

$$H_{\text{Bog}}(\hat{N}) = \frac{g_0 \hat{N}^2}{2V} + \sum_{\mathbf{r}} b^3 \left[\hat{\Lambda}^\dagger \left(h_0 + \frac{g_0 \hat{N}}{V} \right) \hat{\Lambda} + \frac{g_0 \hat{N}}{2V} (\hat{\Lambda}^2 + \hat{\Lambda}^{\dagger 2}) \right] \quad (27)$$

où h_0 est l'énergie cinétique, de valeur propre $\hbar^2 k^2 / 2m$ sur une onde plane. On rappelle le développement des champs $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}^\dagger$ sur les modes propres des équations du mouvement linéarisés :

$$\begin{pmatrix} \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \\ \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{V^{1/2}} \left[\begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} + \begin{pmatrix} V_k \\ U_k \end{pmatrix} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right] \quad (28)$$

28. En utilisant (25) et (27), écrire explicitement la dérivée de la phase en terme de \hat{N} , $\hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}^\dagger$.

29. On rappelle l'orthogonalité des ondes planes sur le réseau :

$$b^3 \sum_{\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (29)$$

Calculer $\sum_{\mathbf{r}} b^3 \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r})$ et $\sum_{\mathbf{r}} b^3 \hat{\Lambda}^2(\mathbf{r})$ et exprimer les résultats comme une somme simple sur \mathbf{k} .

30. Montrer qu'en négligeant les termes en $b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}$ et $b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger$ (qui sont rapidement oscillants en point de vue de Heisenberg), on obtient le résultats simple :

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{\mu_0(\hat{N})}{\hbar} - \frac{g_0}{\hbar V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (U_k + V_k)^2 \hat{n}_{\mathbf{k}} \quad (30)$$

avec $\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}$ et où on a introduit le potentiel chimique à température nulle

$$\mu_0(\hat{N}) = \frac{g_0}{V} \left[\hat{N} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} V_k (U_k + V_k) \right] \quad (31)$$

31. A partir des expression des modes propres de Bogoliubov et de l'énergie propre ϵ_k ²

$$U_k \pm V_k = \left(\frac{E_k}{\epsilon_k} \right)^{\pm 1/2}; \quad \epsilon_k = \sqrt{E_k(E_k + 2\rho g_0)}; \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}; \quad \rho = \frac{N}{V} \quad (32)$$

²Attention : les notations utilisées en TD et en cours pour ϵ_k et E_k ne sont pas les mêmes. Ici on reprend les notations du cours.

montrer qu'on a bien $\mu_0(N) = dE_0(N)/dN$ où $E_0(N)$ est l'énergie du fondamental dans l'approximation de Bogoliubov

$$E_0(N) = \frac{g_0 N^2}{2V} - \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \epsilon_k V_k^2 \quad (33)$$

On pourra montrer au préalable que $\epsilon_k V_k^2 = \frac{1}{2}(E_k + \rho g_0 - \epsilon_k)$ et que $V_k(U_k + V_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{E_k}{\epsilon_k} - 1 \right)$.

32. Toujours à partir des expressions (32), montrer qu'on peut récrire l'équation (30) sous la forme

$$-\hbar \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial N} \hat{n}_{\mathbf{k}} \quad (34)$$

3.2 Interprétation physique

Nous voulons montrer que le deuxième terme dans le membre de droite de (34) représente la contribution des modes thermiquement excités au potentiel chimique. Plaçons-nous dans l'ensemble canonique avec N atomes :

$$\hat{\sigma}_{\text{can}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}_{\text{Bog}}}}{Z} \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{\text{Bog}} = E_0(N) + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \epsilon_k \hat{n}_{\mathbf{k}} \quad (35)$$

L'énergie libre du système est donnée par l'énergie de l'état fondamental du gaz E_0 plus l'énergie libre des quasi particules de Bogoliubov :

$$F = E_0(N) + k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k}) \quad (36)$$

33. A l'ordre de Bogoliubov, les quasi particules forment un gaz parfait de bosons. Rappelez l'expression des nombres d'occupation moyens $\bar{n}_{\mathbf{k}} = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle$ des quasi particules de Bogoliubov avec en fonction de ϵ_k et de $\beta = 1/(k_B T)$.
34. Exprimer le potentiel chimique du gaz $\mu_{\text{can}} = \left(\frac{dF}{dN} \right)_{V,T}$ et montrer qu'on retrouve la valeur moyenne dans l'ensemble canonique de l'opérateur $-\hbar \frac{d\hat{\theta}}{dt}$ donné par l'équation (34).
35. On va donc désormais identifier le membre de droite de l'équation (34) avec un "opérateur potentiel chimique" :

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{\hat{\mu}}{\hbar} \quad (37)$$

Faire le rapprochement (similitudes et différences) entre l'équation (37) et la seconde équation de Josephson pour un supraconducteur.

4 Étalement balistique de la phase pour un système préparé dans l'ensemble canonique

Une premier mécanisme de réduction du temps de cohérence du condensat, c'est à dire de décroissance de la fonction de corrélation $g_1(t)$, vient de l'effet du moyennage du terme dominant de $g_1^\lambda(t)$, donné par l'équation (23), sur la distribution (20).

4.1 Fluctuations de l'énergie dans l'ensemble canonique

Nous allons maintenant considérer un système initialement préparé dans l'ensemble canonique, avec N atomes et $\text{Var}[\hat{N}] = 0$. Nous allons calculer le coefficient $A = A_{\text{can}}$ d'étalement balistique de la phase du condensat

$$\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = A_{\text{can}} t^2 \quad (38)$$

dans ce cas. Pour commencer, nous utilisons l'hypothèse de "microcanonicité de états propres", que vous ne chercherez pas à démontrer, qui dit que dans un système à N corps où il y a "ergodicité quantique", la moyenne d'un opérateur dans un état propre ψ_λ du hamiltonien, est bien approchée par la valeur moyenne micro canonique à l'énergie E_λ de cet opérateur. Appliquant ce résultat à notre opérateur \hat{W} , on a donc

$$W_\lambda \equiv \langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle \simeq W_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda) = -\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda) \quad (39)$$

et par conséquent, pour $N_\lambda = N$,

$$g_1^\lambda(t) \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar} \mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N) t} \quad (40)$$

Comme E_λ fluctue sur la distribution (20), ceci entraîne un amortissement de $g_1(t)$. Pour des fluctuations gaussiennes de l'énergie, ce qui est bien le cas de l'ensemble canonique pour un grand système, on a

$$|g_1^{\text{can}}(t)| = \langle \hat{n}_0 \rangle e^{-\frac{1}{2} A_{\text{can}} t^2} \quad (41)$$

avec $A_{\text{can}} = \left(\frac{1}{\hbar} \partial_E \mu_{\text{mc}}(E, N) \Big|_{E=\bar{E}} \right)^2 \text{Var} E$.

36. La première étape pour calculer A_{can} consiste à en se ramener à des grandeurs *canoniques*, au lieu que micro canoniques. En partant du fait qu'à l'ordre dominant en $1/N$ on peut identifier le potentiel chimique canonique à la température T avec le potentiel chimique microcanonique à une énergie $E_{\text{can}} \equiv \langle \hat{H} \rangle_{\text{can}}$, correspondant à l'énergie moyenne dans ensemble canonique :

$$\mu_{\text{can}}(T, N) \simeq \mu_{\text{mc}}(E_{\text{can}}(T, N), N) \quad (42)$$

exprimer $\partial_E \mu_{\text{mc}}$ en fonction de $\partial_T \mu_{\text{can}}$ et de $\partial_T E_{\text{can}}$

37. En utilisant le Hamiltonien de Bogoliubov

$$H_{\text{Bog}} = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \epsilon_k \hat{n}_{\mathbf{k}} \quad (43)$$

montrer qu'on obtient

$$A_{\text{can}} = \left(\frac{g_0}{\hbar V} \right)^2 \frac{(\sum_{\mathbf{k}} (U_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}})^2 \epsilon_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}} (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1))^2}{\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^2 \bar{n}_{\mathbf{k}} (\bar{n}_{\mathbf{k}} + 1)} \quad (44)$$

où les $\bar{n}_{\mathbf{k}}$ sont les nombres d'occupation moyens des modes de Bogoliubov dans l'ensemble canonique.

5 Diffusion de phase

Si le système est préparé dans l'ensemble microcanonique, avec $\text{Var}[\hat{N}] = 0$ et $\text{Var}[\hat{E}] = 0$, le coefficient A d'étalement balistique de la phase est nul. Pour trouver le temps de cohérence du condensat dans ce cas, il faut reprendre le calcul de la section 2.2, et inclure l'ordre suivant en \hat{W} .

38. On se limitera à l'ordre deux en \hat{W} . Montrer qu'à la limite d'un spectre continu et dans l'approximation du pôle, le hamiltonien effectif $\hat{H}_{\text{eff}}(E + i\eta)$ prend la forme

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{pole}} = P \hat{H}_{\theta} P + \hbar \Delta_{\lambda} - \frac{i\hbar}{2} \Gamma_{\lambda} \quad (45)$$

39. Montrer qu'alors

$$g_1^{\lambda}(t) \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} W_{\lambda} t} e^{-i \Delta_{\lambda} t} e^{-\frac{\Gamma_{\lambda} t}{2}} \quad (46)$$

si bien que

$$|g_1^{\lambda}(t)| \simeq \langle \hat{n}_0 \rangle e^{-\frac{\Gamma_{\lambda} t}{2}} \quad (47)$$

40. Donner une interprétation physique à Δ_{λ} et Γ_{λ} .
41. Pour un quasi continuum, donner l'expression de Γ_{λ} en terme d'une somme sur les états propres ψ_{μ} de \hat{H} , avec $\mu \neq \lambda$, et reconnaître une règle d'or de Fermi.
42. En utilisant la relation (14), déduire que l'amortissement exponentiel de la fonction de corrélation décrit par l'équation (47) correspond à un étalement diffusif de la phase du condensat, comme pour un mouvement Brownien à une dimension, avec un coefficient de diffusion D_{λ} que l'on reliera à Γ_{λ} .
43. Montrer que le coefficient de diffusion de la phase D_{λ} est simplement lié à la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$:

$$D_{\lambda} = \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} d\tau \left[\left\langle \frac{d\hat{\theta}(\tau)}{dt} \frac{d\hat{\theta}(0)}{dt} \right\rangle_{\lambda} - \left\langle \frac{d\hat{\theta}}{dt} \right\rangle_{\lambda}^2 \right] \right\} \quad (48)$$

Pour cela, on utilisera l'équation (26) et l'on insèrera dans l'expression (48) une relation de fermeture sur les états propres du hamiltonien \hat{H} .