

Cours de Mécanique

Alice Sinatra¹, Éric Brunet²

Équipe enseignante 2020-2021 :

Dalil Brouri³ (TD MONO2), Éric Brunet² (cours MONO/CMI), Clément De Daniloff⁴ (TD MAJ3 et MAJ4), Marie-Anne Hervé du Penhoat⁵ (TD MONO1), Édouard Kierlik⁶ (TD CMI), François Mallet⁷ (TD MAJ2 et TD SPRINT), Richard Monier⁸ (TD MONO3 et FOAD), Clément Pellet-Mary⁹ (TD MP-mM), Alice Sinatra¹ (cours SPRINT/DM-PM), Dario Taverna¹⁰ (TD DM-MP), Paul Windey¹¹ (cours MAJ/MP-mM et TD MAJ1).

23 janvier 2021

Les parties du cours en noir sont communes aux UE LU2PY104 et LU2PY404.

Les parties du cours en vert ne sont que pour l'UE LU2PY404.

Ouvrages de références :

- Landau, Lifchitz « Physique théorique — Mécanique », collection MIR, éditeur Ellipses, Librairie Eyrolles.
- Herbert Goldstein « Mécanique classique » (pour la version française, éditeur Presses Universitaires de France).
- Pour aller plus loin : Jean-Marcel Rax « Mécanique analytique », collection Sciences Sup, Dunod.
- Exercices : « Théorie et applications de la mécanique générale », éditeur : Schaum, collection : Série Schaum

-
1. email : alice.sinatra@sorbonne-universite.fr
 2. email : eric.brunet@sorbonne-universite.fr
 3. email : dalil.brouri@sorbonne-universite.fr
 4. email : clement.de-daniloff@lkb.ens.fr
 5. email : marie-anne.herve_du_penhoat@sorbonne-universite.fr
 6. email : edouard.kierlik@sorbonne-universite.fr
 7. email : francois.mallet@sorbonne-universite.fr
 8. email : richard.monier@sorbonne-universite.fr
 9. email : clement.pellet-mary@phys.ens.fr
 10. email : dario.taverna@sorbonne-universite.fr
 11. email : paul.windey@sorbonne-universite.fr

Table des matières

1	Problème à deux corps	5
1.1	Lois de conservation et référentiel du centre de masse	5
1.2	Force centrale	6
1.2.1	Étude qualitative des trajectoires	8
1.3	Problème de Kepler	9
1.3.1	Trajectoire elliptique	11
1.3.2	Trajectoire hyperbolique	12
2	Collisions	15
2.1	Collisions élastiques	15
2.1.1	Collisions à une dimension	15
2.1.2	Collisions à deux ou trois dimensions	16
2.2	Collisions inélastiques : la désintégration	19
2.3	Diffusion de particules	20
2.3.1	Diffusion par un potentiel $U(r)$	20
2.3.2	Section efficace différentielle de diffusion	21
2.3.3	Diffusion de Rutherford	21
2.3.4	Diffusion aux petits angles	23
2.3.5	Section efficace à petits angles pour un potentiel $U = \alpha r^{-n}$	24
3	Équations de Lagrange	27
3.1	Coordonnées généralisées	27
3.2	Principe de moindre action	28
3.3	Lagrangien d'une particule libre	30
3.3.1	Exemple : géodésique sur la sphère	31
3.3.2	Exercice : solution des équations du mouvement sur la sphère	32
3.4	Lagrangien d'une particule dans un potentiel extérieur	35
3.4.1	Exemple : le pendule au point d'attache mobile	35
3.5	Lagrangien d'un ensemble de particules	36
3.6	Expression générale du Lagrangien	37
3.6.1	Additivité du Lagrangien	37
4	Lois de conservation	39
4.1	Intégrales du mouvement	39
4.2	Uniformité du temps et conservation de l'énergie	40
4.3	Homogénéité de l'espace et conservation de l'impulsion	41
4.3.1	Impulsions et forces généralisées	42
4.3.2	Exercice	42
4.4	Référentiel du centre de masse	43
4.4.1	Transformation de l'impulsion par changement de référentiel galiléen	43
4.4.2	Décomposition de l'impulsion à l'aide du référentiel du centre de masse	43

4.4.3	Transformation de l'énergie par changement de référentiel galiléen . . .	44
4.4.4	Décomposition de l'énergie à l'aide du référentiel du centre de masse . .	44
4.5	Isotropie de l'espace et conservation du moment cinétique	44
4.5.1	Transformation du moment cinétique par changement de référentiel . . .	46
4.5.2	Décomposition du moment cinétique à l'aide du référentiel du centre de masse	46
4.6	Similitudes mécaniques et théorème du viriel	47
4.6.1	Changements d'échelle	47
4.6.2	Théorème du viriel	47
4.7	Annexe : Théorème de Noether	49
5	Petites oscillations	51
5.1	Oscillations libres	51
5.1.1	Équilibre stable	51
5.1.2	Petites oscillations autour de l'équilibre	51
5.1.3	Représentation complexe	52
5.2	Oscillations forcées	53
5.2.1	Force extérieure périodique	53
5.2.2	Cas général	55
5.3	Oscillations d'un système à plusieurs degrés de liberté, modes normaux	56
5.3.1	Système à deux degrés de liberté	56
5.3.2	Système à s degrés de liberté autour d'un point d'équilibre stable	59
5.3.3	Exercice : petites oscillations du pendule double	61
6	Mouvements d'un solide	67
6.1	Généralités	67
6.2	Tenseur d'inertie et Lagrangien	68
6.2.1	Calcul du tenseur d'inertie	69
6.3	Exemples de résolution	70
6.3.1	Cylindre qui roule sans glisser sur un plan incliné	70
6.3.2	Petites oscillations de deux tiges attachées par une charnière	71
6.4	Moment cinétique du solide	73
6.5	Équations du mouvement pour un solide	74
6.5.1	Dérivée temporelle de la quantité de mouvement	74
6.5.2	Dérivée temporelle du moment cinétique	75
7	Introduction au formalisme Hamiltonien	77
7.1	Fonction de Hamilton	77
7.1.1	Hamiltonien d'une particule dans un potentiel extérieur $U(x, y, z)$	78
7.1.2	Hamiltonien d'une particule chargée dans un champs électromagnétique	79
7.2	Équations de Hamilton	79
7.3	Crochets de Poisson	80
7.3.1	Propriétés des crochets de Poisson	80

Chapitre 1

Problème à deux corps

1.1 Lois de conservation et référentiel du centre de masse

Considérons deux corps, deux points matériels que nous nommerons 1 et 2, en interaction mutuelle. On pose \vec{r}_1 et \vec{r}_2 les positions de ces points dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Nous appellerons \vec{F}_{12} la force que le corps 1 exerce sur le corps 2 et inversement \vec{F}_{21} la force que le corps 2 exerce sur le corps 1. D'après la troisième loi de Newton, \vec{F}_{12} et \vec{F}_{21} ont le même module, la même direction et des sens opposés. De plus, si on exclut certains phénomènes électromagnétiques (interaction dipôle-dipôle), la direction des forces d'interaction se confond avec la droite qui passe par les deux points :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{12} \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0. \quad (1.1)$$

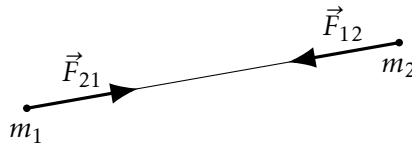


FIGURE 1.1 – Deux corps interagissent avec une force mutuelle $\vec{F} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Nous supposons le système isolé, c'est à dire il n'y a pas d'autre force extérieure agissant sur les deux corps. Une application directe de la loi de Newton sur ce système isolé dans le référentiel du laboratoire montre que le centre de masse, de vecteur position \vec{r}_c , n'est pas affecté par l'interaction entre les deux corps.

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_c = \vec{0}} \quad (1.2)$$

La vitesse $\dot{\vec{r}}_c$ du centre de masse dans le référentiel du laboratoire est donc constante, ce qui montre que le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_c est bien un référentiel galiléen.¹ On pose $\vec{r}_{1,c}$ et $\vec{r}_{2,c}$ les positions des deux points matériels dans le référentiel \mathcal{R}_c . Ces positions s'expriment

1. Rappelons l'expression du vecteur position du centre de masse

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.3)$$

Le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_c est le référentiel qui est en translation par rapport au référentiel du laboratoire et dont l'origine est \vec{r}_c . L'application de la deuxième loi de Newton dans le référentiel du laboratoire donne bien

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{r}}_c = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}.$$

simplement en terme de la position relative \vec{r}

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{2,c} - \vec{r}_{1,c} \quad (1.4)$$

$$\vec{r}_{1,c} = \vec{r}_1 - \vec{r}_c = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_{2,c} = \vec{r}_2 - \vec{r}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (1.5)$$

La deuxième loi de Newton dans \mathcal{R}_c appliquée à chacun des deux corps

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_{1,c} = \vec{F}_{21} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_{2,c} = \vec{F}_{12} \quad (1.6)$$

donne alors deux fois la même équation

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} \quad (1.7)$$

Nous allons introduire μ la *masse réduite*

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.8)$$

et la force $\vec{F} \equiv \vec{F}_{12}$. À cause de l'invariance par translation du système, \vec{F} dépend seulement de la position relative $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$. On obtient donc l'équation du mouvement relatif

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})} \quad (1.9)$$

À partir d'un problème à deux corps, nous avons obtenu deux problèmes à un corps. Le centre de masse a un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel du laboratoire, et l'équation (1.9) du mouvement relatif représente le mouvement un corps fictif de masse μ soumis à une force extérieure \vec{F} . On dit que le problème à deux corps est séparable. (Remarque : on montre que l'impulsion totale du système est $m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}_c$. On peut donc dire que le centre de masse se comporte comme une particule libre de masse $m_1 + m_2$.)

1.2 Force centrale

Nous allons supposer que la force \vec{F} est centrale, c'est-à-dire que

- La force est dirigée selon \vec{r}
- La norme et le sens de la force ne dépendent que de r .

Dans le contexte du problème à deux corps, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est la position relative des deux corps, et est donc aussi la position de la particule fictive. Cependant, tout ce qui est dit dans ce chapitre s'applique également à une particule réelle dans un champ de force centrale.

Une force centrale est forcément conservative, c'est-à-dire qu'il existe un potentiel $V(r)$ tel que²

$$\boxed{\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{u}_r} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.10)$$

Le potentiel V ne dépend que de r , et pas de θ ou de ϕ , parce que la force \vec{F} a seulement une composante selon \vec{u}_r , et pas selon \vec{u}_θ ou \vec{u}_ϕ . Si la force entre les deux corps est attractive, comme représenté sur le dessin en figure 1.1, on a $\frac{dV(r)}{dr} > 0 \forall r > 0$.

2. Nous avons utilisé dans (1.10) l'expression du gradient en coordonnées sphériques $\vec{\text{grad}}f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$

Dorénavant, nous nous concentrons sur les équations (1.9) et (1.10), qui décrivent le mouvement d'une particule fictive de position \vec{r} et masse μ dans un potentiel extérieur $V(r)$ qui dépend seulement de la distance r à un point immobile donné O , dit le centre du champ de force. Une fois ce problème résolu, on pourra remonter aux mouvements individuels des deux corps par rapport à leur centre de masse en utilisant les équations (1.5).

Appliquons le théorème du moment cinétique à la particule fictive en O :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \text{ est constant.} \quad (1.11)$$

Le moment cinétique de la particule fictive est $\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu \dot{\vec{r}}$. Comme \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$ sont à chaque instant orthogonaux à \vec{L} qui est constant, on déduit que la trajectoire de la particule fictive se trouve dans un plan \mathcal{P} orthogonal à \vec{L} . On peut ainsi réduire ultérieurement le nombre de des degrés de liberté du système. Dans le plan \mathcal{P} , on utilisera les coordonnées polaires. En rajoutant un axe z orthogonal à \mathcal{P} orienté selon \vec{L} , on aura des coordonnées cylindriques. On considère pour l'instant le cas $\vec{L} \neq \vec{0}$. Dans ce cas³ :

$$\vec{L} = r\vec{u}_r \wedge \mu \dot{\vec{r}} = r\vec{u}_r \wedge \mu(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \quad (1.12)$$

La constance du module de \vec{L} a une interprétation géométrique simple : l'aire élémentaire dA balayée par \vec{r} pendant dt est constante, comme montré en figure 1.2.

$$dA = \frac{r^2}{2} d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2\mu}} \quad (1.13)$$

C'est la *loi des aires*, ou seconde loi de Kepler.

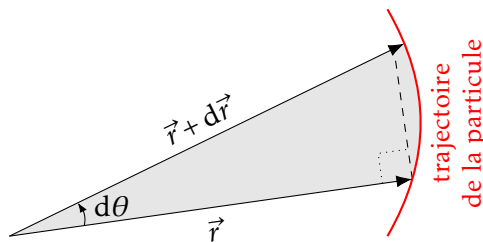


FIGURE 1.2 – Soit dA l'aire élémentaire balayée par \vec{r} pendant dt , en gris sur la figure. L'aire du triangle (à gauche des pointillés) est $\frac{1}{2}r^2 \tan(d\theta) \approx \frac{1}{2}r^2 d\theta$. L'aire à droite des pointillés est négligeable (d'ordre $dr d\theta$). On a donc au premier ordre $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, et $dA/dt = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} = L/(2\mu)$, qui est constant.

Nous allons maintenant utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la solution complète du problème. La force étant conservative, dérivée du potentiel $V(r)$, l'énergie mécanique est conservée :

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r) = \text{const.} \quad (1.14)$$

En utilisant le fait que

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{\mu}{2} \left\| \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \right\|^2 = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad \text{et} \quad L = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (1.15)$$

on se ramène à un problème purement radiale, à un seul degré de liberté, pour une particule fictive de masse μ dans un potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad U_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad (1.16)$$

3. Clairement, $\vec{L} = \vec{0}$ correspond à une trajectoire rectiligne pour la particule fictive.

1.2.1 Étude qualitative des trajectoires

Nous supposons ici une force attractive entre les deux corps ce qui implique, comme on l'a dit, $dV(r)/dr > 0 \forall r$. Rappelons que le potentiel $V(r)$ n'est défini qu'à une constante près ; lorsque $V(\infty)$ est fini, on s'arrange toujours pour avoir $V(\infty) = 0$. Le potentiel attractif $V(r)$ est alors négatif. Le potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$ est donc formé par la fonction croissante $V(r)$ (qui typiquement s'annule donc à l'infini), plus la partie en $\frac{L^2}{2\mu r^2}$, toujours positive, qui devient très grande à faible r . Le potentiel effectif prend sa valeur minimal U_* pour une valeur de $r = r_*$.

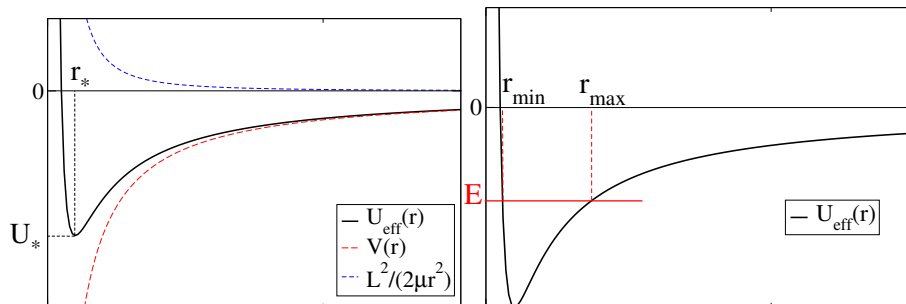


FIGURE 1.3 – Gauche : Potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$, et son minimum U_* atteint pour $r = r_*$. Droite : points r_{min} et r_{max} de rebroussement du mouvement radial pour une énergie E comprise entre U_* et zéro.

D'après l'équation (1.16), l'énergie doit satisfaire $E \geq U_*$. Comme illustré en figure 1.3, pour toute valeur de l'énergie strictement comprise entre U_* et zéro $0 > E > U_*$ il existent deux valeurs de r appelés r_{min} et r_{max} pour lesquelles $U_{\text{eff}}(r) = E$ et donc $\dot{r} = 0$. Ce sont des *points de rebroussement* pour le mouvement radial. Quand la particule va de r_{min} à r_{max} , on a $\dot{r} > 0$, et quand la particule va de r_{max} à r_{min} , on a $\dot{r} < 0$. En isolant \dot{r} et en intégrant par la méthode de séparation des variables, on obtient l'équation implicite de la trajectoire⁴

$$\int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} = t_{\text{max}} - t_{\text{min}} = \Delta t \quad (1.17)$$

Ici, t_{max} est le moment où $r = r_{\text{max}}$ et t_{min} le moment où $r = r_{\text{min}}$ (dans les deux cas, $\dot{r} = 0$). Quand le point atteint r_{max} , \dot{r} change de signe. Il faut alors prendre le signe moins devant la racine carrée et on a

$$\int_{r_{\text{max}}}^{r_{\text{min}}} \frac{-dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} = \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} = \Delta t \quad (1.18)$$

Les temps pour aller de r_{min} à r_{max} et de r_{max} à r_{min} sont égaux à cause de la symétrie du potentiel, on les a posé égaux à Δt . Au bout d'un temps $2\Delta t$ le module de r revient donc à sa valeur initiale. La trajectoire dans le plan \mathcal{P} est-elle pour autant une courbe fermée ? Pour répondre à cette question, il faut regarder la variation de l'angle θ pendant ce temps. Supposons que $L > 0$. (En général, on s'arrange toujours pour orienter l'espace de manière à avoir $L > 0$. Nous ferons toujours cette hypothèse dans la suite.) On commence par remarquer que

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} > 0 \quad (1.19)$$

4. En inversant (1.16), on obtient $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(r)]}$. Le signe est + de r_{min} à r_{max} et - de r_{max} à r_{min} . On a donc $dt = \pm dr / \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(r)]}$ et on obtient (1.17) et (1.18) en mettant le bon signe et en intégrant.

L'angle θ donc grandit toujours, et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ne s'annule pas. Toujours par séparation des variables, pendant le temps $2\Delta t$, la variation de θ est donnée par⁵

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}} \quad (1.20)$$

Ce $\Delta\theta$ correspond donc à l'augmentation de l'angle entre deux instants consécutifs pour lesquels $r = r_{\max}$ (ou, de manière équivalente, entre deux instants consécutifs pour lesquels $r = r_{\min}$). L'orbite est fermée si et seulement si il existe deux entiers n et m tels que

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{n}{m}, \quad (1.21)$$

auquel cas l'angle θ retrouvera la valeur initiale (modulo 2π) après m périodes $2\Delta t$ du mouvement radial, quand la particule aura fait n tours autour de l'origine. Dans le cas contraire, l'orbite n'est pas fermée; elle passe une infinité de fois par r_{\min} et r_{\max} , comme montré en figure 1.4, et finit par remplir densément la couronne de cercle entre ces deux valeurs. Remarquons que pour $E = U_*$, on a $\dot{r} = 0$: la trajectoire est fermée et circulaire de rayon $r = r_*$.

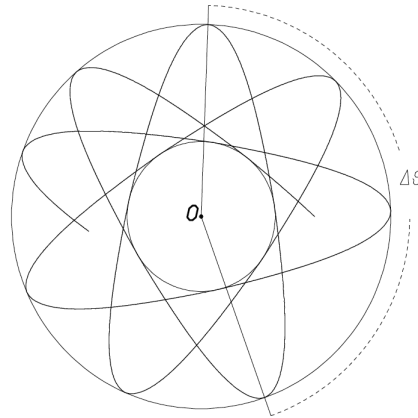


FIGURE 1.4 – Trajectoire non fermée d'un mouvement radial limité, compris entre r_{\min} et r_{\max} .

Enfin, dans le cas où $E > 0$, le mouvement radial n'est pas limité, et on a seulement la contrainte $r \geq r_{\min}$. La particule peut venir de l'infini par une direction arbitraire et repartir à l'infini dans une autre direction. L'angle de déflexion $\Delta\theta$ est alors donné par la même formule (1.20) où l'on remplace r_{\max} par $+\infty$.

1.3 Problème de Kepler

Nous considérons dans cette section le problème de Kepler, qui correspond au cas de la force gravitationnelle

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{avec} \quad \alpha = Gm_1m_2 = GM\mu > 0 \quad (1.22)$$

où $M = m_1 + m_2$ est la masse totale, $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite et G est la constante de gravitation universelle [G] = $M^{-1}L^3T^{-2}$ de valeur $G \simeq 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ dans le Système International d'unités (SI).

5. On pose $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt}$ et on utilise $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$.

Le potentiel effectif (1.16) est donc de la forme

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (1.23)$$

En résolvant $\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0$, on peut calculer aisément la valeur r_* qui rend le potentiel effectif minimum et la valeur U_* du minimum correspondante

$$r_* = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad \text{et} \quad U_* = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 \mu}{L^2} \quad (1.24)$$

En remplaçant $U_{\text{eff}}(r)$ dans la formule intégrale pour l'angle (1.20), mais en intégrant seulement jusqu'à r et non jusqu'à r_{max} , et en prenant l'origine des angles de manière à avoir $\theta(r_{\text{min}}) = 0$, on obtient

$$\theta = \int_{r_{\text{min}}}^r \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (1.25)$$

En introduisant le paramètre p et l'excentricité e de l'orbite :

$$\boxed{p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{U_*}}} \quad (1.26)$$

on obtient après intégration⁶ l'équation de la trajectoire qui est une section de conique

$$\boxed{r = \frac{p}{e \cos \theta + 1}} \quad (1.27)$$

Selon la valeur de e , donc de l'énergie, la trajectoire est ou non limitée :

Cas $e > 1$	correspondant à	$E > 0$:	hyperbole
Cas $e = 1$	correspondant à	$E = 0$:	parabole
Cas $0 < e < 1$	correspondant à	$U_* < E < 0$:	ellipse
Cas $e = 0$	correspondant à	$E = U_*$:	cercle.

6. On complète d'abord le carré sous la racine au dénominateur

$$2\mu\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2} = -\left(\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu^2\alpha^2}{L^2} + 2\mu E\right)$$

On factorise ensuite $\frac{\mu^2\alpha^2}{L^2}$ dans les deux termes ce qui donne

$$\theta = \int_{r_{\text{min}}}^r \frac{\frac{L}{\mu\alpha} \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}\right) - \left(\frac{L}{\mu\alpha} \frac{1}{r} - 1\right)^2}} = \int_{r_{\text{min}}}^r \frac{\frac{p}{r^2} dr}{\sqrt{e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2}}$$

où l'on a utilisé les relations (1.26) pour obtenir la deuxième égalité. Le changement de variable

$$x = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1\right) \quad dx = -\frac{p}{e} \frac{1}{r^2} dr$$

donne

$$\theta = \int_{x_{\text{min}}}^x \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) - \arccos(x_{\text{min}})$$

On remarque enfin que puisque r_{min} annule le dénominateur sous la racine carrée dans l'expression de θ , on a

$$x_{\text{min}} = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_{\text{min}}} - 1\right) = 1.$$

Revenons au problème initial des deux corps. Dans le référentiel \mathcal{R}_c du centre de masse les positions des deux corps sont simplement reliées à \vec{r} :

$$\vec{r}_{1,c} = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r} \quad (1.28)$$

$$\vec{r}_{2,c} = \frac{\mu}{m_2}\vec{r} \quad (1.29)$$

Chacun des deux corps a donc une trajectoire qui est une section de conique dont le foyer est en la position \vec{r}_c du centre de masse. Dans le cas particulier où on aurait $m_1 \gg m_2$, comme dans le cas du Soleil et une planète telle la Terre, $\frac{\mu}{m_1} \simeq 0$ et $\frac{\mu}{m_2} \simeq 1$ si bien que $\vec{r}_{1,c} \simeq 0$ et $\vec{r}_{2,c} \simeq \vec{r}$.

1.3.1 Trajectoire elliptique

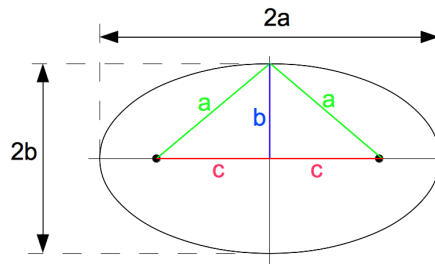


FIGURE 1.5 – Ellipse de demi-axes a et b . L'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Concentrons-nous sur le cas de l'ellipse. À l'aide de la figure 1.5, il est simple d'exprimer les demi-axes a et b de l'ellipse en fonction des paramètres p et e qui apparaissent dans la formule (1.27). On trouve⁷.

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{a} = p \quad (1.33)$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la *troisième loi de Kepler*, qui relie la période T de révolution au demi-grand axe a de l'orbite elliptique. En reprenant la loi des aires (1.13) intégrée sur une période et en prenant le carré du résultat, on obtient

$$\pi^2 a^2 b^2 = T^2 \frac{L^2}{4\mu^2} = T^2 \frac{p\alpha}{4\mu} \quad (1.34)$$

Par ailleurs on a montré que $p = b^2/a$ et on sait que $\alpha/\mu = GM$. On a donc

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}} \quad (1.35)$$

7. Pour un point quelconque M sur la courbe, la somme des distances de M aux deux foyers est une constante égale au grand axe $2a$. Pour un point M aligné aux foyers, et en utilisant l'équation (1.27), on a donc

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-e^2} \quad (1.30)$$

Par ailleurs, on a

$$c = a - r_{\min} = a - \frac{p}{1+e} = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = \frac{pe}{1-e^2} = ea \quad (1.31)$$

et, par symétrie de la figure, on a aussi $b^2 = a^2 - c^2$ ce qui donne

$$\frac{b^2}{a} = a - \frac{c^2}{a} = a(1-e^2) = p \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{a} = p \quad (1.32)$$

Ici $M = m_1 + m_2$ est la masse totale. Encore une fois, dans le cas du système solaire on peut approximer M avec la masse du Soleil et on a donc que pour différentes planètes du système solaire, le rapport entre le cube du demi-grand axe de l'orbite et le carré de la période est une constante.

1.3.2 Trajectoire hyperbolique

Potentiel attractif

Considérons toujours le problème de Kepler avec le *potentiel attractif* (1.22). Dans le cas où $E > 0$, $e > 1$ et la section de conique décrite par l'équation (1.27) est un branche d'hyperbole, qui contourne le centre du champ de force, point que nous avons appelé F dans la figure 1.6. L'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est encore donné par l'équation (1.27)

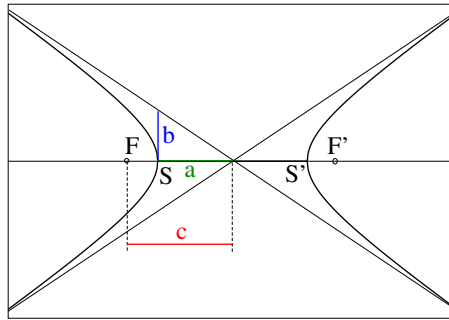


FIGURE 1.6 – Hyperbole de demi-axe a . L'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$r = \frac{p}{e \cos \theta + 1} \quad (1.36)$$

mais cette fois l'angle θ varie dans l'intervalle $\theta \in [-(\pi - \tilde{\theta}), \pi - \tilde{\theta}]$ où $\tan(\tilde{\theta})$ est la pente des asymptotes de l'hyperbole

$$y \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \pm \frac{b}{a} \quad \tan(\tilde{\theta}) = \frac{b}{a} \quad (1.37)$$

L'angle $\theta = 0$ correspond au périhélie

$$r_{\min} = \frac{p}{e + 1} \quad (1.38)$$

La deuxième branche de l'hyperbole, celle qui contourne le point F' dans la figure 1.6, n'as pas d'intérêt physique dans le cas d'un potentiel attractif, mais nous verrons qu'elle représente la trajectoire physique dans le cas d'un potentiel répulsif de centre F . Son équation en coordonnées polaires est

$$r = \frac{p}{e \cos \theta - 1} \quad (1.39)$$

Comme dans le cas de l'ellipse, nous pouvons relier les paramètres géométriques de la courbe a , b et c à p et e (1.26) qui dépendent des paramètres physiques tels l'énergie et le moment cinétique. On trouve⁸

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad b^2 = \frac{p^2}{e^2 - 1} \quad c = \frac{ep}{e^2 - 1}. \quad (1.40)$$

8. En faisant référence aux notations de la figure 1.6, on calcule d'abord a :

$$2a = FS' - FS = p \left(\frac{1}{e-1} - \frac{1}{e+1} \right) = \frac{2p}{e^2 - 1}.$$

Potentiel répulsif

Considérons maintenant le cas d'un *potentiel répulsif*

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad \alpha > 0 \quad (1.41)$$

Le potentiel effectif (1.16) et cette fois une fonction monotone décroissante. Le mouvement est donc non limité comme montré dans la figure 1.7 Comme dans le cas attractif, le calcul

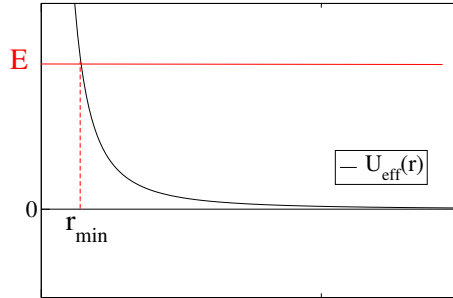


FIGURE 1.7 – Potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$ (1.16) dans le cas d'un potentiel $V(r)$ répulsif, et point r_{min} de rebroussement du mouvement radial.

de la trajectoire s'effectue en remplaçant l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$ dans la formule intégrale pour l'angle (1.20) avec $\theta_{\text{max}} = \theta$ et $r_{\text{max}} = r$, en prenant l'origine des angles correspondante à r_{min} . Le calcul suit de près celui du cas attractif si l'on remplace α par $-\alpha$ dans les formules⁹, et l'on obtient

$$r = \frac{p}{e \cos \theta - 1} \quad (1.42)$$

Il s'agit de la branche de l'hyperbole qui est extérieure au centre de force F dans la figure 1.6. La distance du périhélie au centre de force F est

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{e - 1} = a(e + 1). \quad (1.43)$$

ensuite

$$c = a + FS = \frac{p}{e^2 - 1} + \frac{p}{e + 1} = \frac{p}{e^2 - 1} (1 + e - 1) = \frac{ep}{e^2 - 1}.$$

enfin, en utilisant le fait que $\cos \tilde{\theta} = 1/e$ et la relation $\frac{1}{\cos^2 \tilde{\theta}} = 1 + \tan^2 \tilde{\theta}$, on obtient

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2(e^2 - 1) = \frac{p^2}{e^2 - 1}.$$

9. Au moment du changement de variables dans l'intégrale il faut cette fois poser $x = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} + 1 \right)$ au lieu de $x = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$.

Chapitre 2

Collisions

Nous appelons « collision » un processus d'interaction entre deux particules qui change leur quantité de mouvement et leur énergie, et qui a lieu pendant un temps bref par rapport au temps d'observation du système, si bien qu'on définit un « avant » et un « après » collision. « Avant » et « après » la collision, on suppose que les particules sont suffisamment éloignées pour que potentiel d'interaction soit négligeable : les particules sont pratiquement libres, se déplacent à peu près de manière rectiligne et uniforme, et ont une énergie mécanique environ égale à leur énergie cinétique.

Comme nous le verrons, beaucoup de propriétés et de résultats simples sur les collisions peuvent être déduits des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. D'autres propriétés dépendent du potentiel d'interaction entre les particules, et l'étude des trajectoires permet justement de remonter à la loi d'interaction si elle n'est pas connue.

2.1 Collisions élastiques

Nous appelons « élastique » une collision pour laquelle l'énergie cinétique totale des particules est conservée entre l'état « avant » la collision et « après » la collision. Il faut pour cela qu'il n'y ait pas de conversion de l'énergie mécanique en d'autres formes d'énergie, comme l'énergie interne des particules, la masse, la chaleur ou la radiation.

2.1.1 Collisions à une dimension

En une dimension, plutôt que de travailler avec des vecteurs, on préfère considérer des quantités algébriques. Dans cette section, donc, v ne représente pas la norme (forcement positive) $\|\vec{v}\|$ du vecteur vitesse \vec{v} d'une particule, mais sa vitesse algébrique qui est positive si la particule va dans un certain sens (par exemple, vers la droite) et négative si elle va dans l'autre sens (vers la gauche). Autrement dit, v est défini par la relation $\vec{v} = v \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire de la dimension dans laquelle on travaille.

Considérons une collision entre deux particules de masse m_1 et m_2 qui a lieu en une dimension. Si l'on connaît les vitesses v_1 et v_2 des particules avant la collision, on peut déduire leurs vitesses après collision v'_1 et v'_2 en résolvant un système à deux équations et deux inconnues. Les inconnues sont v'_1 et v'_2 , des quantités algébriques, et les équations viennent des lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2 \quad (2.2)$$

Sous l'hypothèse qu'il y a effectivement une collision, c'est-à-dire que $v_1 \neq v'_1$ et $v_2 \neq v'_2$, on

trouve que $v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$ et ¹

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2.3a)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2.3b)$$

Collision à une dimension sur une particule initialement au repos

Analysons le cas particulier où la particule 2 est initialement au repos : $v_2 = 0$. À partir des formules générales (2.3a-2.3b), on obtient alors

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.4)$$

Selon le rapport des deux masses m_1/m_2 , on observe les comportements suivants :

$$\begin{array}{lll} m_1 = m_2 & \implies & v'_1 = 0, \quad v'_2 = v_1 \quad \text{Les particule échantent leurs vitesses} \\ m_1 \ll m_2 & \implies & v'_1 \simeq -v_1, \quad v'_2 \simeq 0 \quad \text{La particule 1 rebondit} \\ m_1 \gg m_2 & \implies & v'_1 \simeq v_1, \quad v'_2 \simeq 2v_1 \quad \text{La boule qui frappe le cochonnet} \end{array}$$

2.1.2 Collisions à deux ou trois dimensions

Dans le cas des collisions à deux ou trois dimensions, les équations fournies par la conservation de la quantité de mouvement (deux ou trois équations) et de l'énergie cinétique (une équation) ne suffisent pas pour déterminer les vitesses des particules après la collision à partir des vitesses avant la collision. Des relations simples peuvent toutefois être trouvées si on décrit la collision dans le référentiel du centre masse.

Collision à deux ou trois dimensions dans le référentiel au centre de masse

Plaçons-nous dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_c . Les positions des deux particules dans \mathcal{R}_c en fonction de $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ sont, voir les équations (1.5),

$$\vec{r}_{1,c} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_{2,c} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2.5)$$

En introduisant la vitesse relative $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}$ et la masse réduite $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, les quantités de mouvement $\vec{p}_{1,c}$ et $\vec{p}_{2,c}$ des deux particules dans \mathcal{R}_c avant le choc vérifient

$$\vec{p}_{1,c} = -\mu \vec{v} \quad \vec{p}_{2,c} = \mu \vec{v}$$

d'où on voit que

$$\vec{p}_{1,c} = -\vec{p}_{2,c} \quad \text{et} \quad p_{1,c} = p_{2,c} \quad (2.6)$$

1. On récrit d'abord les équations sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 [v_1^2 - (v'_1)^2] &= m_2 [(v'_2)^2 - v_2^2] \\ m_1 (v_1 - v'_1) &= m_2 (v'_2 - v_2). \end{aligned}$$

En divisant ces deux équations, on obtient $v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$ et donc $v'_2 = v_1 + v'_1 - v_2$. En remplaçant cette expression de v'_2 dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$m_1 (v_1 - v'_1) - m_2 (v_1 + v'_1 - 2v_2) = 0 \quad \implies \quad v'_1 (m_1 + m_2) = 2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1.$$

En posant $\vec{p}'_{1,c}$ et $\vec{p}'_{2,c}$ les impulsions des particules dans \mathcal{R}_c après le choc, la conservation de la quantité de mouvement prend alors une forme très simple dans le référentiel du centre de masse :

$$\vec{p}_{1,c} + \vec{p}_{2,c} = \vec{0} = \vec{p}'_{1,c} + \vec{p}'_{2,c} \quad (2.7)$$

ainsi que la conservation de l'énergie cinétique

$$\frac{p_{1,c}^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{(p'_{1,c})^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (2.8)$$

d'où

$$\boxed{p_{1,c} = p'_{1,c}} \quad (2.9)$$

Le seul paramètre libre pour décrire la collision dans le référentiel du centre de masse est donc la direction de $\vec{p}'_{1,c}$ que nous indiquerons par le vecteur unitaire \vec{n}_0 ou, de façon équivalente, par l'angle χ entre $\vec{v}'_{1,c}$ et $\vec{v}_{1,c}$ et, si l'on est en trois dimensions, la donnée du plan contenant les vitesses $\vec{v}_{1,c}$ et $\vec{v}'_{1,c}$. On a $\vec{p}'_{1,c} = p_{1,c} \vec{n}_0 = m_1 v_{1,c} \vec{n}_0$ et $\vec{p}'_{2,c} = -p_{1,c} \vec{n}_0 = -m_1 v_{1,c} \vec{n}_0$. En repassant aux vitesses :

$$\boxed{\vec{v}'_{1,c} = v_{1,c} \vec{n}_0 \quad ; \quad \vec{v}'_{2,c} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1,c} \vec{n}_0} \quad (2.10)$$

comme le représente la figure 2.1. La direction \vec{n}_0 dépend de la loi d'interaction entre les particules qui rentrent en collision et de leur position relative pendant le choc.



FIGURE 2.1 – Collision à deux ou trois dimensions dans le référentiel du centre de masse.

Collision à deux ou trois dimensions dans le référentiel du laboratoire

À partir des formules obtenues dans le référentiel du centre de masse, il est aisé d'exprimer les vitesses finales des deux particules dans le référentiel du laboratoire

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.11)$$

où $v = \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|$ et \vec{n}_0 est la direction de $\vec{v}'_{1,c}$, vitesse de la particule 1 après collision dans le référentiel du centre de masse.

Considérons maintenant le cas particulier où la particule 2 est initialement au repos dans le référentiel du laboratoire, comme montré en figure 2.2. Dans ce cas, il est possible d'exprimer simplement les angles $\theta_1 = (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}'_1})$ et $\theta_2 = (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}'_2})$ entre des vitesses finales \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 des deux particules par rapport à la direction de la vitesse initiale \vec{v}_1 , en fonction de $\chi = (\widehat{\vec{v}_{1,c}, \vec{v}'_{1,c}})$, angle entre $\vec{v}_{1,c}$ et $\vec{v}'_{1,c}$ dans le référentiel du centre de masse. (On suppose dans cette section que les angles θ_1 , θ_2 et χ ne sont pas orientés.)

Pour cela écrivons les impulsions \vec{p}'_1 et \vec{p}'_2 dans le référentiel du laboratoire. À partir des équations (2.11), pour $\vec{v}_2 = 0$ et $v = v_1$, avec $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ la masse réduite, on obtient

$$\vec{p}'_1 = \mu v_1 \vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_2} \mu \vec{v}_1 \quad (2.12)$$

$$\vec{p}'_2 = -\mu v_1 \vec{n}_0 + \mu \vec{v}_1 \quad (2.13)$$

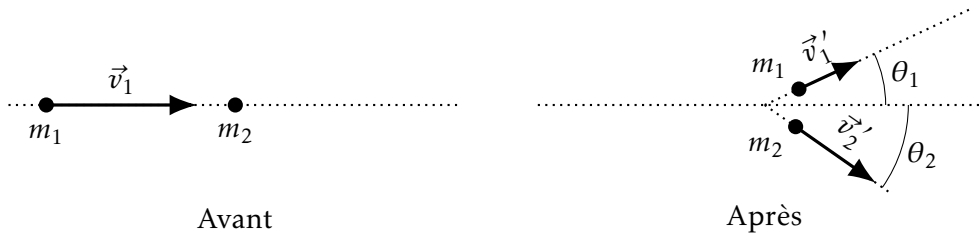


FIGURE 2.2 – Collision à deux dimensions dans le référentiel du laboratoire, dans le cas où la particule 2 est initialement au repos.

On peut alors représenter les vecteurs apparaissant dans ces expressions sur un cercle de centre O et de rayon $R = \mu v_1$ comme dans la figure 2.3, avec

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \mu v_1 \vec{n}_0, & A\vec{O} &= \frac{m_1}{m_2} \mu v_1, & \vec{OB} &= \mu v_1 \\ \vec{p}_1' &= \vec{OC} + A\vec{O} = \vec{AC} & \vec{p}_2' &= -\vec{OC} + \vec{OB} = \vec{CB} \end{aligned}$$

On a donc

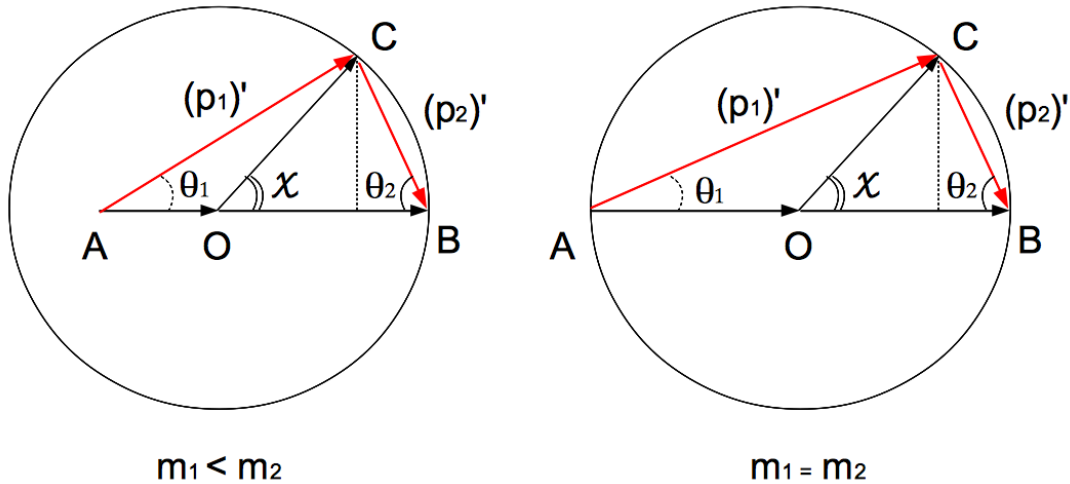


FIGURE 2.3 – Collision à deux dimensions dans le référentiel du laboratoire, dans le cas où la particule 2 est initialement au repos. Construction géométrique permettant d'exprimer les angles θ_1 et θ_2 des vitesses sortantes \vec{v}_1' et \vec{v}_2' , par rapport à la vitesse entrante \vec{v}_1 (voir la figure 2.2). L'angle χ est l'angle entre $\vec{v}_{1,c}$ et $\vec{v}'_{1,c}$ dans le référentiel du centre de masse (voir la figure 2.1).

$$\|\vec{p}_1'\| \sin \theta_1 = \mu v_1 \sin \chi \qquad \|\vec{p}_2'\| \sin \theta_2 = \mu v_1 \sin \chi \qquad (2.14)$$

$$\|\vec{p}_1'\| \cos \theta_1 = \frac{m_1}{m_2} \mu v_1 + \mu v_1 \cos \chi \qquad \|\vec{p}_2'\| \cos \theta_2 = \mu v_1 - \mu v_1 \cos \chi \qquad (2.15)$$

d'où

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \chi} \quad ; \quad \tan \theta_2 = \frac{\sin \chi}{1 - \cos \chi} = \frac{1}{\tan \frac{\chi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (2.16)$$

Dans le cas particulier où $m_1 = m_2$, on obtient :

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2} \quad ; \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.17)$$

Remarquons que l'angle θ_1 est une fonction décroissante de m_1/m_2 . On en déduit que $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ pour $m_1 < m_2$, comme dans la figure 2.3, panneau de gauche, et que $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ pour $m_1 > m_2$.

Pour ceux d'entre vous qui préfèrent l'algèbre à aux raisonnements géométriques, on peut arriver au même résultat (2.17) pour le cas $m_1 = m_2$ directement par le calcul suivant. La conservation de la quantité de mouvement nous permet d'affirmer qu'il existe un vecteur \vec{q} tel que

$$\vec{p}'_1 = \frac{\vec{p}_1}{2} + \vec{q} \quad \vec{p}'_2 = \frac{\vec{p}_1}{2} - \vec{q} \quad (2.18)$$

La conservation de l'énergie cinétique, où l'on a tout multiplié par $2m$, donne

$$p_1^2 + 0^2 = \left(\frac{\vec{p}_1}{2} + \vec{q}\right)^2 + \left(\frac{\vec{p}_1}{2} - \vec{q}\right)^2 = \frac{p_1^2}{2} + 2q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{p_1^2}{4} \quad (2.19)$$

Si on calcule le produit scalaire entre \vec{p}'_1 et \vec{p}'_2 on obtient

$$\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2 = \frac{p_1^2}{4} - q^2 = 0, \quad (2.20)$$

montrant bien que \vec{p}'_1 et \vec{p}'_2 sont orthogonaux.

2.2 Collisions inélastiques : la désintégration

Lors d'une collision inélastique, l'énergie cinétique totale des particules avant et après collision n'est pas la même. Il y a donc eu une conversion entre l'énergie cinétique des particules et une ou plusieurs autres formes d'énergie. Par exemple, lors de la collision d'une voiture contre un mur, l'énergie cinétique de la voiture se convertit en énergie de déformation du métal et en chaleur.

Comme exemple de processus inélastique, nous allons étudier la désintégration spontanée d'une particule en deux particules indépendantes.

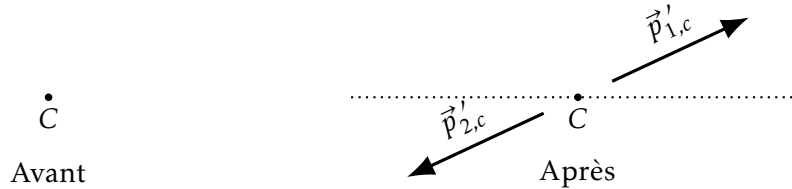


FIGURE 2.4 – Désintégration d'une particule dans le référentiel du centre de masse.

Considérons une particule initialement au repos qui se désintègre en deux parties indépendantes, et plaçons-nous dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_c . Si on appelle encore $\vec{p}'_{1,c}$ et $\vec{p}'_{2,c}$ les quantités de mouvement des particules sortantes, comme en Figure 2.4, et E_{int} l'énergie interne de la particule mère avant désintégration, et $E_{1,\text{int}}$ et $E_{2,\text{int}}$ les énergies internes des particules après désintégration, la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie donnent :

$$\vec{0} = \vec{p}'_{1,c} + \vec{p}'_{2,c} \Rightarrow \vec{p}'_{1,c} = -\vec{p}'_{2,c} \equiv \vec{p}_0 \quad (2.21)$$

$$E_{\text{int}} = E_{1,\text{int}} + E_{2,\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2} \quad (2.22)$$

En introduisant l'énergie de désintégration ϵ ,

$$\epsilon = E_{\text{int}} - (E_{1,\text{int}} + E_{2,\text{int}}) > 0 \quad (2.23)$$

on a les relations simples

$$\epsilon = \frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_0^2}{2\mu} \Rightarrow p_0 = \sqrt{2\mu\epsilon} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.24)$$

et pour les modules des vitesses des deux particules sortantes,

$$v'_{1,c} = \frac{p_0}{m_1} \quad v'_{2,c} = \frac{p_0}{m_2} \quad (2.25)$$

2.3 Diffusion de particules

2.3.1 Diffusion par un potentiel $U(r)$

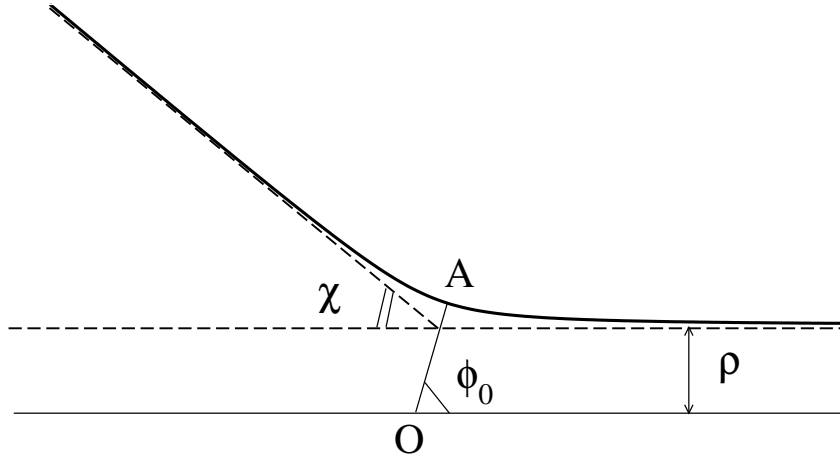


FIGURE 2.5 – Diffusion d’une particule sur un centre de force immobile O . La particule viens de la droite, avec une vitesse initiale parallèle à l’axe des x . ρ est la distance de visée et χ est l’angle de déviation.

Nous considérons dans cette section la diffusion d’une particule de masse m dans un potentiel central $U(r)$, le centre de force étant immobile en O comme en figure 2.5. Nous appelons A le point de la trajectoire le plus proche du centre, et ϕ_0 l’angle formé par $[OA)$ et chacun des deux asymptotes de l’orbite, l’orbite étant symétrique par rapport à la droite (OA) . Comme le montre la discussion en section 1.2.1 sur les mouvements a force centrale, la trajectoire de la particule est symétrique par rapport au point le plus proche du centre. L’angle de déflexion de la particule sera appelé χ et on a

$$\chi = \pi - 2\phi_0 \quad (2.26)$$

Comme nous l’avons vu au chapitre précédent pour le mouvement d’une particule dans un champ de force central, l’angle ϕ_0 s’exprime en termes d’une intégrale radiale. En particulier il faut utiliser l’équation (1.20) où $\phi_0 = \Delta\theta/2$ et où l’on remplace μ par m et r_{\max} par l’infini

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (2.27)$$

On rappelle que r_{\min} annule l’expression sous la racine au dénominateur. On peut re-exprimer l’intégrale en (2.27) en utilisant comme constantes, au lieu de E et L , la vitesse à l’infini de la particule v_{∞} et la distance de visée ρ , les constantes E et L étant liés à v_{∞} et ρ par

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 \quad (2.28)$$

$$L = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = \rho mv_{\infty} \quad (2.29)$$

On obtient alors :

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}} \quad (2.30)$$

L'angle de déflexion χ est ensuite déduit de l'équation (2.26).

2.3.2 Section efficace différentielle de diffusion

Considérons maintenant un faisceau de particules identiques qui vont vers le centre de force O avec la même vitesse v_{∞} et des paramètres de visée ρ différents. Posons n le courant incident de particules, c'est-à-dire le nombre de particules qui traversent l'unité de surface d'une section droite de faisceau par unité de temps. (Autrement dit, pendant un temps dt , un élément de surface dS perpendiculaire à la trajectoire est traversé par $n dS dt$ particules. Le courant n s'exprime donc en $m^{-2} \cdot s^{-1}$.)

Les particules, ayant des paramètres de visée ρ différents, sont défléchies sous différents angles, et nous notons dN le nombre de particules diffusées par unité de temps avec un angle de déflexion compris entre χ et $\chi + d\chi$. La quantité dN s'exprime donc en s^{-1} . Comme dN est proportionnel au flux incident de particules, on introduit le rapport

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \quad (2.31)$$

où $d\sigma$ a la dimension d'une surface et s'appelle *section efficace différentielle de diffusion*. Considérons le cas simple où l'angle $\chi = \chi(\rho)$ est une fonction strictement décroissante donc admettant une fonction réciproque : plus le paramètre de visée est grand, plus l'angle de déflexion est petit. Dans ce cas, les particules qui sont diffusées dans l'intervalle $[\chi, \chi + d\chi]$ sont celles pour lesquelles ρ est dans l'intervalle $[\rho(\chi) + d\rho(\chi), \rho(\chi)]$, où $\rho(\chi)$ est la fonction réciproque de $\chi(\rho)$ et où $d\rho(\chi) = \frac{d\rho}{d\chi} d\chi < 0$ puisqu'on a supposé $\chi(\rho)$ décroissante. On a donc :

$$dN = n \times 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi \quad (2.32)$$

Par comparaison de (2.31) et de (2.32), on déduit l'expression de la section efficace différentielle de diffusion

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi \quad (2.33)$$

Le plus souvent, on rapporte la section efficace différentielle de diffusion à un élément d'angle solide $d\Omega$ plutôt qu'à un élément d'angle plan $d\chi$, comme représenté en figure 2.6

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi \quad (2.34)$$

On a alors

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega \quad (2.35)$$

L'interprétation géométrique de la section efficace différentielle est alors la suivante : $d\sigma$ est la mesure de la surface perpendiculaire au flux incident dans laquelle doit passer les particules incidentes pour être déviées dans l'angle solide $d\Omega$, dans la direction χ .

2.3.3 Diffusion de Rutherford

Dans le cas particulier d'une particule chargée dans un potentiel de Coulomb

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (2.36)$$

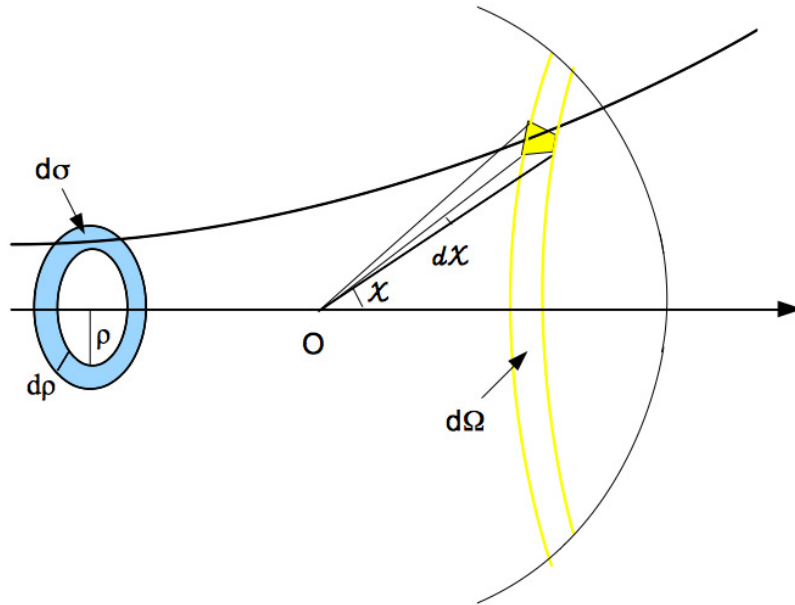


FIGURE 2.6 – Section efficace différentielle de diffusion d'une particule sur un centre de force immobile O .

(répulsif si $\alpha > 0$ ou attractif si $\alpha < 0$), on peut calculer l'intégrale (2.30) pour obtenir²

$$\phi_0 = \arccos \left(\frac{\frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}\right)^2}} \right) \quad (2.38)$$

ou, plus simplement,

$$\boxed{\phi_0 = \arctan \frac{m\rho v_\infty^2}{\alpha}} \quad (2.39)$$

comme on peut le voir à partir du dessin de la figure 2.7

Nous pouvons maintenant calculer la section efficace différentielle de diffusion (2.33) ou (2.35). À partir de l'équation (2.39) et de la relation

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan \phi_0 = \cotan \frac{\chi}{2} \quad (2.40)$$

2. On complète le carré sous la racine au dénominateur

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{r m v_\infty^2}}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}\right)^2}}$$

On pose

$$x = \frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}, \quad x_{\min}^2 = 1 + \left(\frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}\right)^2$$

Cette notation se justifie par le fait que r_{\min} a été définie comme la valeur de r pour laquelle le dénominateur s'annule. Donc, lorsque $r = r_{\min}$, on a $x = x_{\min}$. On fait maintenant le changement de variable $r \rightarrow x$, puis le changement $x \rightarrow y = x/x_{\min}$:

$$\phi_0 = \int_{\frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}}^{x_{\min}} \frac{dx}{\sqrt{x_{\min}^2 - x^2}} = \int_{\frac{1}{x_{\min}} \frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = -\arccos(1) + \arccos\left(\frac{1}{x_{\min}} \frac{\alpha}{m\rho v_\infty^2}\right). \quad (2.37)$$

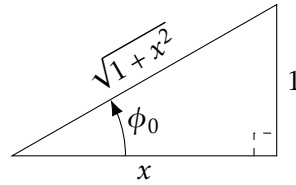


FIGURE 2.7 – Sur la figure, on a $\cos \phi_0 = x/\sqrt{1+x^2}$ et $\tan \phi_0 = 1/x$. On en déduit que $\phi_0 = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan \frac{1}{x}$.

on obtient

$$\tan^2 \phi_0 = \frac{m^2 v_\infty^4}{\alpha^2} \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \cotan^2 \frac{\chi}{2} \quad (2.41)$$

qui différenciée donne³ en fonction de $d\chi$:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \quad (2.42)$$

et en fonction de $d\Omega$:

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi = 4\pi \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d\chi \quad (2.43)$$

on obtient

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (2.44)$$

2.3.4 Diffusion aux petits angles

Dans cette section, on ne suppose plus que $U(r) = \alpha/r$, on considère à nouveau le cas général. Nous considérons ici le cas où la distance de visée ρ est grande, le potentiel $U(r)$ est

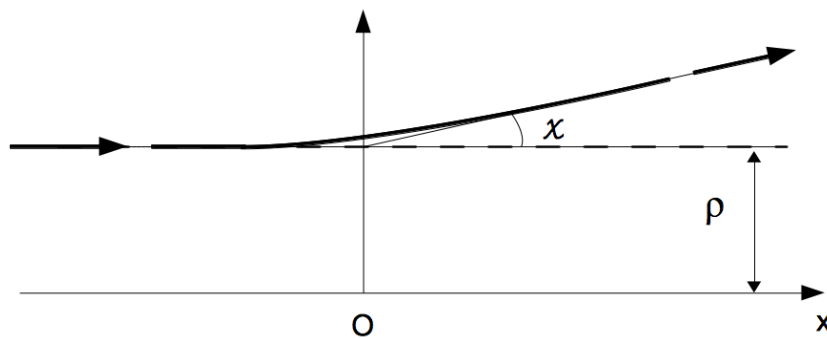


FIGURE 2.8 – Diffusion à petits angles d'une particule sur un potentiel central $U(r)$ de centre de force immobile O . Au premier ordre, on calcule l'effet du potentiel diffuseur sur la trajectoire non perturbée de la particule.

faible, et par conséquent les angles de déflexion sont petits. La particule de masse m vient de

3. On rappelle la relation

$$\frac{d}{dx} \cotan x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

la gauche avec un paramètre de visée ρ et une quantité de mouvement \vec{p} parallèle à l'axe des x :

$$\vec{p} = p\vec{e}_x \quad \text{avec} \quad p = mv_\infty \quad (2.45)$$

À cause du potentiel diffuseur, sa trajectoire est légèrement déviée si bien qu'après collision la quantité de mouvement de particule \vec{p}' a une petite composante selon y (on suppose que la collision a lieu dans le plan xy). On se rappelle que (par conservation de l'énergie) $\|\vec{p}\| = \|\vec{p}'\| = p = mv_\infty$ et on obtient

$$\vec{p}' = p'_x\vec{e}_x + p'_y\vec{e}_y \quad \text{avec} \quad p'_y = p \sin \chi \simeq p\chi \quad \Rightarrow \quad \chi \simeq \frac{p'_y}{mv_\infty}. \quad (2.46)$$

De l'équation de Newton on déduit

$$\dot{p}_y = F_y \quad \Rightarrow \quad p'_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y(t) dt \quad (2.47)$$

et on a par ailleurs⁴

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{dr}{dy} = -\frac{dU}{dr} \frac{y}{r} \quad (2.48)$$

Pour évaluer l'intégrale (2.47) au premier ordre en U , nous approchons la trajectoire réelle dans (2.48) par la trajectoire non perturbée de la particule

$$y \simeq \rho \quad ; \quad v_x \simeq v_\infty \quad \Rightarrow \quad dt \simeq \frac{dx}{v_\infty} \quad (2.49)$$

d'où

$$p'_y \simeq -\frac{\rho}{v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dx}{r} = -2\frac{\rho}{v_\infty} \int_0^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dx}{r} \quad (2.50)$$

Or, en changeant de variable de x à r , avec

$$r^2 = x^2 + \rho^2 \quad ; \quad x = \sqrt{r^2 - \rho^2} \quad ; \quad dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (2.51)$$

on obtient

$$\chi \simeq -\frac{2\rho}{mv_\infty^2} \int_\rho^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (2.52)$$

Qui donne l'angle de déflexion dans la limite des petits angles.

2.3.5 Section efficace à petits angles pour un potentiel $U = \alpha r^{-n}$

Considérons la diffusion à petits angles sur un potentiel de la forme

$$U = \frac{\alpha}{r^n} \quad n > 0 \quad (2.53)$$

À l'aide de l'équation (2.52) on obtient directement

$$\chi = \frac{2\rho\alpha n}{mv_\infty^2} \int_\rho^\infty \frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (2.54)$$

ensuite on change de variable en introduisant u

$$u = \frac{\rho^2}{r^2} \quad ; \quad du = -2\rho^2 \frac{dr}{r^3} \quad (2.55)$$

4. On utilise $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour obtenir $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$.

on obtient

$$\chi = \frac{\alpha n}{mv_\infty^2 \rho^n} \int_0^1 \frac{u^{\frac{n-1}{2}} du}{\sqrt{1-u}} \quad (2.56)$$

L'intégrale (2.56) est une intégrale d'Euler de première espèce $B(x, y)$ qui s'exprime en termes de la fonction Γ d'Euler comme suit

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.57)$$

La fonction Γ est une généralisation à tous les réels de la factorielle : si z est un entier positif, alors $\Gamma(z) = (z-1)! = 1 \times 2 \times \dots \times (z-1)$. Pour nous $x = \frac{n+1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. Sachant que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.58)$$

on a donc

$$\chi = \frac{\mathcal{A}}{\rho^n} \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{mv_\infty^2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (2.59)$$

Le rapport $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ vaut $\Gamma(1)/\Gamma(1/2) = 1/\sqrt{\pi}$ pour $n = 1$, et $\Gamma(3/2)/\Gamma(1) = \sqrt{\pi}/2$ pour $n = 2$, et $\Gamma(2)/\Gamma(3/2) = 2/\sqrt{\pi}$ pour $n = 3$, etc. La section efficace différentielle de diffusion est donnée par l'équation (2.35) avec $\sin \chi \simeq \chi$

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega \quad (2.60)$$

pour notre cas, avec la relation (2.59), on obtient

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{n} \mathcal{A}^{\frac{2}{n}} \chi^{-2(1+\frac{1}{n})} d\Omega} \quad (2.61)$$

Nous terminons avec la remarque troublante que, pour un potentiel non à support compact, la section efficace totale de diffusion, obtenue en intégrant la section efficace différentielle $d\sigma$ sur l'angle solide $d\Omega$, diverge à cause des petits angles $\chi \rightarrow 0$.

Ceci se comprend à partir de l'interprétation géométrique de la section efficace : σ est la mesure de la surface perpendiculaire au flux incident dans laquelle doit passer les particules incidentes pour être déviées dans une direction quelconque. Or, en mécanique classique, pour un potentiel qui n'est pas à support compact, la déviation χ est non nulle même si ρ est très grand, et donc σ est infini.

Chapitre 3

Équations de Lagrange

Dans le formalisme lagrangien, les équations du mouvement, qui prennent une forme très élégante et compacte, résultent de la minimisation d'une quantité, l'*action*, par une approche variationnelle. Ce formalisme, qui se révèle fructueux dans de nombreux domaines de la physique dont la théorie quantique des champs et la relativité, est aussi précieux en mécanique car il permet d'absorber toutes les contraintes mécaniques d'un système dans un choix opportun de coordonnées indépendantes. Enfin, comme nous le verrons, les équations de Lagrange ont la propriété remarquable de garder la même forme par changement de systèmes de coordonnées.

3.1 Coordonnées généralisées

Dans un système mécanique, le nombre de quantités scalaires (longueurs et angles, principalement) qu'il faut préciser pour caractériser entièrement la position d'un système est le *nombre de degrés de liberté*. Par exemple, un point matériel dans l'espace a trois degrés de liberté, qui peuvent être (x, y, z) ou (r, θ, ϕ) ou (ρ, z, ϕ) ou autre. Un solide indéformable en a six parce qu'il faut préciser, en plus de sa position, son orientation.

Considérons un système à s degrés de liberté, où la position du système est déterminée de façon univoque par s grandeurs dites *coordonnées généralisées* q_1, q_2, \dots, q_s , que nous allons noter globalement avec une seule lettre q

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (3.1)$$

Si par exemple notre système est constitué de N points matériels, nous avons :

$$q = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad \text{et} \quad s = 3N \quad (3.2)$$

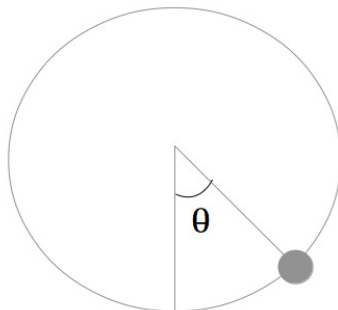


FIGURE 3.1 – Pendule simple.

Si, autre exemple, notre système est un pendule constitué d'un point matériel de masse m qui bouge sur un cercle de rayon fixé comme dans la figure, nous aurons :

$$q \equiv \theta \quad \text{et} \quad s = 1 \quad (3.3)$$

Bien que la position du système soit entièrement déterminée par les coordonnées q à un temps donné, son *état mécanique* ne l'est pas. Nous voulons dire par là que la connaissance de q au temps t ne suffit pas à déterminer la position du système à des temps successifs $t' > t$. L'état mécanique du système est par contre déterminé si l'on connaît l'ensemble des *coordonnées généralisées* q et des *vitesse généralisées* \dot{q} :

$$\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) = \left(\frac{dq_1(t)}{dt}, \frac{dq_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dq_s(t)}{dt} \right) \quad (3.4)$$

où la notation $\dot{f} = \frac{df(t)}{dt}$ indique la dérivée temporelle. Ceci est une conséquence du fait que les accélérations \ddot{q} à un instant t sont complètement déterminées par les q et les \dot{q} au même instant, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ telles que

$$\ddot{q}(t) = f(q(t), \dot{q}(t)) \quad (3.5)$$

(Cette notation signifiant $\ddot{q}_i(t) = f_i(q(t), \dot{q}(t)) = f_i(q_1(t), \dots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t))$ pour $i = 1, \dots, s$. Il y a donc s fonctions f_i qui dépendent chacune de $2s$ variables.) On voit bien que dans ce cas, à partir de $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ nous pouvons calculer $q(t + dt)$ et $\dot{q}(t + dt)$ par intégration infinitésimale :

$$q(t + dt) = q(t) + \dot{q}(t) dt \quad (3.6)$$

$$\dot{q}(t + dt) = \dot{q}(t) + f(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (3.7)$$

et ainsi de suite, pour déterminer les équations du mouvement à partir d'une condition initiale $q(0), \dot{q}(0)$. Les relations (3.5) qui associent les accélérations aux coordonnées et aux vitesses, sont appelées les *équations du mouvement*. Il s'agit d'équations différentielles du second ordre en les $q(t)$. Dans le cas de N particules en coordonnées cartésiennes (3.2), les $3N$ équations (3.5) sont les N équations de Newton (une équation par particule) projetées sur les axes x, y et z

$$\ddot{x}_1 = f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) \quad \text{où} \quad f_1 = \frac{F_{1x}}{m_1} \quad (3.8)$$

$$\ddot{y}_1 = f_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) \quad \text{où} \quad f_2 = \frac{F_{1y}}{m_1} \quad (3.9)$$

⋮

$$\ddot{z}_N = f_{3N}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) \quad \text{où} \quad f_{3N} = \frac{F_{Nz}}{m_N} \quad (3.10)$$

où la force agissant sur la particule i ($i = 1, \dots, N$) est $\vec{F}_i = F_{i,x}\vec{e}_x + F_{i,y}\vec{e}_y + F_{i,z}\vec{e}_z$. Cette force dépend *a priori* des positions et éventuellement des vitesses de toutes les particules.

3.2 Principe de moindre action

Selon le *principe de moindre action*, tout système mécanique est caractérisé par une fonction $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ des coordonnées, des vitesses et du temps, telle que, si l'on considère la trajectoire du système entre deux instants t_1 et t_2 où les positions du système $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ sont fixées, l'intégrale

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.11)$$

est minimale. La fonction \mathcal{L} s'appelle *Lagrangien*, et \mathcal{S} donnée par l'intégrale (3.11) *action*.

Attention, on change ici de point de vue : quand on résout les équations du mouvement de Newton, on est habituellement intéressé par la question suivante : étant données les positions $q^{(1)}$ et les vitesses $\dot{q}^{(1)}$ à l'instant initial t_1 , quelle est la trajectoire ? En particulier, où se trouve le

système à l'instant t_2 ? Dans le cadre du principe de moindre action, on cherche la trajectoire en se donnant les positions initiale $q^{(1)}$ et finale $q^{(2)}$. En particulier, on trouvera la vitesse initiale.

Établissons maintenant les équations du mouvement à partir de ce principe. Pour simplifier nous allons considérer d'abord un système à un seul degré de liberté, si bien que la position du système est caractérisée par la valeur d'une seule coordonnée q . Soit $q(t)$ la fonction qui rend \mathcal{S} minimale. Cela implique que si l'on remplace $q(t)$ par une fonction de la forme

$$q(t) + \delta q(t) \quad (3.12)$$

où $\delta q(t)$ est une petite variation non-nulle, l'intégrale (3.11) croît. Nous allons calculer la variation $\delta \mathcal{S}$ de \mathcal{S} induite par une variation $\delta q(t)$ de $q(t)$ que l'on suppose petite. Notons cependant que, puisque la position du système aux temps $t = t_1$ et $t = t_2$ est imposée, nous devons prendre des variations $\delta q(t)$ qui s'annulent au bord de l'intervalle de temps considéré

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (3.13)$$

Le changement de l'action \mathcal{S} , lorsqu'on remplace $q(t)$ par $q(t) + \delta q(t)$, est donné par

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.14)$$

Le fait que (3.11) soit minimal pour $q = q(t)$ implique que la différence (3.14) est nulle au premier ordre en $\delta q(t)$ pour toute variation $\delta q(t)$ qui respecte la relation (3.13). En indiquant $\delta \mathcal{S}$ la variation de \mathcal{S} au premier ordre, on a donc :

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (3.15)$$

On remarque que

$$\delta \dot{q} \equiv \frac{d}{dt}(q(t) + \delta q(t)) - \frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}\delta q(t) \quad (3.16)$$

et on intègre un terme dans (3.15) par parties :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (3.17)$$

Grâce à la condition (3.13), le terme tout intégré dans (3.17) est nul. On obtient alors

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (3.18)$$

L'annulation de $\delta \mathcal{S}$ pour toute variation δq entraîne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (3.19)$$

Faisons attention à la signification de cette formule. \mathcal{L} est une fonction de trois variables q , \dot{q} et t . Les dérivées partielles $\partial \mathcal{L} / \partial q$ et $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ sont aussi des fonctions des trois variables q , \dot{q} et t . Pour chaque valeur de t , on évalue ces fonctions avec q la position $q(t)$ du système au temps t , \dot{q} sa vitesse $\dot{q}(t)$ au temps t et, bien sûr t . Dit autrement, on a écrit $\partial \mathcal{L} / \partial q$ comme un raccourci de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t)$, et idem pour $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$. Du coup, dans l'expression (3.19), $\partial \mathcal{L} / \partial q$ et $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ sont maintenant deux fonctions du temps. On peut donc dériver par rapport au temps, et écrire une égalité.

Les notations sont une difficulté de ce sujet : L'écriture \dot{q} est parfois la dérivée temporelle de la trajectoire $q(t)$, et parfois le nom de la deuxième variable de \mathcal{L} . Quand on écrit \mathcal{L} , on veut

parfois dire la fonction de trois variables (q, \dot{q} et t), et parfois la fonction du temps $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$ que l'on obtient en appliquant cette fonction aux trois variables $q(t), \dot{q}(t)$ et t .

S'il y a plusieurs degrés de liberté, les s fonctions q_s doivent pouvoir varier indépendamment, et on obtient alors s équations pour $j = 1, 2, \dots, s$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}} \quad (3.20)$$

qui représentent les équations du mouvement recherchées. On appelle les (3.20) les équations de Lagrange. Remarquons que les équations ont la même forme, quel que soit le type de coordonnées que l'on utilise : q_j peut être une longueur, un angle, etc., l'équation de Lagrange associée à une coordonnée q_j donnée garde toujours la même forme.

Remarquons enfin que le rajout à \mathcal{L} de la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction $f(q, t)$ des coordonnées et du temps ne change l'action \mathcal{S} que d'une quantité dont la variation est nulle, et donc ne change pas les équations du mouvement. On a en effet :

$$\mathcal{S}' = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + f(q^{(2)}, t) - f(q^{(1)}, t) \quad (3.21)$$

ce qui montre que $\delta \mathcal{S}' = \delta \mathcal{S}$. Dans l'écriture ci-dessus, q et \dot{q} sont en fait $q(t)$ et $\dot{q}(t)$. Il faut s'habituer à ce genre de raccourcis. De même, la multiplication de \mathcal{L} par une constante change l'action, mais ne change pas les équations du mouvement.

3.3 Lagrangien d'une particule libre

Considérons le cas d'une particule libre. On a dans ce cas

$$q = (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z) \quad (3.22)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes de la particule. Nous savons que dans un référentiel galiléen les équations du mouvement de la particule libre sont

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \quad (3.23)$$

$$m\ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \quad (3.24)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 \quad (3.25)$$

par comparaison avec (3.20), on voit qu'on peut prendre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

ce qui correspond à un Lagrangien pour une particule libre de la forme¹

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2} \quad \text{avec} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (3.27)$$

Le fait que le Lagrangien soit une fonction du module v de la vitesse de la particule reflète l'isotropie de l'espace. Le fait qu'elle ne dépende pas des coordonnées ni du temps reflète le fait que l'espace est homogène et le temps uniforme. Autrement dit, en l'absence de potentiel extérieur sur la particule (elle est libre), les équations du mouvement ne peuvent pas dépendre de l'endroit où la particule se trouve, de la direction selon laquelle elle avance, ni du temps auquel on regarde.

1. En tant que dérivée totale d'une fonction du temps, la constante d'intégration peut être omise.

3.3.1 Exemple : géodésique sur la sphère

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré une particule libre dans l'espace à trois dimensions. L'utilisation des coordonnées cartésiennes est naturelle dans ce cas. Considérons maintenant une particule toujours libre, dans le sens qu'elle n'est pas soumise à un potentiel extérieur, mais qui vit en dimension deux sur une sphère. Pour écrire le Lagrangien, nous devons dans ce cas exprimer v^2 , le carré de la vitesse, à l'aide de coordonnées angulaires (θ, φ) sur la sphère, c'est-à-dire en coordonnées sphériques. Pour cela, on remarque que

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{(dl)^2}{(dt)^2} \quad (3.28)$$

Il suffit donc d'exprimer la longueur de l'élément d'arc dl dans le système de coordonnées correspondant. Pour un point M sur la sphère de centre O et de rayon R , nous avons

$$d\overrightarrow{OM} = R d\theta \vec{u}_\theta + R \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad (3.29)$$

donc

$$(dl)^2 = d\overrightarrow{OM} \cdot d\overrightarrow{OM} = R^2 (d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \quad (3.30)$$

et

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (3.31)$$

Une chose remarquable est que dans n'importe quel système de coordonnées, les équations du mouvement gardent la même forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad (3.32)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad (3.33)$$

Si nous fixons deux points A et B sur la sphère donnant la position de la particule à deux temps

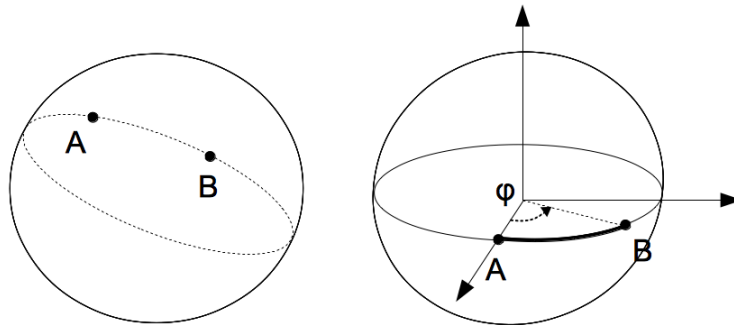


FIGURE 3.2 – Selon les équations de Lagrange, une particule libre sur une sphère va d'un point A à un point B de la sphère en suivant une géodésique.

t_1 et t_2 respectivement, nous pouvons montrer que d'après les équations de Lagrange (3.32)-(3.33) la particule parcourt l'arc de grand cercle qui lie les deux points à vitesse angulaire constante. À cette fin, remarquons que l'on peut toujours orienter le repère des coordonnées sphériques de sorte que les deux points A et B se trouvent tous les deux sur l'équateur avec $\theta_A = \theta_B = \pi/2$, comme indiqué en figure 3.2. Les équations du mouvement (3.32)-(3.33) donnent :

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \quad (3.35)$$

On voit facilement que

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \varphi(t) = \varphi_A + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad (3.36)$$

est une solution des équations (3.34)-(3.35) qui respecte les conditions aux limites². Dans la solution (3.36) qui minimise l'action (3.11), la particule suit la géodésique (la courbe la plus courte) qui relie les deux points avec une vitesse angulaire constante.

3.3.2 Exercice : solution des équations du mouvement sur la sphère

Dans cet exercice, nous allons résoudre en général les équations (3.34)-(3.35) pour trouver toutes les solutions compatibles avec les conditions aux limites suivantes pour les temps $t_1 = 0$ et $t_2 = t_f$:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(t_f) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \varphi(t_f) = \varphi_B \quad (3.37)$$

Pour simplifier, on prendra $m = 1, R = 1$.

- **Quantités conservées**

Pour commencer remarquons que, puisque la particule est libre, l'énergie mécanique (ici seulement cinétique) donnée par l'équation (3.31) est une quantité conservée

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (3.38)$$

(C'est le sujet du chapitre suivant, mais on peut le vérifier directement en dérivant cette quantité par rapport au temps et en utilisant les équations de Lagrange.) Ensuite, l'équation (3.35) nous indique une deuxième quantité conservée,

$$L_z = \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad (3.39)$$

qui, comme nous le verrons plus tard, est la composante selon z du moment cinétique.

- **La variable $u = \cos(\theta)$ évolue comme la position d'un oscillateur harmonique**

En utilisant (3.39) pour exprimer $\dot{\varphi}$ en fonction de L_z et de θ , et en remplaçant le résultat dans (3.38), on obtient

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad \Rightarrow \quad E \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + L_z^2) \quad (3.40)$$

Changeons maintenant de variable, de θ à $u = \cos \theta$:

$$u = \cos \theta \quad ; \quad du = -\sin \theta d\theta \quad ; \quad \dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.41)$$

En introduisant $\tilde{E} \equiv E - \frac{L_z^2}{2}$ et $\omega \equiv \sqrt{2E}$, l'équation (3.40) prend la forme

$$E(1 - u^2) = \frac{1}{2} (\dot{u}^2 + L_z^2) \quad \Rightarrow \quad \tilde{E} = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 u^2, \quad (3.42)$$

donnant formellement l'énergie \tilde{E} d'un oscillateur harmonique de pulsation ω . Comme montré en figure 3.3, la coordonnée u effectue un mouvement harmonique à la pulsation ω , dont l'amplitude dépend de l'énergie \tilde{E} .

2. Par contre, on se convainc facilement que (3.36) n'est pas la seule solution des équations du mouvement compatible avec les conditions aux limites. En effet, le fait de fixer les points et les temps de départ et d'arrivée sur la sphère ne détermine pas la trajectoire de façon univoque. Selon la valeur de la vitesse initiale, on pourrait par exemple faire le tour long, c'est-à-dire parcourir $2\pi - \varphi$ au lieu de φ , ou même faire plusieurs tours avant d'atteindre le point B . La solution complète des équations du mouvement est abordée dans l'exercice facultatif suivant.

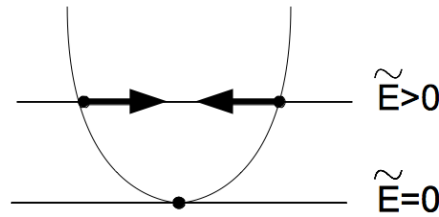


FIGURE 3.3 – La coordonnée u effectue un mouvement harmonique à la pulsation ω . L'amplitude du mouvement dépend de l'énergie \tilde{E} .

• **Solutions pour $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ dans le cas $\tilde{E} = 0$ où l'oscillateur est au repos.**

Considérons le cas $\tilde{E} = 0$ correspondant à $E = \frac{L_z^2}{2}$, où l'oscillateur effectif représenté en figure 3.3 est au repos au fond du puits de potentiel. On a dans ce cas $\dot{u} = 0$ et donc, pour satisfaire aux conditions aux limites, $\theta = 0$ avec $\theta = \pi/2$. L'équation (3.35) nous dit alors que $\dot{\varphi}$ est constante. La solution des équations (3.34) et (3.35) satisfaisant aux conditions aux limites (3.37) est alors

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \varphi(t) = \left(\frac{\varphi_B + 2\pi n}{t_f} \right) t \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (3.43)$$

La solution (3.36) représentée en figure 3.2 correspond à $n = 0$.

• **Solutions pour $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ dans le cas $\tilde{E} > 0$ où la variable $u = \cos(\theta)$ oscille.**

Considérons maintenant le cas $\tilde{E} > 0$ correspondant à $E > \frac{L_z^2}{2}$. La solution générale pour le mouvement harmonique de la variable u est dans ce cas

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.44)$$

Les conditions (3.37) en $t = 0$ imposent $u(0) = 0$ donc $A = 0$. On a donc

$$u = B \sin(\omega t) \quad ; \quad \dot{u} = -\omega B \cos(\omega t) \quad (3.45)$$

La conservation de l'énergie \tilde{E} pour $t = 0$ fixe la valeur de B :

$$\tilde{E} = \frac{\omega^2 B^2}{2} \quad \Rightarrow \quad B^2 = 1 - \frac{L_z^2}{2E} < 1 \quad (3.46)$$

et les conditions (3.37) en $t = t_f$, qui exigent $u(t_f) = 0$, fixent les valeurs possibles de ω :³

$$\omega t_f = n\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{n\pi}{t_f}. \quad (3.47)$$

Si de la variable $u = \cos \theta$ on revient à la variable θ , d'après (3.45) on a donc

$$\theta(t) = \arccos(B \sin \omega t) \quad (3.48)$$

La fonction $\arccos(x)$, lire "arc cosinus", est définie sur l'intervalle $[-1, 1]$. À chaque nombre réel $x \in [-1, 1]$ elle associe l'unique angle $\theta \in [0, \pi]$ dont le cosinus vaut x . Son graphe est représenté en bleu dans la figure 3.4. L'angle θ oscille donc périodiquement entre les valeurs $\arccos(B)$ et $\arccos(-B)$ avec une période $T = 2\pi/\omega$. La condition (3.47) sur ω traduit le fait que, pour que $\theta(t_f)$ reprenne sa valeur initiale $\theta(0) = \pi/2$, il faut que t_f soit un multiple entier de $T/2 = \pi/\omega$ où T est la période de la fonction $\theta(t)$ (3.48).

3. On rappelle qu'on a posé $\tilde{E} \equiv E - \frac{L_z^2}{2}$ et $\omega \equiv \sqrt{2\tilde{E}}$

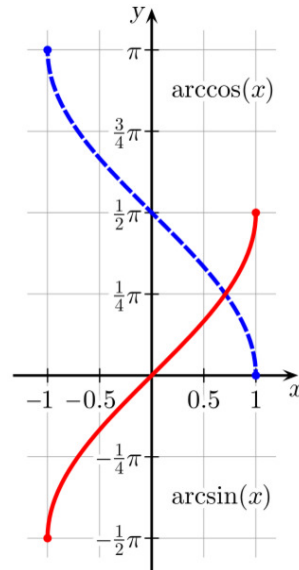


FIGURE 3.4 – Graphe des fonctions $\arccos(x)$ en bleu, et $\arcsin(x)$ en rouge.

Venons-en maintenant à l'angle φ , et voyons s'il est possible de satisfaire à la condition $\varphi(t_f) = \varphi_B$ pour $t_f = n\pi/\omega$. Nous pouvons réécrire l'équation (3.39) comme suit :

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{L_z}{1 - B^2 \sin^2(\omega t)} \quad (3.49)$$

Remarquons d'abord que, comme $\cos \theta \leq 1$, le signe de $\dot{\varphi}$ est constant, donné par le signe de L_z . En appliquant les formules de dérivation, on vérifiera sans difficulté que

$$F(t) = \frac{L_z}{\omega \sqrt{1 - B^2}} \arctan \left[\sqrt{1 - B^2} \tan(\omega t) \right] \quad (3.50)$$

est une primitive de la fonction $f(t) = \frac{L_z}{1 - B^2 \sin^2(\omega t)}$. Tout comme la fonction $\tan(\omega t)$, $F(t)$ est une fonction périodique de période π/ω , continue dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}[$. Pour évaluer l'incrément de $\Delta\varphi$ de la variable φ sur un temps $T/2 = \pi/\omega$ (on rappelle que T est la période de $\theta(t)$) nous pouvons utiliser la primitive $F(t)$, pourvu qu'on choisisse l'intervalle $]-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}[$ où elle est continue.

$$\Delta\varphi_{T/2} = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{dt L_z}{1 - B^2 \sin^2 \omega t} = F\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{\pi}{\omega} \frac{L_z}{\sqrt{1 - B^2}} = \pi \operatorname{signe}(L_z). \quad (3.51)$$

Nous voyons donc que c'est seulement dans les cas où $\varphi_B = \pi$ que la solution avec $\tilde{E} > 0$ (où θ n'est pas constant) peut satisfaire aux conditions aux limites (3.37). Auquel cas (en nous bornant aux solutions qui ne font pas plus d'un tour de la sphère) :

$$\theta(t) = \arccos\left(B \sin \frac{\pi}{t_f} t\right) \quad ; \quad \varphi(t) = F\left(-\frac{t_f}{2} + t\right) - F\left(-\frac{t_f}{2}\right) \quad \text{avec} \quad B = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{L_z t_f}{\pi}\right)^2} \quad (3.52)$$

Nous voyons que dans ce cas $\varphi_B = \pi$, il y a une infinité de solutions, paramétrées par L_z , qui correspondent aux demi-tours de la sphère pour atteindre le point opposé au point initial suivant l'un des grands cercles qui relient les deux points (voir la figure 3.5).

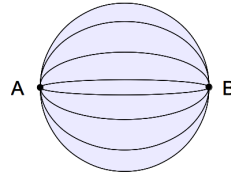


FIGURE 3.5 – Ensemble des solutions (3.52) qui relient deux points A et B opposés.

3.4 Lagrangien d'une particule dans un potentiel extérieur

Si la particule est soumise à un potentiel extérieur dépendant des coordonnées $U(q)$, le Lagrangien prend la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U \quad (3.53)$$

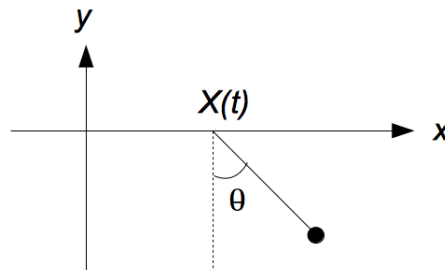
On voit ainsi apparaître un terme de force dans les équations du mouvement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes

$$q = (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z) \quad ; \quad v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \quad (3.54)$$

Comme le potentiel U ne dépend que des coordonnées, les équations prennent la forme habituelle des équations de Newton projetées sur les coordonnées

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.55)$$

3.4.1 Exemple : le pendule au point d'attache mobile

FIGURE 3.6 – Pendule dont le point d'attache bouge horizontalement selon une loi $X(t)$ imposée.

Considérons un pendule, de masse m et de longueur l , dont le point d'attache bouge horizontalement selon une loi $X(t)$ imposée, comme illustré en figure 3.6. Puisque $X(t)$ est une fonction connue du temps, l'angle θ suffit à déterminer complètement la position du pendule. Elle sera notre coordonnée lagrangienne. Exprimons d'abord la position et la vitesse de la masse m en fonction de θ :

$$x = X(t) + l \sin \theta \quad ; \quad \dot{x} = \dot{X}(t) + l\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.56)$$

$$y = -l \cos \theta \quad ; \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.57)$$

On a donc pour l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) \quad (3.58)$$

$$U = -mgl \cos \theta \quad (3.59)$$

Remarquons que le \dot{X}^2 peut être omis du lagrangien puisque c'est une fonction du temps, et donc une dérivée totale par rapport au temps. On obtient donc

$$\mathcal{L} = ml^2 \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{X}}{l} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{g}{l} \cos \theta \right) \quad (3.60)$$

L'équation du mouvement pour θ s'obtient sans difficulté

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\ddot{X}}{l} \cos \theta \quad (3.61)$$

En exercice, le lecteur pourra considérer le cas d'un mouvement du point d'attache uniformément accéléré $X(t) = \frac{1}{2}at^2$, et cherchera dans ce cas les positions d'équilibre du pendule.

3.5 Lagrangien d'un ensemble de particules

Considérons un ensemble de N particules interagissant entre elles mais formant un système isolé, c'est-à-dire qu'elles ne sont soumises à aucune force extérieure. (Mais le formalisme reste le même si on rajoute un potentiel extérieur indépendant du temps.) Le Lagrangien du système prend alors la forme

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad (3.62)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique, somme des énergies cinétiques de chaque particule

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{x}_{\alpha}^2 + \dot{y}_{\alpha}^2 + \dot{z}_{\alpha}^2) \quad (3.63)$$

et le deuxième terme est l'énergie potentielle qui dépend seulement des coordonnées des particules.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \quad (3.64)$$

(Nous considérons ici le cas le plus simple et le plus habituel, où les forces sont conservatives et où le potentiel ne dépend que des coordonnées, et pas des vitesses ni du temps.)

Les $3N$ équations du mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{\alpha}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{\alpha}} \quad (3.65)$$

pour $\alpha = 1, \dots, N$, reproduisent alors les équations de Newton pour chaque particule

$$m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha}} = F_{\alpha x} \quad m_{\alpha} \ddot{y}_{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial y_{\alpha}} = F_{\alpha y} \quad m_{\alpha} \ddot{z}_{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial z_{\alpha}} = F_{\alpha z} \quad (3.66)$$

qui se résument sous la forme vectorielle

$$m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} = -\text{grad}_{\vec{r}_{\alpha}} U = \vec{F}_{\alpha} \quad (3.67)$$

Remarquons que si l'énergie potentielle U dans (3.62) est définie à une constante arbitraire près, ceci n'affecte pas les équations du mouvement⁴. La façon la plus naturelle de choisir la constante dans U est d'imposer que l'énergie potentielle s'annule lorsque la distance entre particules tend vers l'infini.

4. C'est un cas particulier du fait que l'on peut rajouter au Lagrangien la dérivée temporelle d'une fonction sans affecter les équations du mouvement.

3.6 Expression générale du Lagrangien

Si pour décrire le mouvement des points matériels $\alpha = 1, \dots, N$ qui constituent le système physique, au lieu des coordonnées cartésiennes on utilise les coordonnées généralisées :

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (3.68)$$

il faudra exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des q et \dot{q} .

À ce fin, exprimons les coordonnées cartésiennes en fonction des s coordonnées libres $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$

$$x_\alpha = x_\alpha(q) \quad , \quad y_\alpha = y_\alpha(q) \quad , \quad z_\alpha = z_\alpha(q) \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (3.69)$$

En prenant la dérivée temporelle des $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, puis le carré

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{i=1}^s \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad ; \quad \dot{x}_\alpha^2 = \sum_{i,k=1}^s \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad ; \quad \text{etc.} \quad (3.70)$$

nous récrivons l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (3.71)$$

avec

$$a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} + \frac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial q_k} + \frac{\partial z_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial z_\alpha}{\partial q_k} \right) \quad (3.72)$$

Remarquons que les coefficients a_{ik} sont symétriques. Par ailleurs, même sans connaître *a priori* la symétrie des a_{ik} , on voit que seule la composante symétrique des a_{ik} contribue à la somme puisque

$$\sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (3.73)$$

En somme, pour le Lagrangien $L = T - U$, on obtient l'expression générale

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q) \quad (3.74)$$

où l'énergie cinétique est une fonction homogène quadratique des vitesses généralisées \dot{q} , qui peut dépendre des coordonnées q .

3.6.1 Additivité du Lagrangien

Remarquons que le Lagrangien est une grandeur *additive*. Cela veut dire que pour un système composé de deux parties A et B , décrites séparément par deux fonctions de Lagrange \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B , en l'absence d'interaction entre les deux parties, si par exemple on les éloigne suffisamment pour rendre leur interaction négligeable, la fonction de Lagrange du système total tend vers la somme : $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$

$$\mathcal{L}_{A+B} \xrightarrow{|r_A - r_B| \rightarrow \infty} \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B. \quad (3.75)$$

Ceci implique que le système A sera décrit par des variables qui sont indépendantes de celles du système B duquel il serait infiniment éloigné. On peut remarquer que la situation n'est pas la même en mécanique quantique, où pour deux systèmes intriqués même infiniment éloignés, on ne peut pas décrire les deux systèmes localement, de façon indépendante.

Chapitre 4

Lois de conservation

Dans tout ce chapitre, on suppose que \mathcal{L} ne dépend pas explicitement du temps :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

et non $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. Bien sûr, lorsque l'on remplace la variable q par la position $q(t)$ au temps t et la variable \dot{q} par la vitesse $\dot{q}(t)$ au temps t , on obtient la quantité $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ qui dépend encore du temps, mais la dépendance en temps n'est pas explicite, elle vient du fait que la position et la vitesse dépendent du temps.

Pour un système isolé, du fait de l'uniformité du temps, il est automatique que \mathcal{L} ne dépend pas du temps. Les seuls cas où \mathcal{L} peut dépendre du temps, c'est quand le système est soumis à une force extérieure dépendant du temps, comme dans l'exemple du pendule au point d'attache mobile.

4.1 Intégrales du mouvement

Lorsqu'un système est en mouvement, l'ensemble des coordonnées q et des vitesses généralisées \dot{q} dépendent du temps. Il y a cependant des fonctions $F(q, \dot{q})$ qui restent constantes pendant le mouvement, leur valeur étant déterminée par les conditions initiales. Elles sont appelées *intégrales du mouvement*.

Montrons d'abord que pour un système isolé à s degrés de liberté il y a $2s - 1$ intégrales du mouvement indépendantes. Étant donné que les équations de Lagrange (3.20) sont s équations différentielles du second ordre en les $q(t)$, leur solution générale comporte $2s$ constantes arbitraires.

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(t, C_1, \dots, C_{2s}) & \dot{q}_1(t) &= \dot{q}_1(t, C_1, \dots, C_{2s}) \\ & \dots & & \dots \\ q_s(t) &= q_s(t, C_1, \dots, C_{2s}) & \dot{q}_s(t) &= \dot{q}_s(t, C_1, \dots, C_{2s}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ces $2s$ constantes peuvent alors être déterminées par les conditions initiales. Puisqu'on a supposé que les équations ne comportent pas de terme dépendant explicitement du temps, l'une de ces constantes peut être choisie comme une constante additive t_0 du temps, ce qui fixe de fait l'origine des temps. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(t + t_0, C_1, \dots, C_{2s-1}) & \dot{q}_1(t) &= \dot{q}_1(t + t_0, C_1, \dots, C_{2s-1}) \\ & \dots & & \dots \\ q_s(t) &= q_s(t + t_0, C_1, \dots, C_{2s-1}) & \dot{q}_s(t) &= \dot{q}_s(t + t_0, C_1, \dots, C_{2s-1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

On a maintenant $2s$ équations pour $2s$ paramètres qui sont $t + t_0$ et C_1 à C_{2s-1} . En inversant le système, on pourra écrire, pour certaines fonctions F_i ,

$$t + t_0 = F_0(q(t), \dot{q}(t)), \quad C_i = F_i(q(t), \dot{q}(t)) \text{ pour } i = 1, \dots, 2s - 1. \quad (4.3)$$

On ignore la première équation, et l'on voit que $F_i(q(t), \dot{q}(t)), \dots, F_{2s-1}(q(t), \dot{q}(t))$ sont des fonctions des q et \dot{q} qui restent constantes au cours du temps. Ce sont les intégrales du mouvement.

Parmi les intégrales du mouvement, il y en a de très importantes, dont la constance est liée à des propriétés fondamentales de l'espace et du temps. Elles sont des quantités additives, dont la conservation nous permet de déduire des propriétés du mouvement sans intégrer les équations. On en a vu des exemples dans les chapitres précédents, par exemple pour une collision entre deux corps à une dimension, où la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie permettent de déterminer les vitesses de deux corps après la collision, si elles étaient connues avant la collision.

4.2 Uniformité du temps et conservation de l'énergie

Considérons un système fermé à s degrés de liberté. Du fait de l'uniformité du temps, le Lagrangien du système ne dépend pas explicitement du temps. Il s'ensuit que ¹

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (4.4)$$

En utilisant les équations de Lagrange, on peut aussi écrire

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (4.5)$$

d'où l'on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) = 0 \quad (4.6)$$

et finalement

$$\mathcal{H} \equiv \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \text{const.} \quad (4.7)$$

Nous allons maintenant montrer que la constante \mathcal{H} dans (4.7) n'est rien d'autre que l'énergie mécanique du système. Nous rappelons à cette fin l'expression générale du Lagrangien (3.74)

$$\mathcal{L} = E_{\text{cin}}(q, \dot{q}) - U(q) \quad (4.8)$$

où l'énergie cinétique est une fonction quadratique des vitesses généralisées \dot{q} . D'après le théorème d'Euler sur les fonctions de plusieurs variables, une fonction différentiable $f(x_1, \dots, x_s)$ homogène de degré k vérifie l'identité ² :

$$\sum_{i=1}^s x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_s) = k f(x_1, \dots, x_s). \quad (4.9)$$

-
1. Si le Lagrangien dépendait explicitement du temps, il faudrait rajouter un terme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ à l'expression (4.4).
 2. Une fonction est homogène de degré k si elle vérifie :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_s) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_s)$$

Dérivons cette égalité par rapport à λ :

$$\sum_{i=1}^s x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_s) = k \lambda^{k-1} f(x_1, \dots, x_s).$$

Prendre $\lambda = 1$ donne la relation d'Euler.

En appliquant ce théorème à la fonction énergie cinétique :

$$\sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i \frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{q}_i} = 2E_{\text{cin}} \quad (4.10)$$

si bien que

$$\mathcal{H} = E_{\text{cin}}(q, \dot{q}) + U, \quad (4.11)$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N). \quad (4.12)$$

4.3 Homogénéité de l'espace et conservation de l'impulsion

L'homogénéité de l'espace a pour conséquence l'invariance des propriétés mécaniques d'un système lors d'un déplacement parallèle du système entier dans l'espace. Considérons, pour un système fermé de N particules en coordonnées cartésiennes, un déplacement infinitésimal $\vec{\epsilon}$: toutes les positions des points matériels sont alors translatées de la même quantité

$$\vec{r}_{\alpha} \rightarrow \vec{r}_{\alpha} + \vec{\epsilon} \quad (4.13)$$

En imposant le fait que le Lagrangien reste inchangé³, nous trouverons une deuxième loi de conservation. Nous avons,

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{\text{grad}}_{\vec{r}_{\alpha}} \mathcal{L}) \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = \vec{\epsilon} \cdot \sum_{\alpha=1}^N \vec{\text{grad}}_{\vec{r}_{\alpha}} \mathcal{L} = 0 \quad (4.14)$$

Comme l'égalité (4.14) doit valoir pour tout $\vec{\epsilon}$, on déduit que

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{\text{grad}}_{\vec{r}_{\alpha}} \mathcal{L} = \vec{0} \quad (4.15)$$

et donc, en utilisant les équations de Lagrange pour récrire $\vec{\text{grad}}_{\vec{r}_{\alpha}} \mathcal{L} = \frac{d}{dt}(\vec{\text{grad}}_{\vec{v}_{\alpha}} \mathcal{L})$,

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{d}{dt}(\vec{\text{grad}}_{\vec{v}_{\alpha}} \mathcal{L}) = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N \vec{\text{grad}}_{\vec{v}_{\alpha}} \mathcal{L} = \vec{0} \quad (4.16)$$

De l'équation (4.16) on déduit que la quantité vectorielle

$$\vec{P} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \vec{\text{grad}}_{\vec{v}_{\alpha}} \mathcal{L} \quad (4.17)$$

est conservée. Le vecteur \vec{P} , qui d'après l'expression (3.62) s'écrit

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (4.18)$$

3. Strictement parlant, le fait que les équations du mouvement sont inchangées n'implique pas que \mathcal{L} soit inchangé, mais qu'il soit inchangé à une dérivée totale d'une fonction δF des coordonnées et du temps près. Nous allons considérer ici le cas plus simple où le Lagrangien est inchangé par la transformation, et nous donnerons un exemple du cas plus général dans la section 4.7 à la fin du chapitre.

est la quantité de mouvement totale ou impulsion du système. Comme l'énergie, elle est une quantité additive. De plus, contrairement à l'énergie, l'impulsion d'un système est égale à la somme des impulsions des différentes particules qui composent le système,

$$\vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha \quad (4.19)$$

indépendamment du fait que les particules interagissent ou non.

La loi de conservation de l'impulsion n'est valable que sous l'hypothèse d'homogénéité de l'espace, ce qui exclut la présence de forces extérieures agissant sur le système. Certaines composantes de l'impulsion peuvent toutefois être conservées en présence d'une force extérieure, si l'énergie potentielle du système ne dépend pas des coordonnées cartésiennes correspondantes. Par exemple, dans un champ uniforme selon l'axe z (comme dans le champ de pesanteur) les propriétés mécaniques ne sont pas affectées par une translation le long de l'axe x ou y , et les composantes P_x et P_y de l'impulsion sont des quantités conservées. Remarquons enfin que l'égalité (4.15) a une signification physique simple. Puisque

$$\vec{\text{grad}}_{r_\alpha} \mathcal{L} = -\vec{\text{grad}}_{r_\alpha} U = \vec{F}_\alpha \quad (4.20)$$

représente la force agissant sur la particule α , l'égalité (4.15) indique que pour un système fermé la somme des forces sur toutes les particules est nulle :

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha = \vec{0} \quad (4.21)$$

Dans le cas particulier d'un système composé de deux particules seulement, on appelle l'égalité $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ *principe d'action et réaction*. La force \vec{F}_1 exercée sur la particule 1 par la particule 2 est égale en module et opposée à la force \vec{F}_2 , exercée sur la particule 2 par la particule 1.

4.3.1 Impulsions et forces généralisées

Si le mouvement est décrit avec des coordonnées généralisées q_i , les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisée \dot{q}_i

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.22)$$

s'appellent *impulsions généralisées*, et les dérivées par rapport aux q_i

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (4.23)$$

s'appellent *forces généralisées*. Les équations de Lagrange prennent alors la forme simple

$$\dot{p}_i = F_i \quad (4.24)$$

En général, \mathcal{L} est une fonction quadratique des vitesses généralisées \dot{q}_i , les p_i sont alors des fonctions linéaires des \dot{q}_i . Elles sont toutefois différentes des composantes des vecteurs impulsion des particules $\vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha$, sauf dans le cas où les q_i coïncident avec les coordonnées cartésiennes.

4.3.2 Exercice

Une particule de masse m et de quantité de mouvement initiale de module p , passe d'un demi-espace dans lequel son énergie potentielle est constante de valeur U_1 à un demi-espace dans lequel son énergie potentielle est aussi constante, mais de valeur U_2 . Comme en figure

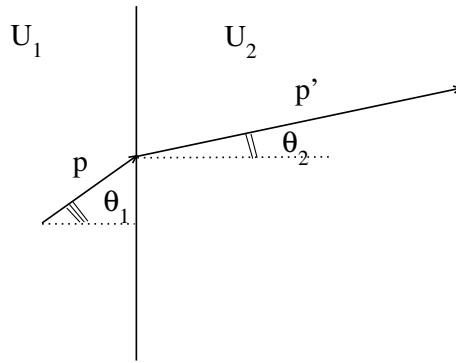


FIGURE 4.1 – Une particule passe d'un demi-espace dans lequel son énergie potentielle vaut U_1 à un demi-espace dans lequel son énergie potentielle vaut U_2 .

4.1, on appelle θ_1 et θ_2 les angles entre la vitesse de la particule et la normale à la surface qui sépare les deux demi-espaces.

Déterminer le changement de direction de la particule lors qu'elle passe d'un demi-plan à l'autre, quantifié par le rapport $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$. Quel est le signe de $U_1 - U_2$ dans le cas représenté en figure 4.1 ? (Indice : quelles sont les quantités conservées ?)

4.4 Référentiel du centre de masse

4.4.1 Transformation de l'impulsion par changement de référentiel galiléen

L'impulsion totale d'un système dépend du référentiel galiléen choisi. Si un système \mathcal{K}' est en mouvement par rapport à \mathcal{K} avec une vitesse \vec{V} , les vitesses \vec{v}_α et \vec{v}'_α des particules dans les deux systèmes sont liées par la relation

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{V} \quad (4.25)$$

On obtient ainsi la loi de transformation de l'impulsion totale :

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{v}'_\alpha + \vec{V} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \quad (4.26)$$

ou

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha} \quad (4.27)$$

4.4.2 Décomposition de l'impulsion à l'aide du référentiel du centre de masse

Pour un système isolé, il est toujours possible de se placer dans un référentiel \mathcal{K}' dans lequel l'impulsion totale est nulle. Par rapport à un référentiel initial \mathcal{K} où les particules ont une vitesse \vec{v}_α , \mathcal{K}' a une vitesse \vec{V} qui se trouve en posant $\vec{P}' = 0$ dans l'équation (4.27)

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \vec{v}_\alpha m_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha} \quad (4.28)$$

La vitesse \vec{V} décrit le mouvement du système dans son ensemble. Elle est liée à l'impulsion par $\vec{P} = M\vec{V}$ où $M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$ est la masse totale du système. Notons que \vec{V} définie par (4.28) est la dérivée de

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha m_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha} \quad (4.29)$$

qui est la coordonnée du centre de masse du système. Par conséquent, $\vec{V} = \vec{v}_c$ est la vitesse du centre de masse, et le référentiel particulier qu'on cherche est le référentiel du centre de masse $\mathcal{K}' = \mathcal{R}_c$.

En choisissant $\mathcal{K}' = \mathcal{R}_c$, l'équation (4.27) devient

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_c} \quad (4.30)$$

où l'on décompose l'impulsion totale du système en l'impulsion \vec{P}' dans le référentiel du centre de masse (qui est nulle) plus l'impulsion du centre de masse $M\vec{v}_c$ qui caractérise le mouvement du système dans son ensemble.

4.4.3 Transformation de l'énergie par changement de référentiel galiléen

De façon similaire, on peut écrire la *loi de transformation de l'énergie* lors qu'on passe d'un référentiel galiléen \mathcal{K} à un référentiel galiléen \mathcal{K}' en mouvement par rapport à \mathcal{K} avec une vitesse \vec{V} . En utilisant (4.25) :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left\| \vec{v}'_{\alpha} + \vec{V} \right\|^2 + U = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}'^2}{2} + \vec{V} \cdot \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{v}'_{\alpha} + \frac{MV^2}{2} + U \quad (4.31)$$

autrement dit,

$$\boxed{E = E' + \vec{V} \cdot \vec{P}' + \frac{MV^2}{2}}. \quad (4.32)$$

Remarquons que l'énergie potentielle U d'interaction entre les particules, qui dépend des coordonnées relatives $\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}$ entre particules, est la même dans les deux référentiels.

4.4.4 Décomposition de l'énergie à l'aide du référentiel du centre de masse

Si \mathcal{K}' est le référentiel du centre de masse, dans lequel le système est au repos, on a $E' = E_{\text{int}}$, où E_{int} est dite l'*énergie interne* du système et $\vec{P}' = 0$. On peut donc toujours écrire

$$\boxed{E = \frac{Mv_c^2}{2} + E_{\text{int}}} \quad (4.33)$$

ce qui revient à décomposer l'énergie du système en une partie liée à son mouvement d'ensemble, et une partie d'énergie interne. C'est le second théorème de König. L'énergie interne E_{int} contient l'énergie cinétique du mouvement relatif des particules et l'énergie potentielle de leur interaction.

4.5 Isotropie de l'espace et conservation du moment cinétique

Montrons maintenant comment la loi de conservation du moment cinétique dérive de l'isotropie de l'espace. Pour cela nous imposons que la fonction de Lagrange ne change pas lorsque le système, supposé isolé, subit une rotation infinitésimale dans son ensemble. C'est en particulier le cas lorsque l'énergie potentielle U ne dépend que des distances $\|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}\|$ entre les particules. Nous commençons par introduire le vecteur de rotation infinitésimale $\delta\vec{\varphi}$ dont le module est égale à l'angle de rotation, et la direction coïncide avec l'axe de rotation (la rotation s'effectuant en sens direct selon la règle de la main droite). On prend un système de coordonnées dont l'origine est sur l'axe de rotation. Sous l'effet de la rotation, le rayon vecteur \vec{r} vers un point quelconque du système se transforme selon la loi $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}$ avec

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r} \quad (4.34)$$

et il en va de même pour les vitesses des particules : $\vec{v} \rightarrow \vec{v} + \delta\vec{v}$ avec

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi} \wedge \vec{v}. \quad (4.35)$$

La condition d'invariance du Lagrangien est

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \left[(\text{grad}_{\vec{r}_\alpha} \mathcal{L}) \cdot \delta\vec{r}_\alpha + (\text{grad}_{\vec{v}_\alpha} \mathcal{L}) \cdot \delta\vec{v}_\alpha \right] = 0 \quad (4.36)$$

si l'on y remplace les expressions (4.34) et (4.35), et on utilise le fait que $\text{grad}_{\vec{v}_\alpha} \mathcal{L} = \vec{p}_\alpha$ et que, grâce aux équations de Lagrange $\text{grad}_{\vec{r}_\alpha} \mathcal{L} = \dot{\vec{p}}_\alpha$, on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^N \left[\dot{\vec{p}}_\alpha \cdot (\delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_\alpha) + \vec{p}_\alpha \cdot (\delta\vec{\varphi} \wedge \vec{v}_\alpha) \right] = 0 \quad (4.37)$$

puis, en permutant circulairement les facteurs pour sortir $\delta\vec{\varphi}$ de la somme,

$$\delta\vec{\varphi} \cdot \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha \wedge \dot{\vec{p}}_\alpha + \vec{v}_\alpha \wedge \vec{p}_\alpha) = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha \wedge \vec{p}_\alpha) = 0. \quad (4.38)$$

Puisque cette relation doit valoir pour un $\delta\vec{\varphi}$ arbitraire, on conclut que

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \wedge \vec{p}_\alpha = \vec{0} \quad (4.39)$$

Il y a donc conservation du vecteur *moment cinétique total* \vec{L} du système

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \wedge \vec{p}_\alpha \quad (4.40)$$

Comme l'impulsion, le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de chaque particule, indépendamment du fait que les particules interagissent ou pas.

Pour résumer, un système fermé (c'est-à-dire non soumis à des forces extérieures) admet sept intégrales du mouvement additives : les trois composantes de l'impulsion totale \vec{P} , les trois composantes du moment cinétique total \vec{L} , et l'énergie. Comme pour l'impulsion, certaines composantes du moment cinétique peuvent être conservées même en présence d'un champ extérieur, si celui-ci présente une symétrie de rotation par rapport à l'axe correspondante. Un exemple important est celui d'un champ central, où l'énergie potentielle dépend seulement de la distance au point O dit le centre des forces. Comme le potentiel présente une symétrie de rotation par rapport à tout axe passant par O , les trois composantes du moment cinétique sont conservées pourvu qu'on définisse le moment cinétique par rapport au point O .

Remarquons enfin que, tout comme

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = P_x \quad ; \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_\alpha} = P_y \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_\alpha} = P_z, \quad (4.41)$$

la projection du moment cinétique sur un axe, s'obtient simplement à partir des dérivées de la fonction de Lagrange par rapport à $\dot{\varphi}_\alpha$, où la coordonnée φ_α est l'angle de rotation autour

de l'axe considéré pour la particule α . Par exemple, si l'on utilise les coordonnées cylindriques $(r_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha)$, dont le lien avec les coordonnées cartésiennes est donné par

$$x_\alpha = r_\alpha \cos \varphi_\alpha \quad (4.42)$$

$$y_\alpha = r_\alpha \sin \varphi_\alpha \quad (4.43)$$

$$z_\alpha = z_\alpha \quad (4.44)$$

le Lagrangien prends la forme

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m}{2} (\dot{x}_\alpha^2 + \dot{y}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) - U = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m}{2} (\dot{r}_\alpha^2 + r_\alpha^2 \dot{\varphi}_\alpha^2 + \dot{z}_\alpha^2) - U, \quad (4.45)$$

et on vérifie facilement que l'expression

$$L_z = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha r_\alpha^2 \dot{\varphi}_\alpha \quad (4.46)$$

coïncide bien avec avec la composante selon z du moment cinétique : $L_z = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (x_\alpha \dot{y}_\alpha - y_\alpha \dot{x}_\alpha)$.

4.5.1 Transformation du moment cinétique par changement de référentiel

Voyons maintenant la *loi de transformation du moment cinétique* suite à un changement de référentiel galiléen. Considérons donc deux référentiels \mathcal{K} et \mathcal{K}' , où \mathcal{K}' est en mouvement par rapport à \mathcal{K} avec une vitesse \vec{V} , et l'origine du repère lié à \mathcal{K}' se trouve en \vec{R} par rapport à l'origine dans \mathcal{K} . En utilisant les relations $\vec{r}_\alpha = \vec{r}'_\alpha + \vec{R}$, et $\vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{V}$,

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{r}'_\alpha + \vec{R}) \wedge \vec{v}'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge \vec{V} \quad (4.47)$$

En introduisant les coordonnées du centre de masse \vec{r}_c , on récrit

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \wedge \vec{P}' + M \vec{r}_c \wedge \vec{V}} \quad (4.48)$$

ce qui donne la forme finale de la loi de transformation recherchée.

4.5.2 Décomposition du moment cinétique à l'aide du référentiel du centre de masse

Si le référentiel \mathcal{K}' est celui dans lequel le système est au repos dans son ensemble (\mathcal{K}' est donc le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_c), on a $\vec{V} = \vec{v}_c$, $\vec{P}' = \vec{0}$ et

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + M \vec{r}_c \wedge \vec{v}_c} \quad (4.49)$$

On peut donc toujours décomposer le moment cinétique d'un système en un *moment cinétique propre* \vec{L}' calculé dans le référentiel du centre de masse, plus un moment $M \vec{r}_c \wedge \vec{v}_c$ lié au mouvement de son centre de masse. C'est le premier théorème de König.

4.6 Similitudes mécaniques et théorème du viriel

4.6.1 Changements d'échelle

Nous avons déjà remarqué à la fin de la section 3.2 que la multiplication de la fonction de Lagrange par une constante ne change pas les équations du mouvement. Nous allons utiliser ce fait pour déduire des propriétés générales du mouvement dans le cas où l'énergie potentielle U du système est une fonction homogène (de degré k) des coordonnées :

$$U(\lambda\vec{r}_1, \lambda\vec{r}_2, \dots, \lambda\vec{r}_N) = \lambda^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N). \quad (4.50)$$

Effectuons une transformation par laquelle toutes les coordonnées sont multipliées par le facteur λ et le temps est multiplié par un facteur β . Toutes les vitesses $\vec{v}_\alpha = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}$ seront multipliées par un facteur λ/β , et l'énergie cinétique par un facteur $(\lambda/\beta)^2$. L'énergie potentielle est pour sa part multipliée par λ^k d'après l'équation (4.50). Or, si λ et β sont liés par la relation

$$\frac{\lambda^2}{\beta^2} = \lambda^k \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \lambda^{1-\frac{k}{2}}, \quad (4.51)$$

suite à la transformation la fonction de Lagrange se retrouve multipliée par un facteur constant, ce qui implique que les équations du mouvement restent inchangées. Cela veut dire que si l'énergie potentielle est une fonction homogène des coordonnées de degré k , les équations du mouvement admettent une infinité de trajectoires géométriquement semblables. Si l'on considère deux de ces trajectoires ayant un rapport l'/l dans leur dimensions linéaires, tous les temps du mouvement (aux points correspondants des deux trajectoires) sont alors dans le rapport

$$\boxed{\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}} \quad (4.52)$$

Prenons l'exemple des petites oscillations que nous traiterons dans le chapitre suivant. Dans ce cas l'énergie potentielle est une fonction homogène quadratique des coordonnées : $k = 2$. La relation (4.52) nous dit alors que pour des petites oscillations la période est indépendante de l'amplitude. Autre exemple, un champ de forces homogène où l'énergie potentielle est une fonction linéaire des coordonnées : $k = 1$, comme pour le champ de pesanteur. La relation (4.52) nous dit alors que dans ce cas que

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}} \quad (4.53)$$

ce qui donne par exemple la loi de variation de la période d'une pendule pesante en fonction de sa longueur. Enfin considérons l'attraction gravitationnelle entre deux masses : $k = -1$. Nous avons dans ce cas

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.54)$$

d'où nous savons que le carré des temps de révolution des corps sur leur orbite sont proportionnels aux cubes des dimensions de l'orbite. C'est la troisième loi de Kepler (1.35).

4.6.2 Théorème du viriel

Pour exposer ce théorème, définissons d'abord la *moyenne temporelle* \bar{f} d'une fonction quelconque du temps $f(t)$:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt. \quad (4.55)$$

On remarquera que si $f(t)$ est la dérivée par rapport au temps d'une fonction $F(t)$ bornée, sa moyenne temporelle est nulle. En effet

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF(t)}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0. \quad (4.56)$$

Considérons maintenant un système physique pour lequel (i) l'énergie potentielle est une fonction homogène de degré k des coordonnées et (ii) le mouvement du système s'effectue dans une région limitée de l'espace. Le *théorème du viriel* nous dit alors que la moyennes temporelles \bar{T} et \bar{U} de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle sont liées par la relation simple

$$\boxed{2\bar{T} = k\bar{U}}. \quad (4.57)$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème.

Puisque l'énergie cinétique T est une fonction homogène quadratique des vitesses \vec{v}_α des particules, le théorème d'Euler (déjà évoqué au début dans la section 4.2 de chapitre) nous dit que

$$\sum_{\alpha=1}^N (\text{grad}_{v_\alpha} T) \cdot \vec{v}_\alpha = 2T \quad (4.58)$$

En introduisant les impulsions

$$\vec{p}_\alpha = \text{grad}_{v_\alpha} T, \quad (4.59)$$

l'équation (4.58) donne

$$2T = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \cdot \dot{\vec{p}}_\alpha. \quad (4.60)$$

Prenons maintenant la moyenne temporelle de cette égalité. Dû au fait que la trajectoire s'effectue dans une région limitée de l'espace, en supposant que les vitesses ne divergent pas, la fonction $F(t) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha$ est bornée, ce qui implique l'annulation de la moyenne temporelle de sa dérivée. Par ailleurs l'équation de Newton nous dit que

$$\dot{\vec{p}}_\alpha = -\text{grad}_{r_\alpha} U \quad (4.61)$$

on obtient ainsi pour la moyenne temporelle

$$2\bar{T} = \overline{\sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \cdot (\text{grad}_{r_\alpha} U)} = k\bar{U} \quad (4.62)$$

où, pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que U est une fonction homogène de degré k .

Puisque $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$, où E est l'énergie mécanique totale, constante pour un système fermé, on peut également écrire le théorème du viriel sous la forme

$$\boxed{\bar{T} = \frac{k}{k+2} E \quad ; \quad \bar{U} = \frac{2}{k+2} E} \quad (4.63)$$

Ci-dessous, deux exemples importants.

- Petites oscillations $k = 2$: $\bar{T} = \bar{U} = \frac{E}{2}$.
- Interaction gravitationnelle $k = -1$: $\bar{T} = -E$, $\bar{U} = 2E$. Ici $E < 0$.

4.7 Annexe : Théorème de Noether

Dans les sections 4.3 et 4.5, nous avons trouvé des constantes du mouvement à partir de l'invariance du Lagrangien sous certaines transformations (translation ou rotation) effectués sur le système. Un théorème général qui relie les lois de conservation aux symétries du système est dû à la mathématicienne allemande Emmy Noether (1882-1935) :

À toute transformation infinitésimale qui laisse le Lagrangien d'un système invariant à une dérivée temporelle totale près correspond une grandeur physique conservée.

Nous en donnons une démonstration ci-dessous.

Soit $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ un Lagrangien dépendant de s coordonnées généralisées $q_i(t)$, et considérons une transformation infinitésimale des coordonnées

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \delta q_i \quad (4.64)$$

(δq_i peut ou non dépendre du temps), qui laisse le Lagrangien invariant à une dérivée temporelle totale près :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \delta F(q, t). \quad (4.65)$$

Le développement de Taylor de $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ à partir de l'équation (4.64) donne :

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i \right) \right] \quad (4.66)$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \quad (4.67)$$

Le deuxième terme dans (4.67) est nul en vertu des équations de Lagrange. En comparant l'équation (4.67) avec l'équation (4.65), on en conclut que

$$\frac{d}{dt} \delta F(q, t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \quad (4.68)$$

et donc que la quantité

$$C \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \delta F(q, t) \quad (4.69)$$

est une quantité conservée.

Exemple 1 : Considérons d'abord l'exemple de la section 4.3, d'un ensemble de N particules en absence de champ extérieur

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} (\dot{x}_{\alpha}^2 + \dot{y}_{\alpha}^2 + \dot{z}_{\alpha}^2) - U \quad (4.70)$$

où l'énergie potentielle d'interaction U entre les particules dépend de leur distance relative, et considérons comme transformation une translation selon l'axe Ox d'une quantité constante $\delta x_{\alpha} = \epsilon$.

$$x_{\alpha} \rightarrow x'_{\alpha} = x_{\alpha} + \epsilon \quad ; \quad y'_{\alpha} = y_{\alpha} \quad ; \quad z'_{\alpha} = z_{\alpha} \quad (4.71)$$

Comme toutes les vitesses et les positions relatives entre les particules sont inchangées, le Lagrangien n'est pas affecté par la transformation :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad \text{et par conséquent} \quad \delta F = 0 \quad (4.72)$$

Le théorème de Noether dit dans cas que

$$C = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} \epsilon = \left(\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{x}_\alpha \right) \epsilon \quad (4.73)$$

est une constante. C'est-à-dire que la composante P_x de l'impulsion du système est constante.

Exemple 2 : Considérons maintenant une particule chargée dans un champ électromagnétique. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\vec{v} \cdot \vec{A} - V) \quad (4.74)$$

ici \vec{A} est le potentiel vecteur (relié à \vec{B} par $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$) et V le potentiel scalaire. Pour un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, on vérifie que

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}; \quad (4.75)$$

ici

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x). \quad (4.76)$$

(Vérifiez-le en calculant $\text{rot} \vec{A}$.)

V est le potentiel scalaire tel que $\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. On suppose ici que $V = 0$. On a donc

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2}(\dot{y}x - \dot{x}y) \quad (4.77)$$

Considérons encore une translation selon l'axe (Ox) d'une quantité constante $\delta x = \epsilon$.

$$x \rightarrow x' = x + \epsilon \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad (4.78)$$

Le Lagrangien devient

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{qB\epsilon}{2}\dot{y} = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \left(\frac{qB\epsilon}{2}y \right) \quad (4.79)$$

Le théorème de Noether dit dans cas que

$$C = \epsilon(m\dot{x} - qBy) \quad (4.80)$$

est une constante du mouvement, ce qui est effectivement le cas pour une trajectoire circulaire dans le plan xy avec une pulsation de cyclotron $\omega_c = qB/m$.

Chapitre 5

Petites oscillations

5.1 Oscillations libres

Dans cette section nous étudions les oscillations libres d'un système isolé à un seul degré de liberté autour d'un point d'équilibre stable.

5.1.1 Équilibre stable

Un point de coordonnée généralisée q_0 est dit être un point d'équilibre stable si l'énergie potentielle du système $U(q)$ a un minimum en q_0 . Lorsqu'on développe $U(q)$ autour de q_0 , le terme du premier ordre en $q - q_0$ est nul, et le premier terme non nul est en général celui du second ordre :

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots \quad (5.1)$$

Si on introduit le coefficient k , nécessairement positif, donnant la dérivée seconde de U en q_0 :

$$k = \left(\frac{d^2 U}{dq^2} \right)_{q=q_0} > 0 \quad (5.2)$$

et si on se limite au second ordre dans le développement (5.1), on obtient

$$U(q) \simeq U(q_0) + \frac{k}{2} (q - q_0)^2. \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) montre que pour un écart $x = q - q_0$ par rapport au point d'équilibre q_0 , il apparaît une force généralisée

$$F = -\frac{dU}{dq} = -k(q - q_0) = -kx \quad (5.4)$$

qui a un signe opposé à x , et tend à ramener le système vers le point d'équilibre.

5.1.2 Petites oscillations autour de l'équilibre

Un mouvement très répandu en physique sont les *petites oscillations* effectuées par un système autour d'une position d'équilibre stable. Considérons un système à un seul degré de liberté, dont l'énergie potentielle présente un minimum en q_0 , et exprimons le Lagrangien du système pour des petits écarts

$$x = q - q_0 \quad (5.5)$$

autour du minimum. En choisissant l'origine des énergies en $U(q_0)$, on prendra pour l'énergie potentielle

$$U(x) = \frac{k}{2} x^2. \quad (5.6)$$

Pour l'énergie cinétique de notre système à un seul degré de liberté, pour x petit on fera l'approximation

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2 \simeq \frac{1}{2}a(q_0)\dot{x}^2 \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (5.7)$$

où on a introduit le paramètre positif

$$m = a(q_0) > 0. \quad (5.8)$$

On obtient donc le Lagrangien des petites oscillations d'un système à un degré de liberté :

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (5.9)$$

L'équation du mouvement

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.10)$$

a pour solution générale

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (5.11)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires dont la valeur est déterminée par les conditions initiales. De façon équivalente, la solution générale de (5.10) peut être écrite sous la forme

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.12)$$

avec a et α deux constantes arbitraires¹. L'équation (5.12) décrit un mouvement d'oscillation harmonique d'amplitude a et de pulsation ω . On appelle fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ l'inverse de la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ du mouvement. Remarquons que la fréquence du mouvement $\nu = (2\pi)^{-1} \sqrt{k/m}$ est indépendante de l'amplitude des petites oscillations. L'énergie mécanique du système est

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \quad (5.14)$$

où nous avons utilisé (5.12) pour établir la dernière égalité. L'énergie est donc proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

5.1.3 Représentation complexe

Il est parfois commode de représenter la solution (5.12) comme la partie réelle d'un nombre complexe

$$x = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}\} \quad \text{avec} \quad A = ae^{i\alpha} \quad (5.15)$$

Remarquons que le module et la phase du nombre complexe A donnent l'amplitude et la phase initiale des oscillations.

Tant que l'on effectue des opérations linéaires : addition, multiplication par une constante, différentiation, intégration, nous pouvons opérer avec les quantités complexes, et prendre la partie réelle à la fin des calculs. Nous verrons un exemple d'application de cette méthode dans la section 5.2.1.

1. En développant $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ et en comparant avec (5.11), on voit que les constantes arbitraires a et α sont liées aux constantes c_1 et c_2 par les relations

$$a \cos \alpha = c_1, \quad a \sin \alpha = -c_2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \alpha = -\frac{c_1}{c_2} \quad (5.13)$$

5.2 Oscillations forcées

Considérons maintenant les petites oscillations dans le cas où le système, toujours à un seul degré de liberté, est soumis à une force extérieure dépendante du temps. On parle dans ce cas d'*oscillations forcées*. En plus de son énergie potentielle propre (5.6), le système dans le champ extérieur possède une énergie potentielle

$$U_{\text{ext}}(x, t) \simeq U_{\text{ext}}(0, t) + x \left(\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (5.16)$$

Le premier terme, qui peut être vu comme la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction bien choisie, ne contribue pas aux équations du mouvement et peut être omis du Lagrangien. Dans le second terme, $-\left(\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial x}\right)_{x=0}$ représente la force extérieure agissant sur le système dans sa position d'équilibre. Il s'agit d'une fonction du temps que nous noterons $F(t)$. Ainsi

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t) \quad (5.17)$$

L'équation du mouvement correspondante est

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.18)$$

ω étant la pulsation des oscillations libres, c'est-à-dire en absence de force extérieure. L'équation (5.18) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre. Sa solution générale $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ s'écrit comme la somme de la solution générale x_0 de l'équation homogène (sans second membre), et d'une solution particulière x_1 de l'équation avec second membre. Dans le cas de l'équation (5.18) nous connaissons déjà x_0

$$x_0 = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.19)$$

5.2.1 Force extérieure périodique

Nous considérons ici le cas intéressant où la force extérieure $F(t)$ est périodique

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) \quad (5.20)$$

Cas purement hamiltonien

Nous cherchons une solution particulière de l'équation (5.18) qui oscille avec le même facteur périodique que $F(t)$:

$$x_1 = b [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \quad (5.21)$$

avec une amplitude b à déterminer². En insérant (5.21) dans l'équation (5.18), pourvu que $\gamma \neq \omega$ on calcule sans mal $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$, ce qui donne pour la solution générale

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \quad (5.22)$$

Dans le cas $\gamma = \omega$ dit *de résonance*, où la fréquence de la force extérieure coïncide avec la fréquence des oscillations libres, la solution (5.22) n'est pas valable directement, mais permet

2. Le deuxième terme dans (5.21) est une solution de l'équation homogène, qui aurait pu être omis dans la recherche d'une solution particulière de l'équation (5.18). Sa fonction est de compenser la divergence qui apparaît dans l'amplitude b dans la limite $\gamma \rightarrow \omega$, et d'obtenir ainsi, pour $\gamma \neq \omega$, une forme de la solution qui se raccorde bien à la solution du cas résonnant $\gamma = \omega$.

de retrouver la réponse en prenant la limite $\gamma \rightarrow \omega$. En faisant des développements limités, on écrit

$$\cos(\gamma t + \beta) = \cos(\omega t + \beta - (\omega - \gamma)t) \approx \cos(\omega t + \beta) + (\omega - \gamma)t \sin(\omega t + \beta), \quad (5.23)$$

et

$$\frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} = \frac{1}{(\omega - \gamma)(\omega + \gamma)} \approx \frac{1}{(\omega - \gamma)2\omega} \quad (5.24)$$

et donc, à la limite³.

$$\boxed{x = a \cos(\omega t + \tilde{\alpha}) + \frac{f}{2\omega m} t \sin(\omega t + \beta)} \quad (5.25)$$

L'équation (5.25) montre que dans le cas résonant l'amplitude des oscillations croît linéairement en temps.

Cas avec amortissement

Dans la pratique, il est important de considérer le cas où, en plus de la force extérieure périodique (5.20), le système est sujet à une petite force de frottement $\mathcal{F}_{\text{frott}} = -2m\alpha\dot{x}$, avec $\alpha < \omega$. Les facteurs 2 et m ne servent qu'à simplifier les expressions qui suivent. Le régime $\alpha < \omega$ correspond aux petits frottements, le comportement du système est qualitativement différent pour $\alpha \geq \omega$. En prenant en compte cette force, l'équation du mouvement devient⁴

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t) - 2\alpha\dot{x}. \quad (5.26)$$

Avant de résoudre cette équation, écrivons-la en termes des quantités complexes \tilde{x} et $\tilde{F} = f e^{i(\gamma t + \beta)}$, dont la solution x et la force extérieure F sont les parties réelles. On a

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = \frac{1}{m} \tilde{F}(t) - 2\alpha\dot{\tilde{x}} \quad (5.27)$$

Comme vous l'avez vu dans le cours de mécanique physique de L1, la solution de l'équation homogène associée à (5.27) s'amortit aux temps longs⁵. Nous cherchons une solution particulière de (5.27) qui oscille à la fréquence de la force périodique extérieure

$$\tilde{x} = B e^{i\gamma t} \quad (5.30)$$

avec $B = |B|e^{i\varphi}$ nombre complexe à déterminer. On remarque alors que $\dot{\tilde{x}} = i\gamma\tilde{x}$ et que $\ddot{\tilde{x}} = -\gamma^2\tilde{x}$. L'équation devient donc $(\omega^2 - \gamma^2 + 2\alpha i\gamma)\tilde{x} = \frac{1}{m}\tilde{F}(t)$ et l'on obtient

$$\tilde{x} = \frac{F(t)}{m(\omega^2 - \gamma^2 + 2\alpha i\gamma)} = \frac{f e^{i(\gamma t + \beta)}}{m(\omega^2 - \gamma^2 + 2\alpha i\gamma)} \quad (5.31)$$

3. Un autre façon de trouver la solution (5.25), est de chercher une solution particulière de l'équation (5.18) avec $\gamma = \omega$, de la forme $x_1 = \tilde{b}t \sin(\omega t + \beta)$ avec une amplitude \tilde{b} à déterminer. En insérant cette forme dans l'équation, on trouve $\tilde{b} = f/(2\omega m)$, ce qui donne (5.25) pour la solution générale.

4. On peut décrire ce problème avec un Lagrangien, mais il faut généraliser les équations de Lagrange en rajoutant un terme supplémentaire pour pouvoir décrire des forces de frottements ou d'amortissement.

5. Pour résoudre l'équation homogène associée à (5.27), on cherche une solution de la forme $\tilde{x}_0 = A e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$. On tombe sur l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (\Delta < 0, \text{ régime pseudo-périodique}) \quad (5.28)$$

si bien que

$$\tilde{x}_0 = A e^{-\alpha t} e^{\pm i\Omega t} \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}. \quad (5.29)$$

En comparant les expressions (5.31) et (5.30) et en simplifiant le facteur $e^{i\gamma t}$, on trouve le module et la phase de B :

$$|B| = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \beta - \arctan \frac{2\alpha\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \quad (5.32)$$

On peut donc écrire la solution

$$\tilde{x} = \frac{f}{m} \frac{e^{i(\gamma t + \varphi)}}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}} \quad \text{avec} \quad \varphi = \beta - \arctan \frac{2\alpha\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \quad (5.33)$$

Dans le régime forcé, en présence d'un amortissement pour petit qu'il soit, les oscillations aux temps longs ont lieu à la fréquence $\gamma/(2\pi)$ de la force extérieure.

5.2.2 Cas général

Revenons au cas purement hamiltonien (sans amortissement). L'équation (5.18) peut être intégrée dans le cas général, quelle que soit la force extérieure $F(t)$, en utilisant la notation complexe. Pour cela on réécrit d'abord l'équation sous la forme

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t) \quad (5.34)$$

(où on a rajouté et soustrait $i\omega\dot{x}$), et on introduit la quantité complexe

$$\xi = \dot{x} + i\omega x \quad (5.35)$$

qui obéit à l'équation

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t) \quad (5.36)$$

L'équation (5.36) est une équation différentielle du premier ordre avec second membre. La solution générale de l'équation homogène est

$$\xi_0 = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad A_0 \in \mathbb{C} \quad (5.37)$$

Suivant la méthode de la variation de la constante, nous cherchons pour l'équation avec second membre une solution de la forme

$$\xi = A(t)e^{i\omega t}. \quad (5.38)$$

En remplaçant (5.38) dans (5.36) on trouve

$$\dot{A}(t) = \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t} \quad (5.39)$$

ce qui donne finalement pour ξ la solution

$$\xi = e^{i\omega t} \left[\int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega t'} dt' + A_0 \right] \quad (5.40)$$

D'après (5.35), la fonction $x(t)$ s'obtient à partir ξ en prenant la partie imaginaire et en divisant par $i\omega$.

Toujours d'après (5.35), remarquons que l'énergie mécanique du système s'exprime simplement en terme du module au carré de ξ . En effet

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2. \quad (5.41)$$

Calculons alors l'énergie transmise au système par la force extérieure entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$ en supposant l'énergie initialement nulle $\xi(-\infty) = 0$. On récrit d'abord la solution (5.40) en prenant $-\infty$ au lieu de 0 comme limite inférieure de l'intégrale. La condition $\xi(-\infty) = 0$ impose alors $A_0 = 0$. Pour $t = +\infty$ cela donne

$$|\xi(+\infty)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (5.42)$$

et donc pour l'énergie transférée

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (5.43)$$

L'énergie transférée est donc égale au module au carré de la composante de Fourier de la force extérieure $F(t)$ à la fréquence propre du système ω .

5.3 Oscillations d'un système à plusieurs degrés de liberté, modes normaux

5.3.1 Système à deux degrés de liberté

Considérons le système à deux degrés de liberté représenté en figure 5.1.

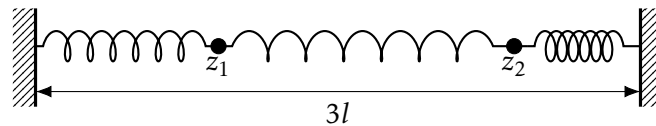


FIGURE 5.1 – Deux oscillateurs, de fréquence propre $\sqrt{k/m}$ en absence de couplage, sont couplés par un ressort de constante de raideur ϵ .

Deux points matériels de masse égale $m_1 = m_2 = m$ peuvent se déplacer à une dimension selon l'axe z . Chaque masse est liée à un ressort (de longueur au repos l et de constante de raideur k) dont l'extrémité est fixée, et à un deuxième ressort (de longueur au repos l et de constante de raideur ϵ) qui relie les deux masses. La distance entre les deux points fixes d'attache est de $3l$.

Le Lagrangien des petites oscillations

En prenant l'origine de l'axe z au point de fixation du premier ressort, l'énergie potentielle harmonique du système s'écrit

$$U = \frac{1}{2} \left[k(z_1 - l)^2 + \epsilon(z_2 - z_1 - l)^2 + k(z_2 - 2l)^2 \right] \quad (5.44)$$

et l'énergie cinétique des deux masses

$$T = \frac{m}{2} (\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) \quad (5.45)$$

En introduisant x_1 et x_2 , les écarts aux positions d'équilibre des deux masses,

$$x_1 = z_1 - l \quad ; \quad x_2 = z_2 - 2l \quad (5.46)$$

le Lagrangien du système prend la forme

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} \left[k(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon(x_2 - x_1)^2 \right] \quad (5.47)$$

En divisant par m et en introduisant $\omega_0^2 = (k + \epsilon)/m$ et $\alpha^2 = \epsilon/m$ on obtient

$$\boxed{\frac{\mathcal{L}}{m} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \alpha^2 x_2 x_1} \quad (5.48)$$

Pour préparer le cas général, il convient d'introduire des notations matricielles :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \quad X^T = (x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} ; \quad \dot{X}^T = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \quad (5.49)$$

ou vectorielles

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

que nous utiliserons selon convenance. Le Lagrangien (5.48) s'écrit alors

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{X}^T G \dot{X} - \frac{1}{2} X^T H X} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{X}} \cdot G \dot{\vec{X}} - \frac{1}{2} \vec{X} \cdot H \vec{X}} \quad (5.51)$$

La matrice G contient l'information sur la métrique de l'espace des coordonnées et la matrice H sur l'énergie potentielle près du point d'équilibre. Ici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad H = \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\alpha^2 \\ -\alpha^2 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Les matrices G et H sont symétriques et définies positives (remarquez que d'après leur définition $\omega_0 > \alpha$), ce qui restera vrais dans le cas général traité dans la section suivante.

Les équations du mouvement et les modes normaux

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \alpha^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \alpha^2 x_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = -HX \quad (5.53)$$

Nous cherchons une solution où les deux coordonnées oscillent à la même fréquence. On appelle cela un *mode collectif* ou un *mode normal* du système

$$X = U \cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = -\omega^2 X \quad (5.54)$$

avec la matrice U et la pulsation ω à déterminer. En remplaçant la forme (5.54) dans l'équation du mouvement (5.53) on obtient un problème aux valeurs propres $HX = \omega^2 X$, donc :

$$\boxed{HU = \omega^2 U} \quad (5.55)$$

Les valeurs propres ω^2 s'obtiennent en résolvant l'équation caractéristique $\det(H - \omega^2 \mathbb{I}) = 0$, et les vecteurs propres U en résolvant (5.55) pour la valeur propre correspondante. Ici on trouve :

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 \pm \alpha^2 \quad ; \quad U_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est arbitraire. Il permet d'avoir $\|U_{\pm}\| = 1$. La symétrie de H garantit l'orthogonalité des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres différentes, et nous avons

normalisé les vecteurs propres pour en faire une base orthonormale dans \mathbb{R}^2 , où chaque vecteur (x_1, x_2) représente une configuration de notre système. On a trouvé donc les solutions particulières

$$X_+ = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ -\cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{pmatrix} ; \quad X_- = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

où les phases φ_+ et φ_- restent arbitraires. Dans la solution X_+ les deux masses oscillent en opposition de phase, et dans la solution X_- elles oscillent en phase.

Dans la solution générale des équations du mouvement, chaque coordonnée sera la superposition de deux fonctions périodiques $A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$ et $A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$ avec des amplitudes et des phases déterminées par les conditions initiales.

Les coordonnées normales et la forme canonique du Lagrangien

La solution du problème aux valeurs propres (5.55) nous permet également de trouver le changement de coordonnées tel que les nouvelles coordonnées, que nous appellerons θ_+ et θ_- oscillent avec une seule fréquence. Leur expression est donnée par

$$\theta_+ = U_+^T X \quad \text{ou} \quad \theta_+ = \vec{U}_+ \cdot \vec{X} \quad \text{ici} \quad \theta_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad (5.58)$$

$$\theta_- = U_-^T X \quad \text{ou} \quad \theta_- = \vec{U}_- \cdot \vec{X} \quad \text{ici} \quad \theta_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \quad (5.59)$$

D'après les équations (5.53) et (5.55), et en utilisant le fait que H est réel et symétrique (c'est un cas particulier de matrice hermitienne $A = (A^*)^T$ que vous verrez en mécanique quantique), on a

$$\ddot{\theta}_+ = \vec{U}_+ \cdot \ddot{\vec{X}} = -\vec{U}_+ \cdot H \vec{X} = -H \vec{U}_+ \cdot \vec{X} = -\omega_+^2 \vec{U}_+ \cdot \vec{X} = -\omega_+^2 \theta_+ \quad (5.60)$$

$$\ddot{\theta}_- = \vec{U}_- \cdot \ddot{\vec{X}} = -\vec{U}_- \cdot H \vec{X} = -H \vec{U}_- \cdot \vec{X} = -\omega_-^2 \vec{U}_- \cdot \vec{X} = -\omega_-^2 \theta_- \quad (5.61)$$

Les nouvelles coordonnées θ_+ et θ_- s'appellent *coordonnées normales* et elles effectuent des oscillations simples et indépendantes ((5.12))

$$\boxed{\theta_{\pm}(t) = a_{\pm} \cos(\omega_{\pm} t + \alpha_{\pm})} \quad (5.62)$$

En incluant explicitement les conditions initiales on peut écrire

$$\boxed{\theta_{\pm}(t) = \theta_{\pm}(0) \cos(\omega_{\pm} t) + \frac{\dot{\theta}_{\pm}(0)}{\omega_{\pm}} \sin(\omega_{\pm} t)} \quad (5.63)$$

Pour exprimer le Lagrangien en fonction des nouvelles coordonnées, introduisons la matrice de passage P dont les vecteurs colonne sont les vecteurs propres de H . Grâce à l'orthonormalité des vecteurs propres, $P^T = P^{-1}$. On dit que P est une matrice unitaire

$$P = \begin{pmatrix} U_{+1} & U_{-1} \\ U_{+2} & U_{-2} \end{pmatrix} ; \quad P^T = \begin{pmatrix} U_{+1} & U_{-1} \\ U_{-2} & U_{+2} \end{pmatrix} ; \quad P^T = P^{-1}. \quad (5.64)$$

Ici,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P^T = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Les équations (5.58)-(5.59) et leur inverses s'écrivent alors sous forme matricielle ou vectorielle

$$\Theta = P^T X \quad \text{ou} \quad \vec{\Theta} = P^T \vec{X} \quad \text{avec} \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

$$X = P\Theta \quad \text{ou} \quad \vec{X} = P\vec{\Theta} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

En remplaçant la relation (5.67) dans le Lagrangien (5.51) en forme matricielle, avec $G = \mathbb{I}$, on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{X}^T \dot{X} - \frac{1}{2} X^T H X = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T P^T P \dot{\Theta} - \frac{1}{2} \Theta^T P^T H P \Theta \quad (5.68)$$

Sachant que

$$P^T P = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad P^T H P = \Lambda = \begin{pmatrix} \omega_+^2 & 0 \\ 0 & \omega_-^2 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

on obtient la forme canonique du Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=+,-} \dot{\theta}_\beta^2 - \omega_\beta^2 \theta_\beta^2 \quad (5.70)$$

qui représente $s = 2$ oscillateurs harmoniques indépendants, où s est le nombre de coordonnées, égale aux nombre de degrés de liberté indépendants du système.

5.3.2 Système à s degrés de liberté autour d'un point d'équilibre stable

Le Lagrangien des petites oscillations

Dans cette section nous traitons le cas générale d'un système à s degrés de liberté, décrit par des coordonnées $q = q_1, q_2, \dots, q_s$, qui effectue des petites oscillations autour d'un point d'équilibre stable $q^{(0)}$. La forme générale du Lagrangien de départ qu'on considère est celle donnée par (3.74).

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q) \quad (5.71)$$

et on pose $U(q^{(0)}) = 0$. Comme pour le cas à un degré de liberté traité en section 5.1, on introduit les petits écarts à l'équilibre

$$x_i \equiv q_i - q_i^{(0)} \quad i = 1, \dots, s \quad (5.72)$$

et on va quadratiser l'énergie potentielle U autour de $q^{(0)}$. On obtient donc pour U une forme quadratique qui, si $q^{(0)}$ est un minimum, est définie positive.

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_s^2} \end{pmatrix}_{q=q^{(0)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

La matrice qui contient les dérivées secondes est la matrice Hessienne du potentiel. Elle sera indiquée avec H et ses élément de matrice h_{ik} . L'indice $q = q^{(0)}$ indique que les dérivées sont évaluées au point d'équilibre. L'énergie cinétique près de l'équilibre est aussi une forme quadratique définie positive. En partant de l'expression (5.71), comme $\dot{q}_i = \dot{x}_i$ et on a supposé que les écarts étaient petits, on a au premier ordre non nul :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \approx \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik}(q^{(0)}) \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (5.74)$$

On rappelle que les $a_{ik}(q)$ sont symétriques. En posant $g_{ik} = a_{ik}(q^{(0)})$,

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & g_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{X}^T G \dot{X} \quad (5.75)$$

Le Lagrangien, de la forme (5.51), peut s'écrire plus explicitement

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{X}^T G \dot{X} - X^T H X = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s g_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - h_{ik} x_i x_k \quad (5.76)$$

Les équations du mouvement et les modes normaux

Écrivons les équations du mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left[\sum_k (g_{jk} \ddot{x}_k + h_{jk} x_k) + \sum_i (g_{ij} \ddot{x}_i + h_{ij} x_i) \right] = 0 \quad (5.77)$$

Le premier terme dans (5.77) est obtenu pour $i = j$ dans la double somme qui apparait dans L , et le deuxième pour $k = j$. En raison de la symétrie de G et H , on voit cependant que les deux termes sont égaux. Ce qui nous donne pour les équation du mouvement

$$\sum_k (g_{jk} \ddot{x}_k + h_{jk} x_k) = 0 \quad \text{ou en forme matricielle} \quad \Rightarrow \quad G \ddot{X} = -H X \quad (5.78)$$

En suivant la procédure que nous avons expliquée dans la section précédente, nous cherchons les modes collectifs du système. Ce sont des solutions particulières où toutes les coordonnées oscillent à la même fréquence

$$X = \tilde{U} \cos(\omega t + \phi) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{u}_s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = -\omega^2 X \quad (5.79)$$

En mettant ensemble les équations (5.79) et (5.78), on est amené à résoudre le problème aux valeurs propres

$$G^{-1} H X = \omega^2 X \quad (5.80)$$

À partir du fait que G et H sont symétriques et définies positives, on peut montrer que $G^{-1}H$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives⁶. Les solutions

$$X_\beta = \tilde{U}_\beta \cos(\omega_\beta t + \phi) \quad \text{avec} \quad G^{-1} H \tilde{U}_\beta = \omega_\beta^2 \tilde{U}_\beta \quad (5.81)$$

représentent les modes normaux du système. Puisque la matrice $G^{-1}H$ n'est en général pas symétrique, les vecteurs propres \tilde{U}_β correspondants à des valeurs propres différents ne sont pas nécessairement orthogonaux (contrairement aux U_β du cas simple avec $G = \mathbb{I}$ traité dans la section précédente).

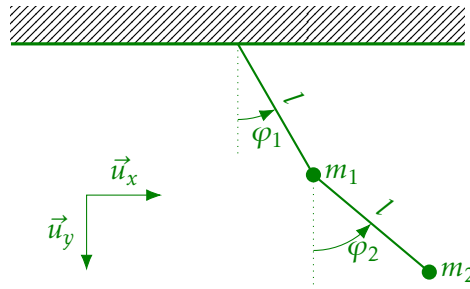


FIGURE 5.2 – Pendule double.

5.3.3 Exercice : petites oscillations du pendule double

Considérons le pendule double schématisé en figure 5.2, où deux masses identiques $m_1 = m_2 = m$ au bout de deux fils de même longueur l oscillent dans le plan vertical xy sous l'action de la pesanteur $\vec{P} = mg\vec{u}_y$.

1. Écrire le Lagrangien du système en fonction des coordonnées angulaires φ_1 et φ_2 .
2. Écrire le Lagrangien des petites oscillations du système autour du point d'équilibre stable $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.
3. Écrire les équations du mouvement pour les petites oscillations, trouver les modes normaux du système et leur fréquence propre.
4. Intégrer les équations du mouvement, dans l'approximation des petites oscillations, pour les conditions initiales suivantes :

$$\varphi_1(0) = 0 \quad , \quad \varphi_2(0) = \varepsilon \quad , \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (5.82)$$

Solution

1. On exprime d'abord les coordonnées cartésiennes des masses en fonction des angles orientés φ_1 et φ_2 .

$$x_1 = l \sin \varphi_1 \quad ; \quad x_2 = l(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \quad (5.83)$$

$$y_1 = l \cos \varphi_1 \quad ; \quad y_2 = l(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \quad (5.84)$$

Pour l'énergie cinétique on obtient

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{ml^2}{2} [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (5.85)$$

Pour l'énergie potentielle, en prenant le zéro dans la position d'équilibre, on obtient

$$U = mg(l - y_1) + mg(2l - y_2) = 3mgl - mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \quad (5.86)$$

Le Lagrangien peut être divisé par ml^2 sans que les équations du mouvement soient affectées. On obtient ainsi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \frac{g}{l} (2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \frac{3g}{l}. \quad (5.87)$$

2. En développant l'énergie potentielle à l'ordre deux autour de $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] - \frac{g}{2l} (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) G \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\varphi_1, \varphi_2) H \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.88)$$

6. Les valeurs propres de $G^{-1}H$ sont les mêmes que les valeurs propres de $M = G^{-1/2}HG^{-1/2}$ qui est symétrique et définie positive. En effet, $\det(G^{-1}H - \lambda \mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow \det(G^{-1/2}HG^{-1/2} - \lambda \mathbb{I}) = 0$.

où l'on a introduit les matrices

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (5.89)$$

3. Grâce à la symétrie des matrices G et H , les équations du mouvement prennent la forme

$$G \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = -H \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = -G^{-1}H \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

On calcule la matrice $G^{-1}H$ et on obtient les équations du mouvement

$$G^{-1}H = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -\omega_0^2(2\varphi_1 - \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = -\omega_0^2(-2\varphi_1 + 2\varphi_2). \end{cases} \quad (5.91)$$

Les modes propres et les fréquences propres se trouvent en diagonalisant la matrice $G^{-1}H$. On obtient les vecteurs propres \tilde{U}_\pm et valeurs propres ω_\pm^2 :

$$\tilde{U}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \omega_+^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2, \quad \tilde{U}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \omega_-^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \quad (5.92)$$

En revenant aux vecteurs des coordonnées

$$X = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

les modes normaux correspondent aux deux solutions particulières

$$X_+ = \begin{pmatrix} \varphi_{1,+} \\ \varphi_{2,+} \end{pmatrix} = \tilde{U}_+ \cos(\omega_+ t + \Phi) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \Phi) \\ -\sqrt{2} \cos(\omega_+ t + \Phi) \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

$$X_- = \begin{pmatrix} \varphi_{1,-} \\ \varphi_{2,-} \end{pmatrix} = \tilde{U}_- \cos(\omega_- t + \Phi) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_- t + \Phi) \\ \sqrt{2} \cos(\omega_- t + \Phi) \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

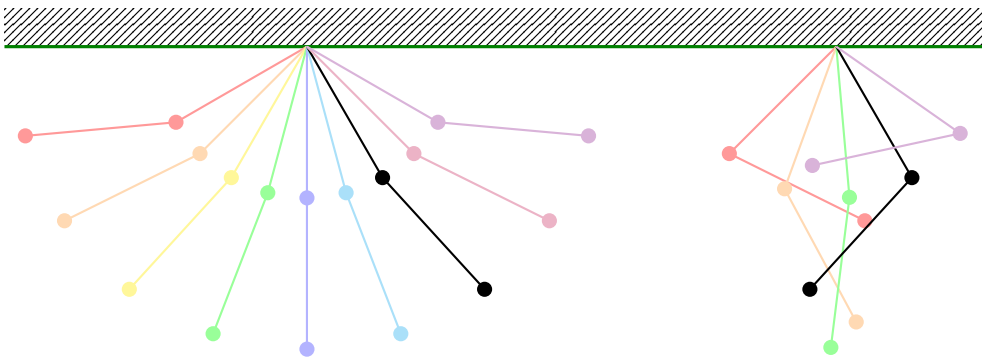


FIGURE 5.3 – Modes normaux du pendule double. À gauche, le mode X_- , et à droite, le mode X_+

Pour les deux modes propres, on remarque que l'amplitude de l'oscillation du deuxième pendule (celui décrit par la coordonnée φ_2) est $\sqrt{2}$ fois plus grande de celle du premier pendule. Pour le mode U_+ qui oscille à la fréquence ω_+ les deux pendules oscillent en opposition de phase, lorsque pour le mode U_- ils oscillent en opposition de phase.

4. La décomposition en modes propres (5.92) nous dit que la forme la plus générale de la solution est

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = [A \cos(\omega_+ t) + B \sin(\omega_+ t)] \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + [C \cos(\omega_- t) + D \sin(\omega_- t)] \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

et donc, en considérant position et vitesse à $t = 0$, on a dans le cas particulier (5.82)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B\omega_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + D\omega_- \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

et on trouve immédiatement $C = -A = \epsilon/(2\sqrt{2})$ et $B = D = 0$. La solution est donc

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_- t) - \cos(\omega_+ t) \\ \sqrt{2} [\cos(\omega_- t) + \cos(\omega_+ t)] \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

Les deux modes normaux sont excités dans cette solution.

Les coordonnées normales et la forme canonique du Lagrangien

Pour trouver les coordonnées normales et la forme canonique du Lagrangien dans le cas général, nous rencontrons une petite complication due au fait que la matrice $G^{-1}H$ n'est pas symétrique. En particulier : (i) la propriété d'hermiticité de H utilisée pour obtenir les équations (5.60) et (5.61) n'est pas valable pour $G^{-1}H$ et (ii) les vecteurs propres \tilde{U}_β de $G^{-1}H$ ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire ordinaire et ne peuvent pas former une base orthonormale de \mathbb{R}^s . On s'en sort en introduisant un nouveau vecteur X' relié à X par⁷

$$X' = G^{1/2}X \quad ; \quad X = G^{-1/2}X' \quad (5.102)$$

si bien que

$$G^{-1}HX = \omega^2 X \quad \Rightarrow \quad (G^{-1/2}HG^{-1/2})X' = \omega^2 X' \quad \text{ou} \quad MX' = \omega^2 X' \quad (5.103)$$

avec $M = G^{-1/2}HG^{-1/2}$ symétrique et définie positive. En utilisant (5.78), les équations du mouvement deviennent

$$\ddot{X}' = G^{1/2}\ddot{X} = G^{1/2}[-G^{-1}HX] = -G^{-1/2}HX = -G^{-1/2}HG^{-1/2}X' = -MX' \quad (5.104)$$

Par exemple, avec les matrices G et H et le vecteur X du pendule double, voir (5.89),

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad X = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5.105)$$

7. Pour toute matrice G réelle symétrique et définie positive, il existe une matrice réelle symétrique et définie positive que l'on note $G^{1/2}$, telle que $(G^{1/2})^2 = G$. Si on écrit $G = \mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}$, où Λ est diagonale, alors $G^{1/2} = \mathcal{P}\Lambda^{1/2}\mathcal{P}^{-1}$. Notez que l'on peut toujours construire la matrice de passage avec une base de vecteurs propres orthonormés ; on a alors dans ce cas $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^T$, ce qui implique que $(G^{1/2})^T = G^{1/2}$: la matrice $G^{1/2}$ est symétrique. Ceci étant dit, on n'a pas besoin de normaliser les vecteurs propres (et avoir un \mathcal{P} unitaire) pour calculer $G^{1/2}$.

Par exemple, si on reprend la matrice G du problème du double pendule, voir (5.89), elle admet les vecteurs et valeurs propres suivants

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad (5.99)$$

On construit la matrice de passage \mathcal{P} avec les vecteurs propres, la matrice Λ avec les valeurs propres et on obtient

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 + \sqrt{5} & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 + \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 5 - \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad G = \mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1} \quad (5.100)$$

(Remarquez que l'on a $\mathcal{P}^T \neq \mathcal{P}^{-1}$ parce qu'on n'a pas normalisé les vecteurs propres.) On vérifie que $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$ et on en déduit

$$G^{1/2} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{-1/2} = (G^{1/2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.101)$$

On vérifie directement que $(G^{1/2})^2 = G$.

on trouve, voir la note 7,

$$G^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

Les nouvelles équations du mouvement (5.104) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2) &= -\omega_0^2 \left((\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_1 \right) \\ \ddot{\varphi}_1 &= -\omega_0^2 \left(-(\varphi_1 + \varphi_2) + 3\varphi_1 \right), \end{aligned} \quad (5.107)$$

et on vérifie directement que c'est compatible avec (5.91).

Comme la matrice M est symétrique, ses vecteurs propres U_β avec $\beta = 1, \dots, s$ peuvent donc être choisis pour former une base orthonormale en \mathbb{R}^s et les valeurs propres correspondantes ω_β^2 sont toutes positives. Les s coordonnées normales sont alors définies par

$$\theta_\beta = \vec{U}_\beta \cdot \vec{X}' \quad \text{pour} \quad \beta = 1, \dots, s \quad (5.108)$$

et les équations du mouvement (5.104) donnent, en utilisant l'hermiticité de M ,

$$\ddot{\theta}_\beta = \vec{U}_\beta \cdot \ddot{\vec{X}}' = -\vec{U}_\beta \cdot M \vec{X}' = -M \vec{U}_\beta \cdot \vec{X}' = -\omega_\beta^2 \theta_\beta \quad (5.109)$$

Dans le cas du pendule double et de la matrice M dans (5.106), on trouve les vecteurs et valeurs propres suivants

$$U_+ = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \omega_+^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2, \quad U_- = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \omega_-^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \quad (5.110)$$

En utilisant l'expression de X' dans (5.106), on obtient pour les coordonnées normales

$$\theta_+ = \frac{\varphi_2 - \sqrt{2}\varphi_1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \quad \theta_- = \frac{\varphi_2 + \sqrt{2}\varphi_1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \quad (5.111)$$

et on vérifie directement avec (5.91) que $\ddot{\theta}_\pm = -\omega_\pm^2 \theta_\pm$.

En introduisant la matrice Θ qui regroupe les coordonnées normales

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_s \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

et la matrice de passage P qui a \vec{U}_β pour vecteurs colonne, l'équation (5.108) peut s'écrire

$$\Theta = P^T X' \quad (5.113)$$

comme les U_β sont orthonormés, la matrice P est hermitienne et vérifie donc $P^T = P^{-1}$. On en déduit que telle que

$$X' = P\Theta \quad \text{si bien que} \quad X = G^{-1/2}P\Theta \quad (5.114)$$

Le Lagrangien (5.76) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{X}^T G \dot{X} - X^T H X \\ &= \frac{1}{2} (G^{-1/2} P \dot{\Theta})^T G (G^{-1/2} P \dot{\Theta}) - (G^{-1/2} P \Theta)^T H (G^{-1/2} P \Theta) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T P^T (G^{-1/2})^T G G^{-1/2} P \dot{\Theta} - \Theta^T P^T (G^{-1/2})^T H G^{-1/2} P \Theta \end{aligned} \quad (5.115)$$

En utilisant le fait que $(G^{-1/2})^T = G^{-1/2}$ (car $G^{-1/2}$ est symétrique et $P^T = P^{-1}$ (car P est hermitienne) on retrouve la forme normale :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \mathbb{I} \dot{\Theta} - \Theta^T \Lambda \Theta = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dots + \dot{\theta}_s^2) - (\omega_1^2 \theta_1^2 + \dots + \omega_s^2 \theta_s^2) \quad (5.116)$$

où Λ est la matrice diagonale avec les valeurs propres de $M = G^{-1/2} H G^{-1/2}$, c'est-à-dire les ω_β^2 . Ce Lagrangien décrit le mouvement de s oscillateurs indépendants.

Chapitre 6

Mouvements d'un solide

6.1 Généralités

Nous appelons *solide* un système de points matériels dont les distances sont invariables. Pour simplifier les raisonnements, nous allons souvent considérer les solides comme un ensemble discret de points matériels. Le passage à un milieu continu se fait alors en passant d'une somme sur les particules à une intégrale sur le volume du corps, où l'on aura pris soin de remplacer les masses des particules par ρdV , la masse contenue dans un élément de volume dV . Par exemple :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \rightarrow \int_V dV \rho r^2. \quad (6.1)$$

Pour décrire le mouvement d'un solide on utilise deux systèmes de coordonnées. Un système \mathcal{S} immobile dans le référentiel d'étude de centre O et coordonnées cartésienne XYZ , et un système mobile $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$ de centre G et de coordonnées xyz , ou $x_1x_2x_3$, où G est le centre de masse du solide. Ce système est en liaison rigide avec le corps solide et participant à tous les mouvements de celui-ci. Puisque la position du centre de masse $\overrightarrow{OG} = \vec{R}_c$ est identifiée par ses trois coordonnées, et l'orientation des axes de $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$ par rapport à \mathcal{S} par trois angles, le système a en tout six degrés de liberté.

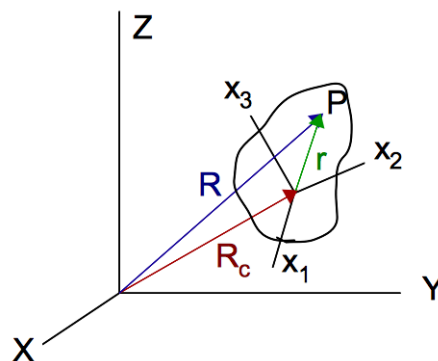


FIGURE 6.1 – Un point P d'un solide est repéré par \vec{R} dans le système immobile \mathcal{S} , et par \vec{r} dans $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$, le système de coordonnées mobile lié au solide.

Considérons un point P du solide de coordonnées \vec{R} dans \mathcal{S} , et de coordonnées \vec{r} dans $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$, comme illustré dans la figure 6.1. Un petit déplacement du solide peut se décomposer en une petite translation $d\vec{R}_c$ du centre de masse et une petite rotation $d\vec{\varphi}$ des axes de $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$, donc du solide, autour du centre de masse. La variation de \vec{R} dans le référentiel lié à \mathcal{S} s'écrit alors :

$$d\vec{R} = d\vec{R}_c + d\vec{\varphi} \wedge \vec{r} \quad (6.2)$$

En divisant cette égalité par dt et en introduisant les vitesses \vec{V} , \vec{V}_c et la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} \quad ; \quad \frac{d\vec{R}_c}{dt} = \vec{V}_c \quad ; \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega} \quad (6.3)$$

on obtient la relation

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}} \quad (6.4)$$

Ici \vec{V}_c est la vitesse du centre de masse qui caractérise le mouvement de translation du corps à un instant donné, \vec{V} est la vitesse du point P , et $\vec{\Omega}$ est la vitesse angulaire qui caractérise sa rotation (ou la rotation du système mobile) par rapport au système fixe. La relation (6.4) peut s'interpréter en disant que, puisque le point P est fixe dans le référentiel $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$, sa vitesse dans le référentiel galiléen \mathcal{S} est exclusivement donnée par la vitesse d'entraînement.

6.2 Tenseur d'inertie et Lagragien

À partir de l'expression (6.4), écrivons l'énergie cinétique du solide considéré comme un ensemble discret de points matériels (on omet par simplicité les indices α sur les différents points du solide sur lesquels on somme)

$$T = \sum \frac{1}{2} m V^2 = \sum \frac{1}{2} m \left[V_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\|^2 \right] \quad (6.5)$$

Remarquons que \vec{V}_c et $\vec{\Omega}$ ne dépendent pas du point et peuvent sortir de la somme. Ainsi, pour le deuxième terme on trouve

$$\sum m \vec{V}_c \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \sum m \vec{r} \cdot (\vec{V}_c \wedge \vec{\Omega}) = (\vec{V}_c \wedge \vec{\Omega}) \cdot \sum m \vec{r} = 0 \quad (6.6)$$

où pour la dernière égalité on a utilisé le fait que l'origine du système mobile coïncide avec le centre de masse du solide. Pour le troisième terme nous pouvons écrire

$$\|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\|^2 = \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \Omega^2 r^2 (1 - \cos^2 \theta) = \Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})^2 \quad (6.7)$$

Cette quantité peut également s'écrire $\Omega^2 r_{\text{radial}}^2$, où r_{radial} est la distance entre le point P et l'axe de rotation, voir la figure 6.2.

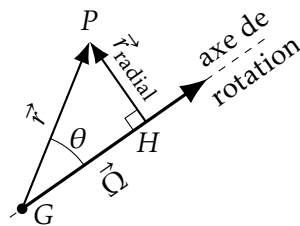


FIGURE 6.2 – En écrivant $\vec{r} = \overrightarrow{GH} + \vec{r}_{\text{radial}}$, on voit que $\vec{\Omega} \wedge \vec{r} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{\text{radial}}$ et donc que $\|\vec{\Omega} \wedge \vec{r}\|^2 = \Omega^2 r_{\text{radial}}^2$.

On obtient finalement

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m \left[\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})^2 \right] = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m \Omega^2 r_{\text{radial}}^2} \quad (6.8)$$

Ici $M = \sum m$ est la masse totale du solide. Le premier terme dans (6.8) représente l'énergie cinétique de translation et le deuxième celle de rotation.

Introduisons maintenant la notation tensorielle avec trois indices i, k, l qui prennent les valeurs 1, 2, 3, où par convention la somme sur les indices répétés est sous entendue. Ainsi par exemple :

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \vec{A} \cdot \vec{B} \quad ; \quad A_l^2 \equiv \sum_{l=1}^3 A_l A_l = \|\vec{A}\|^2 \quad (6.9)$$

Pour l'énergie cinétique de rotation du solide nous obtenons

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum m \left[\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \right] = \frac{1}{2} \sum m \left[\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \right] \quad (6.10)$$

où on a utilisé l'identité $\Omega_i = \Omega_k \delta_{ik}$, où δ_{ik} est le delta de Kronecker ($\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ et $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$). En faisant sortir le facteur $\Omega_i \Omega_k$ de la somme

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (\delta_{ik} x_l^2 - x_i x_k) \quad (6.11)$$

On introduit maintenant le *tenseur d'inertie*

$$I_{ik} = \sum m (\delta_{ik} x_l^2 - x_i x_k) \quad (6.12)$$

Remarquons qu'il est symétrique

$$I_{ik} = I_{ki} \quad (6.13)$$

Puisque i et k prennent les valeurs 1, 2, 3 on peut écrire les composantes du tenseur I_{ik} dans une matrice 3×3 . En notant $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$,

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Avec le tenseur d'inertie, l'énergie cinétique rotationnelle s'écrit

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \quad (6.15)$$

et le Lagrangien du solide devient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U \quad (6.16)$$

où U est l'énergie potentielle du solide, en général dépendant des coordonnées du centre de masse et des angles qui donnent l'orientation des axes de $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$.

Le tenseur d'inertie I_{ik} , qui est comme nous l'avons vu symétrique, peut être rendu diagonal par un choix approprié des axes x_1, x_2, x_3 . Les axes pour lesquels I_{ik} devient diagonal s'appellent les axes principaux d'inertie. Pour un corps homogène ils sont donnés par les axes de symétrie du solide.

6.2.1 Calcul du tenseur d'inertie

Nous montrons ici deux exemples simples de calcul du tenseur d'inertie.

Cylindre homogène

Calculons le tenseur d'inertie d'un cylindre homogène de rayon a et hauteur h . On appelle M la masse total du cylindre, et $\rho = M/(\pi a^2 h)$ sa densité de masse. On choisit x_3 le long de l'axe de symétrie de révolution du cylindre pour respecter la symétrie du solide. Le plus naturel est de calculer les composantes du tenseur d'inertie en coordonnées cylindriques¹ :

$$x_1 = r \cos \theta \quad ; \quad x_2 = r \sin \theta \quad ; \quad x_3 = z \quad (6.17)$$

On montre facilement que les composantes I_{ik} sont nulles hors de la diagonale. Par exemple

$$I_{zx} \equiv I_{31} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta (zr \cos \theta) \propto \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta = 0 \quad (6.18)$$

Sur la diagonale, calculons d'abord I_{zz}

$$I_{zz} = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta r^2 = \rho h \frac{a^4}{4} 2\pi = M \frac{a^2}{2} \quad (6.19)$$

Pour le calcul de I_{11} et I_{22} remarquons d'abord que, pour des raisons de symétrie, on doit avoir

$$\rho \int_V x^2 dV = \rho \int_V y^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_V r^2 dV = M \frac{a^2}{4} \quad (6.20)$$

où \int_V indique l'intégration sur le volume du solide. On a alors

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2) = M \frac{a^2}{4} + \rho \pi a^2 \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \quad (6.21)$$

et $I_{yy} = I_{xx}$.

Tige homogène

Calculons le tenseur d'inertie d'une tige mince homogène de longueur l . On appelle M la masse total de la tige, et ρ sa densité de masse (masse par unité de longueur). On choisit $x_3 = z$ le long de la tige. Puisque pour tous les points du solide $x_1 = x_2 = 0$, les seules composantes non nulles du tenseur d'inertie sont I_{11} et I_{22} . On calcule :

$$I_{xx} = I_{yy} = \rho \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz = \rho \frac{1}{3} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = M \frac{l^2}{12}. \quad (6.22)$$

Remarquons qu'on retrouve simplement le résultat en prenant $a = 0$ et $h = l$ dans l'expression (6.21) l'exemple précédent.

6.3 Exemples de résolution

Dans cette section, nous allons écrire le Lagrangien et les équations du mouvement pour quelques exemples simples.

6.3.1 Cylindre qui roule sans glisser sur un plan incliné

Considérons un cylindre homogène de rayon a et masse M qui roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α comme représenté en figure 6.3. Pour repérer la position du centre de masse

1. Attention aux notations : r est ici la distance à l'axe z et non pas la norme du vecteur \vec{r} comme dans le paragraphe précédent.

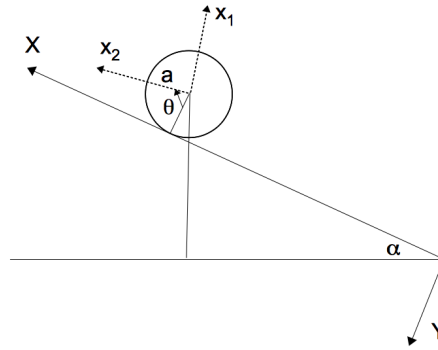


FIGURE 6.3 – Un cylindre homogène de rayon a et masse M roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α .

du cylindre, on introduit un axe fixe X le long du plan incliné. Pour le système mobile attaché au solide, on choisit l'axe x_3 selon les axes de symétrie de révolution du cylindre. L'orientation de l'axe x_2 par rapport à l'axe fixe Y , quantifiée par l'angle θ , décrit la rotation du cylindre autour de son axe, avec un moment d'inertie $I = \frac{1}{2}Ma^2$ (équation (6.19) du paragraphe 6.2.1).

Contrainte de roulement sans glisse

Le fait que le cylindre roule sans glisser impose une relation entre la coordonnée X_c du centre de masse et l'angle θ , et donc entre la vitesse du centre de masse \dot{X}_c et la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$:

$$dX_c = -a d\theta \quad \text{d'où} \quad \dot{X}_c = -a \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \Omega = -\dot{X}_c/a \quad (6.23)$$

L'énergie cinétique du cylindre s'écrit alors :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{X}_c^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2 = \frac{1}{2}M\dot{X}_c^2 + \frac{1}{4}Ma^2\Omega^2 = \frac{3}{4}M\dot{X}_c^2 \quad (6.24)$$

En prenant l'origine des énergies en $X_c = 0$, l'énergie potentielle s'écrit

$$U = Mg X_c \sin \alpha \quad (6.25)$$

Le Lagrangien du système est donc

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M\dot{X}_c^2 - Mg \sin \alpha X_c \quad (6.26)$$

et les équations du mouvement

$$\ddot{X}_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha \quad (6.27)$$

On remarque deux différences par rapport à la chute libre d'un point matériel dans le champ de pesanteur : (i) L'accélération g est diminuée d'un facteur $\sin \alpha$ dû à la force de réaction du plan incliné, qui compense la composante de la pesanteur orthogonale au plan et (ii) l'inertie du cylindre est plus grande de celle d'un point matériel à cause de sa rotation.

6.3.2 Petites oscillations de deux tiges attachées par une charnière

Considérons le système représenté en figure 6.4. OA et AB sont deux tiges minces homogènes de longueur l et masse M attachées par une charnière au point A . La tige OA pivote dans le plan horizontal xy de la figure autour du point O , et l'extrémité B de la tige AB glisse le long de l'axe Ox . Un ressort de longueur nulle au repos et de constante de raideur k , dont une extrémité peut glisser le long de l'axe Ox et l'autre est attachée au point A , tend à ramener les tiges

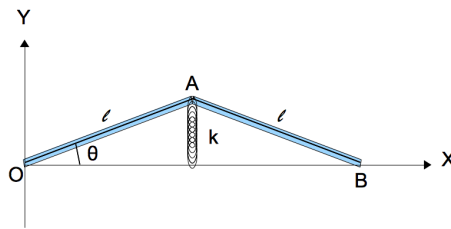


FIGURE 6.4 – Dans le plan horizontal xy , deux tiges minces homogènes de longueur l et masse M sont attachées par une charnière au point A . Un ressort de constante de raideur k tend à ramener les tiges sur l'axe Ox .

sur l'axe Ox . Donner le mouvement des tiges dans l'approximation des petites oscillations (ici petits angles θ).

L'énergie cinétique de la tige OA , ou tige 1, est donnée par

$$T_1 = \frac{1}{2}MV_{c1}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{Ml^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (6.28)$$

Le centre de masse de la tige AB , ou tige 2, a pour coordonnées

$$X_{c2} = \frac{3l}{2}\cos\theta \quad ; \quad Y_{c2} = \frac{l}{2}\sin\theta \quad \text{d'où} \quad \dot{X}_{c2} = -\dot{\theta}\frac{3l}{2}\sin\theta \quad ; \quad \dot{Y}_{c2} = \dot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta \quad (6.29)$$

L'énergie cinétique de la tige AB est donc donnée par

$$T_2 = \frac{1}{2}M(\dot{X}_{c2}^2 + \dot{Y}_{c2}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{Ml^2}{8}(1 + 8\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2. \quad (6.30)$$

Sachant que le moment d'inertie de la tige mince vaut $I = Ml^2/12$ (voir l'équation (6.22) du paragraphe 6.2.1), l'énergie cinétique totale est donc

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Ml^2}{4}(1 + 4\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{Ml^2}{3}(1 + 3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2. \quad (6.31)$$

L'énergie potentielle due à la présence du ressort est

$$U = \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 \quad (6.32)$$

on obtient donc le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{Ml^2}{3}(1 + 3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 \quad (6.33)$$

On observe que $\theta = 0$ est un point minimum de l'énergie potentielle. Dans la limite des petites oscillations autour de $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, on approxime $\sin^2\theta \simeq \theta^2$ dans l'énergie potentielle, et l'on garde l'ordre zéro en θ dans l'énergie cinétique qui est déjà quadratique en θ . On obtient donc

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}Ml^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kl^2\theta^2 \quad (6.34)$$

ou, en divisant le Lagrangien par $\frac{2}{3}Ml^2$,

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{M}\frac{3}{2}\right)\theta^2 \quad (6.35)$$

le Lagrangien (6.35) décrit des oscillations harmoniques de l'angle θ à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}\frac{3}{2}}$.

6.4 Moment cinétique du solide

D'après le premier théorème de König (4.49), on peut toujours décomposer le moment cinétique total d'un système en un *moment cinétique propre* calculé dans le référentiel du centre de masse, plus un moment $M\vec{R}_c \wedge \vec{V}_c$ lié au mouvement de son centre de masse. Dans cette section nous nous intéressons au *moment cinétique propre* d'un solide. Nous nous plaçons donc dans le référentiel du centre de masse dans lequel $\vec{V}_c = \vec{0}$. De plus, comme représenté en figure 6.5, nous allons par commodité mettre l'origine des coordonnées dans le centre de masse, si bien que $\vec{R}_c = 0$. En faisant référence aux équations (6.2)-(6.4) et aux notations de la section 6.1,

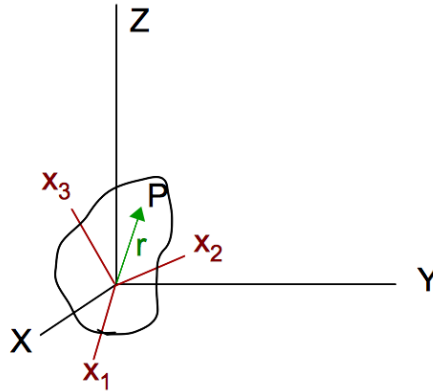


FIGURE 6.5 – Pour étudier le moment cinétique propre d'un solide, nous plaçons l'origine des coordonnées du système fixe \mathcal{S} et du système mobile $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$ dans le centre de masse du système.

où \vec{R} désigne le rayon vecteur d'un point P du solide dans le système de coordonnées fixe \mathcal{S} , \vec{r} désigne le rayon vecteur du même point dans le système mobile $\mathcal{S}_{\text{mobile}}$, et $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$, nous avons ici

$$\vec{R} = \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (6.36)$$

Le moment cinétique \vec{L} dans \mathcal{S} s'écrit (on omet par simplicité les indices α sur les différents points du solide sur lesquels on somme)

$$\vec{L} = \sum m\vec{R} \wedge \vec{V} = \sum m\vec{r} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \quad (6.37)$$

En utilisant l'identité vectorielle

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (6.38)$$

on récrit

$$\vec{L} = \sum \vec{\Omega} (mr^2) - \vec{r}(m\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) \quad (6.39)$$

ou, en notations tensorielles avec $i, k, l = 1, 2, 3$,

$$L_i = \sum m [x_l^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k] = \Omega_k \sum m [x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k] \quad (6.40)$$

En utilisant le tenseur d'inertie (6.12) on écrit simplement

$$\boxed{L_i = I_{ik} \Omega_k} \quad (6.41)$$

Si les axes x_1, x_2, x_3 sont dirigés selon les axes principaux d'inertie du corps, le tenseur I_{ik} est diagonal (on note $I_{11} = I_1, I_{22} = I_2$ et $I_{33} = I_3$) et on a simplement

$$L_1 = I_1 \Omega_1 \quad ; \quad L_2 = I_2 \Omega_2 \quad ; \quad L_3 = I_3 \Omega_3 \quad (6.42)$$

Remarquons que dans le cas particulier où $I_1 = I_2 = I_3 = I$ (on appelle un tel corps une toupie symétrique), le moment cinétique \vec{L} et la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ ont la même direction

$$\vec{L} = I\vec{\Omega} \quad (6.43)$$

Dans le cas général, ceci reste vraie pour une rotation du corps autour de l'un de ses axes principaux d'inertie, par exemple si $\Omega_1 \neq 0$ et $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$.

6.5 Équations du mouvement pour un solide

Nous avons vu que, bien que formé d'un grand nombre de particules, un solide n'a que six degrés de liberté. Ceci est bien sûr dû au fait que les positions relatives des particules sont figées. Pour décrire le mouvement d'un solide, il faut donc six équations indépendantes. Nous allons voir qu'on peut mettre ces équations sous la forme de *dérivées temporelles* (i) de la *quantité de mouvement totale* \vec{P} : trois équations qui décrivent le mouvement de translation du solide, et (ii) du *moment cinétique total* \vec{L} : trois équations qui décrivent son mouvement de rotation.

6.5.1 Dérivée temporelle de la quantité de mouvement

Pour chaque particule qui compose le solide nous pouvons appliquer la loi de Newton $\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \vec{f}_\alpha$, où \vec{f}_α est la force appliquée à la α -ème particule et $\vec{p}_\alpha = m_\alpha \vec{v}_\alpha$ est sa quantité de mouvement. En sommant sur toutes les particules on obtient

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (6.44)$$

où \vec{P} est la quantité de mouvement totale et \vec{F} la somme des forces. Nous savons par ailleurs que pour un système isolé $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$ (voir la section 4.3), puisque les forces internes au système se compensent dans la somme. Il reste donc dans (6.44) seulement la contribution des forces externes :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}} \quad (6.45)$$

Nous allons retrouver l'équation (6.44) avec le formalisme lagrangien, en considérant les dérivées de \mathcal{L} par rapport aux coordonnées du centre de masse X_c, Y_c, Z_c et leur dérivées $\dot{X}_c, \dot{Y}_c, \dot{Z}_c$. Nous devons pour cela exprimer la variation de l'énergie potentielle du solide suite à une petite translation.

Considérons une petite translation du solide qui déplace les coordonnées de chaque point d'une même quantité $d\vec{R}_\alpha = d\vec{R}$. Remarquons que le centre de masse est déplacé de la même quantité $d\vec{R}_c = d\vec{R}$. En effet,

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{R}_\alpha}{M} \quad \rightarrow \quad \frac{\sum_\alpha m_\alpha (\vec{R}_\alpha + d\vec{R})}{M} = \vec{R}_c + d\vec{R} \quad (6.46)$$

La variation de l'énergie potentielle du solide s'écrit

$$dU = \sum_\alpha (\text{grad}_{\vec{R}_\alpha} U) \cdot d\vec{R}_\alpha = -d\vec{R}_c \cdot \sum_\alpha \vec{f}_\alpha = -\vec{F} \cdot d\vec{R}_c \quad (6.47)$$

Composante par composante, cela donne

$$\frac{\partial U}{\partial X_c} = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial Y_c} = -F_y \quad \frac{\partial U}{\partial Z_c} = -F_z \quad (6.48)$$

Par ailleurs nous savons, voir l'équation (4.30), que $\vec{P} = M\vec{V}_c$. À partir du Lagrangien du solide (6.16)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2 + \dot{Z}_c^2) + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U \quad (6.49)$$

on obtient donc par exemple :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_c} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP_x}{dt} = F_x} \quad (6.50)$$

et de même pour les autres composantes.

6.5.2 Dérivée temporelle du moment cinétique

Pour établir l'équation du mouvement de \vec{L} , on choisit un référentiel galiléen dans lequel $\vec{V}_c = \vec{0}$ à l'instant considéré. On a donc comme dans le paragraphe 6.4

$$d\vec{R} = d\vec{\varphi} \wedge \vec{r} \quad ; \quad \vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad ; \quad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (6.51)$$

Écrivons la dérivée du moment cinétique dans \mathcal{S} (\vec{L} est défini ici par rapport au centre de masse du solide et on omet par simplicité les indices α sur les différents points du solide sur lesquels on somme) :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{r} \wedge m\vec{V} = \sum \dot{\vec{r}} \wedge m\vec{V} + \sum \vec{r} \wedge m\dot{\vec{V}} \quad (6.52)$$

Comme $\vec{V}_c = 0$, on a $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$ si bien que le premier terme dans (6.52) est nul. En remplaçant $m\dot{\vec{V}} = \vec{f}$ dans le deuxième, on obtient

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r} \wedge \vec{f} = \vec{K} \quad (6.53)$$

Ici \vec{K} est le moment total des forces, somme des moments $\vec{r}_\alpha \wedge \vec{f}_\alpha$ des forces agissant sur chaque point du solide. Nous savons par ailleurs que pour un corps isolé $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ puisque les moments venant des forces internes se compensent dans la somme. On a donc le résultat suivant

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K}_{\text{ext}}} \quad (6.54)$$

ou \vec{L} est le moment cinétique du solide et \vec{K}_{ext} est la somme des moments des forces extérieures, tous les deux définis par rapport au centre de masse du solide. Dans le formalisme lagrangien, nous retrouvons (6.53) ou plus précisément sa projection sur les axes x_1, x_2, x_3 en considérant les dérivées de \mathcal{L} par rapport aux angles φ_i , avec $\dot{\varphi}_i = \Omega_i$

Considérons une petite rotation $d\vec{\varphi}$ du solide qui change les coordonnées de toutes les particules d'une quantité $d\vec{R}_\alpha = d\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_\alpha$. Sous l'action de forces conservatives, cas que nous considérons ici, la variation de l'énergie potentielle du solide (opposée à la variation d'énergie cinétique) est donnée par l'opposée du travail effectué par les forces sur le système

$$dU = - \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot d\vec{R}_\alpha = - \sum_\alpha \vec{f}_\alpha \cdot (d\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_\alpha) = -d\vec{\varphi} \cdot \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge \vec{f}_\alpha = -d\vec{\varphi} \cdot \vec{K} \quad (6.55)$$

où \vec{K} est le moment total des forces. En introduisant les composantes de vecteurs sur les axes x_1, x_2, x_3 cela donne

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = -K_1 \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = -K_2 \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} = -K_3 \quad (6.56)$$

Nous savons par ailleurs, voir (6.41), que $I_{ik}\Omega_k = L_i$. À partir du Lagrangien (6.16) on a donc

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dL_i}{dt} = K_i} \quad (6.57)$$

Chapitre 7

Introduction au formalisme Hamiltonien

Dans le formalisme de Lagrange que nous avons illustré jusqu'ici, pour décrire l'état mécanique d'un système à s degrés de liberté, on utilise les *coordonnées* $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ et les *vitesse généralisées* $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$. Cette description n'est pas la seule possible, et nous allons introduire dans ce chapitre une deuxième description qui, au lieu de la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ utilise une fonction dite de Hamilton $\mathcal{H}(q, p)$ où, au lieu des vitesses généralisées, apparaissent les *impulsions généralisées* $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ introduites au paragraphe 4.3.1

$$p_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad (7.1)$$

La transformation qu'on utilise pour passer du Lagrangien au Hamiltonien, qui change ainsi le jeu de variables indépendantes, est la *transformée de Legendre*, que vous avez peut-être déjà rencontrée en thermodynamique.

7.1 Fonction de Hamilton

Écrivons la différentielle totale du Lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q})$

$$d\mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \quad (7.2)$$

Sachant que $p_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ et que, d'après les équations de Lagrange $\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$, nous pouvons écrire

$$d\mathcal{L} = \sum_k \dot{p}_k dq_k + \sum_k p_k d\dot{q}_k \quad (7.3)$$

Écrivons maintenant le deuxième terme sous la forme

$$\sum_k p_k d\dot{q}_k = d\left(\sum_k p_k \dot{q}_k\right) - \sum_k dp_k \dot{q}_k \quad (7.4)$$

En transportant la différentielle totale dans le terme de la gauche de (7.3) et changeant le signe, on obtient

$$d\left(\sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}\right) = -\sum_k \dot{p}_k dq_k + \sum_k \dot{q}_k dp_k \quad (7.5)$$

La quantité sous le signe différentiel dans l'équation (7.5) est appelée fonction de Hamilton ou *Hamiltonien* \mathcal{H}

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}} \quad (7.6)$$

Pour les systèmes conservatifs que nous considérons ici, le Hamiltonien \mathcal{H} représente l'énergie du système. Pour le voir, rappelons l'expression générale du Lagrangien (3.74),

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1,s} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q) \quad (7.7)$$

où il apparait la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. Puisque l'énergie cinétique T est une fonction homogène de degré deux des vitesses généralisées \dot{q}_k , nous pouvons utiliser le théorème d'Euler déjà évoqué pour écrire

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T \quad (7.8)$$

on a donc

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U \quad (7.9)$$

7.1.1 Hamiltonien d'une particule dans un potentiel extérieur $U(x, y, z)$

Dans le cas simple d'une particule dans un potentiel extérieur $U(x, y, z)$, on a :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad ; \quad p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z} \quad (7.10)$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(x, y, z) \quad ; \quad \sum_k p_k \dot{q}_k = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2T \quad (7.11)$$

On a donc

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + U} \quad (7.12)$$

Les impulsions généralisées coïncident ici avec les composantes de la quantité de mouvement habituelle.

Considérons l'exemple d'un pendule plan, de masse m et longueur l . Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (7.13)$$

L'impulsion généralisée conjuguée à l'angle θ est

$$p_\theta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad (7.14)$$

et le Hamiltonien est donc

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \quad (7.15)$$

remarquons que p_θ n'est autre que le moment cinétique du pendule, et, anticipant l'équation de Hamilton (7.23) vue dans la section suivante, on trouve

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mgl \sin \theta \quad (7.16)$$

indique que la dérivée temporelle du moment cinétique est égale au moment des forces extérieures (ici la pesanteur).

7.1.2 Hamiltonien d'une particule chargée dans un champs électromagnétique

Nous avons déjà introduit dans un exemple le Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique (4.74)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - qV + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (7.17)$$

où $V(x, y, z, t)$ et $\vec{A}(x, y, z, t)$ sont les potentiels (scalaire et vecteur) du champ électromagnétique, q est la charge de la particule et $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ sa vitesse. En dérivant l'expression des impulsions généralisées, par exemple

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \quad (7.18)$$

On réalise qu'elles ne coïncident pas ici avec les composantes de la quantité de mouvement habituelle. Le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = m\vec{v} \cdot \vec{v} + q\vec{A} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2}mv^2 + qV \quad (7.19)$$

On constate que le Hamiltonien de la particule s'écrit comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle électrostatique. En exprimant les vitesses en fonction des impulsions généralisées

$$\dot{x} = \frac{1}{m}(p_x - qA_x), \quad \dot{y} = \frac{1}{m}(p_y - qA_y), \quad \dot{z} = \frac{1}{m}(p_z - qA_z) \quad (7.20)$$

le Hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H} = \frac{\|\vec{p} - q\vec{A}\|^2}{2m} + qV \quad (7.21)$$

7.2 Équations de Hamilton

Nous dérivons ici les équations du mouvement dans le formalisme de Hamilton. Reprenons l'expression (7.5) qui donne la différentielle de \mathcal{H}

$$d\mathcal{H} = - \sum_k \dot{p}_k dq_k + \sum_k \dot{q}_k dp_k \quad (7.22)$$

Comme les variables indépendantes de \mathcal{H} sont les q_k et les p_k , on déduit directement les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \quad \text{et} \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \quad (7.23)$$

Le lecteur remarquera la beauté et la symétrie de ces équations. Dans le formalisme Hamiltonien, les équations du mouvement d'un système à s degrés de liberté sont donc $2s$ équations différentielles d'ordre un, au lieu des s équations différentielles d'ordre deux qu'on avait dans le formalisme Lagrangien.

Calculons la dérivée total de \mathcal{H} par rapport au temps :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \quad (7.24)$$

Le terme entre parenthèses est nul grâce aux équations (7.23). On a donc

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (7.25)$$

Si le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, on retrouve la conservation de l'énergie.

7.3 Crochets de Poisson

Soit $f(q, p, t)$ une fonction des coordonnées, des impulsions et du temps. Écrivons la dérivée totale de f par rapport au temps :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \quad (7.26)$$

en utilisant les équations de Hamilton (7.23),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right) \quad (7.27)$$

On introduit les *crochets de Poisson* de f et \mathcal{H} :

$$\boxed{\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right)} \quad (7.28)$$

On a donc

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} \quad (7.29)$$

Les fonctions des variables dynamiques qui ne dépendent pas explicitement du temps et ont un crochet de Poisson nul avec le Hamiltonien, sont donc des *intégrales premières* ou *constantes du mouvement*.

7.3.1 Propriétés des crochets de Poisson

Soient f, g, h, f_1, f_2 des fonctions des variables dynamiques et λ_1, λ_2 des constantes. De la définition des crochets de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \quad (7.30)$$

dérivent les propriétés suivantes :

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad \text{antisymétrie} \quad (7.31)$$

$$\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\} = \lambda_1 \{f_1, g\} + \lambda_2 \{f_2, g\} \quad \text{linéarité} \quad (7.32)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2 \quad \text{crochet d'un produit} \quad (7.33)$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad \text{identité de Jacobi} \quad (7.34)$$

(Les trois premières égalités se voient directement, la quatrième demande un peu de travail².)

Si f ou g coïncide avec une impulsion ou une coordonnée :

$$\{f, q_k\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left(-\delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = -\frac{\partial f}{\partial p_k} \quad (7.35)$$

$$\{f, p_k\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta_{ik} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (7.36)$$

1. Dans la définition des crochets de Poisson, nous prenons la convention de Dirac plutôt que celle de Landau.

2. Remarquons que $\{f, g\}$ est une somme de termes de la forme (une dérivée première de f) \times (une dérivée première de g). De même, le membre de gauche de (7.34) sera une somme de termes de la forme (une dérivée première d'une des trois fonctions) \times (une dérivée première d'une autre des trois fonctions) \times (une dérivée **seconde** de la troisième fonction). Si on démontre que tous les termes faisant intervenir des dérivées secondes de f s'annulent, alors par symétrie ce sera vrai aussi des termes faisant intervenir des dérivées secondes de g ou de h , il ne restera plus aucun terme et on aura démontré (7.34).

Enfin, on a les crochets de Poisson «fondamentaux» :

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik}. \quad (7.37)$$

Notons x_ℓ les variables p_k et q_k de manière indifférenciée : au lieu d'écrire $f = f(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ on écrit $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. On peut écrire

$$\{g, \phi\} = \sum_{\ell} a_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}} \quad \{h, \phi\} = \sum_{\ell} b_{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\ell}}$$

Ici, $a_{\ell} = \partial g / \partial q_k$ si $x_{\ell} = p_k$ et $a_{\ell} = -\partial g / \partial p_k$ si $x_{\ell} = q_k$, et idem pour b_{ℓ} . On a donc

$$\{g, \{h, f\}\} = \sum_{\ell'} a_{\ell'} \frac{\partial}{\partial x_{\ell'}} \left[\sum_{\ell} b_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}} \right] = \sum_{\ell, \ell'} \left[a_{\ell'} b_{\ell} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\ell'} \partial x_{\ell}} + a_{\ell'} \frac{\partial b_{\ell}}{\partial x_{\ell'}} \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}} \right]$$

et de même

$$\{h, \{f, g\}\} = -\{h, \{g, f\}\} = -\sum_{\ell, \ell'} \left[b_{\ell'} a_{\ell} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\ell'} \partial x_{\ell}} + b_{\ell'} \frac{\partial a_{\ell}}{\partial x_{\ell'}} \frac{\partial f}{\partial x_{\ell}} \right]$$

Les termes avec des dérivées secondes de f s'annulent quand on fait la somme $\{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$, il n'y a pas de dérivée seconde de f dans $\{f, \{g, h\}\}$, donc il n'y en a pas dans le membre de gauche de (7.34), et donc ce membre doit être égal à zéro.