Examen de théorie quantique des champs

M1 2010-2011

Vendredi 28 janvier 2011

L'examen comprend un exercice et un problème indépendants. Les différentes parties du problème sont liées. *Cependant tout les résultats nécessaires pour aborder une partie sont donnés explicitement dans le texte.* Il ne faut donc pas hésiter à changer de partie si l'on butte sur un obstacle.

Les questions marquées d'un $^\flat$ sont des questions qui ne servent pas dans la suite.

En fin de texte se trouve un glossaire de formules utiles. N'hésitez pas à la lire avant de commencer le problème et à vous y référer ensuite.

Exercice : Projecteurs et produits normaux.

Soit $\mathcal{F}$ l'espace de Fock associé à la paire d'opérateurs $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ tels que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. On rappelle que cet espace a une base orthonormée $\{|n\rangle; n = 0, 1, \cdots\}$ telle que $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ pour $n = 1, 2, \cdots$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ pour $a = 0, 1, \cdots$.

On désigne par a^* et a des variables commutantes et on définit l'ordre normal d'une fonction de a^* et a développable en série

$$f = \sum_{m,n=0,1,\cdots} f_{m,n}(a^*)^m a^n$$

par

$$\boldsymbol{:} f \boldsymbol{:} \equiv \sum_{m,n=0,1,\cdots} f_{m,n}(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n.$$

I.1 : Pour $m = 0, 1, \cdots$, développer $\boldsymbol{:} e^{\lambda a^* a} \boldsymbol{:} |m\rangle$ sur la base des états $|n\rangle$. ✎

I.2 : En déduire que $\boldsymbol{:} e^{-a^* a} \boldsymbol{:} = |0\rangle\langle 0|$, le projecteur orthogonal sur l'état $|0\rangle$. ✎

On se propose de généraliser ce résultat.

I.3 : En développant le résultat de la première question au voisinage de $\lambda = -1$, montrer que $\boldsymbol{:} \frac{(a^* a)^m}{m!} e^{-a^* a} \boldsymbol{:} = |m\rangle\langle m|$, le projecteur orthogonal sur l'état $|m\rangle$. ✎

Problème :

On démontre en théorie des champs un théorème général appelé représentation de Kählen-Lehmann, dont l'énoncé est le suivant.

– Si $\hat{\phi}$ est un champ scalaire réel dans une théorie des champs minkovskienne de vide $|\,\Omega\,\rangle$, invariante de Poincaré sur l'espace-temps [1] $\mathbb{R}^d$, sa fonction à deux points se décompose comme une combinaison linéaire positive de propagateurs du champs scalaire réel libre. Plus précisément, il existe une fonction $\rho \geqslant 0$ telle que :

$$\langle\,\Omega\,|T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|\,\Omega\,\rangle = \int_0^{+\infty} d\mu^2\,\rho(\mu^2)\Delta_F(x-y,\mu^2)$$

La fonction, dite fonction spectrale, ρ dépend de la théorie des champs et du champ Φ considérés.

On rappelle que $\Delta_F(x,\mu^2)$ est le propagateur de Feynman en dimension d,

$$\Delta_F(x,\mu^2) \equiv \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{ie^{ikx}}{k^2-\mu^2+i0^+}.$$

Dans cette formule kx et k^2 sont à prendre au sens des produits scalaires de l'espace de Minkovski.

Le théorème de représentation de Kählen-Lehmann ne donne pas d'information explicite sur la fonction spectrale. Le but de ce problème est de la calculer explicitement pour un cas simple, et d'appliquer le résultat à un problème de renormalisation.

Partie A : Préliminaires.

Soit $\hat{\varphi}(x)$, $x = (x^0, \cdots, x^D) \in \mathbb{R}^d$ un opérateur agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui contient un vecteur $|\,\Omega\,\rangle$ avec les propriétés suivantes. On peut décomposer $\hat{\varphi}(x)$ sous la forme $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}_+(x) + \hat{\varphi}_-(x)$ avec

- $\hat{\varphi}_-(x)|\,\Omega\,\rangle = 0$ et $\langle\,\Omega\,|\hat{\varphi}_+(x) = 0$ et
- $[\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)]$ est proportionnel à l'opérateur identité Id (donc commute avec tous les opérateurs agissant dans $\mathcal{H}$).

On définit $\hat{\phi}(x) \equiv \hat{\varphi}_+(x)^2 + 2\hat{\varphi}_+(x)\hat{\varphi}_-(x) + \hat{\varphi}_-(x)^2$.

A.1 : $^\flat$ Rappeler brièvement pourquoi les deux propriétés ci-dessus sont vraies si $\hat{\varphi}(x)$ est un champ libre réel (dans la représentation

1. On considère une dimension générique $d = D + 1$. À part cette généralisation, les définitions et notations qui suivent sont celles du cours et devraient être familières. Pour mémoire, $D \simeq 3$ dans le monde réel.

de Heisenberg) sur $\mathbb{R}^d$ de masse m agissant dans l'espace de Fock. Qu'elle est dans ce cas l'interprétation de $\hat{\phi}(x)$? ✎

A.2 : Montrer que

$$[\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)] = \langle\, \Omega\, | \hat{\varphi}_-(x)\hat{\varphi}_+(y) |\, \Omega\, \rangle \,\mathrm{Id}$$

et que

$$\langle\, \Omega\, | \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) |\, \Omega\, \rangle = \langle\, \Omega\, | \hat{\varphi}_-(x)\hat{\varphi}_+(y) |\, \Omega\, \rangle$$

✎

A.3 : Montrer que

$$\langle\, \Omega\, | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |\, \Omega\, \rangle = \langle\, \Omega\, | \hat{\varphi}_-(x)^2\hat{\varphi}_+(y)^2 |\, \Omega\, \rangle$$

✎

A.4 : En déduire en appliquant les relations de commutation que

$$\langle\, \Omega\, | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |\, \Omega\, \rangle = 2\langle\, \Omega\, | \hat{\varphi}_-(x)\hat{\varphi}_+(y) |\, \Omega\, \rangle^2.$$

✎

A.5 : Conclure des questions précédentes que

$$\langle\, \Omega\, | T\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) |\, \Omega\, \rangle = 2\langle\, \Omega\, | T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) |\, \Omega\, \rangle^2.$$

Examinez séparément les deux cas $x^0 > y^0$ et $x^0 < y^0$. ✎

A.6 : $^\flat$ Dans le cas où $\hat{\varphi}$ est un champ libre, comparer le résultat précédent à la valeur de $\langle\, \Omega\, | T\hat{\varphi}(x)^2\hat{\varphi}(y)^2 |\, \Omega\, \rangle$ obtenue par application du théorème de Wick. Interpréter. ✎

Dans toute la suite, on suppose de plus que $\hat{\varphi}$ à la même fonction à deux points qu'un champ libre réel de masse m, i.e.

$$\langle\, \Omega\, | T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) |\, \Omega\, \rangle = \Delta_F(x-y, m^2).$$

Le théorème de représentation de Kählen-Lehmann garantit donc l'existence d'une fonction spectrale ρ telle

$$2\Delta_F(x-y, m^2)^2 = \int_0^{+\infty} d\mu^2\, \rho(\mu^2)\Delta_F(x-y, \mu^2),$$

et l'objectif est de calculer ρ explicitement.

Les deux membres ne dépendent que de $x-y$ (invariance par translation), on ne perd donc rien à supposer que $y = 0$. On utilise la rotation de Wick et on est donc ramené à écrire

$$2\Delta_E(x, m^2)^2 = \int_0^{+\infty} d\,\mu^2 \rho(\mu^2)\Delta_E(x, \mu^2), \qquad (1)$$

où $\Delta_E(x,\mu^2)$ est le propagateur Euclidien

$$\Delta_E(x,\mu^2) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{k^2+\mu^2}. \tag{2}$$

Dans cette formule kx et k^2 sont à prendre au sens des produits scalaires de l'espace Euclidien.

Partie B : Identités impliquant le propagateur euclidien

B.1 : En partant de la formule (2) pour le propagateur euclidien, montrer que $\Delta_E(x,m^2)^2 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} I(k,m^2)$ où

$$I(k,m^2) \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(k-q)^2+m^2}.$$

✎

B.2 : En conclure en utilisant la représentation de Kählen-Lehmann (1) que

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(k-q)^2+m^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} d\,\mu^2 \rho(\mu^2) \frac{1}{k^2+\mu^2}. \tag{3}$$

Pour quelles valeurs de d l'intégrale du membre de gauche est-elle convergente ? ✎

B.3 : En partant de la formule (2) pour le propagateur euclidien, montrer, via la représentation (10) de $(k^2+m^2)^{-1}$ et le calcul de l'intégrale gaussienne de dimension d résultante, que

$$\Delta_E(x,m^2) = \int_0^{+\infty} dw\, \frac{1}{(4\pi w)^{d/2}} e^{-m^2 w - x^2/(4w)}.$$

En déduire que

$$\Delta_E(x,m^2) = \int_0^{+\infty} dt\, \frac{t^{d/2-2}}{(4\pi)^{d/2}} e^{-m^2/t - t x^2/4}. \tag{4}$$

puis que

$$\Delta_E(x,m^2)^2 = \frac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{+\infty} du dv\, (uv)^{d/2-2} e^{-m^2(u+v)/(uv) - (u+v)x^2/4}.$$

✎

On insère dans cette formule l'identité $1 = \int_0^{+\infty} dt\, \delta(t-u-v)$ puis, pour t fixé, on fait le changement de variables $u = t\alpha$, $v = t\beta$. A priori $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$ mais on remarque qu'à cause de la fonction δ, leur domaine de variation effectif est plus réduit.

B.4 : Vérifier que l'on obtient

$$2\Delta_E(x, m^2)^2 = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-tx^2/4}\, L(t)$$

avec

$$L(t) \equiv \frac{2t^{d-3}}{(4\pi)^d} \int_0^1 d\alpha\, (\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-m^2/(t\alpha(1-\alpha))}.$$

B.5 : En utilisant la formule (4) de la question B.3 (avec μ^2 à la place de m^2) vérifier que

$$\int_0^{+\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_E(x, \mu^2) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-tx^2/4}\, R(t)$$

avec

$$R(t) \equiv \frac{t^{d/2-2}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} d\mu^2\, \rho(\mu^2) e^{-\mu^2/t}.$$

La représentation de Kählen-Lehmann s'écrit donc

$$\int_0^{+\infty} dt\, e^{-tx^2/4} L(t) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-tx^2/4}\, R(t).$$

B.6 : En interprétant cette identité comme une égalité de transformées de Laplace, conclure que pour tout $t \geqslant 0$

$$\frac{2t^{d/2-1}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 d\alpha\, (\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-m^2/(t\alpha(1-\alpha))} = \int_0^{+\infty} d\mu^2\, \rho(\mu^2) e^{-\mu^2/t}. \quad (5)$$

Partie C : Calcul de la densité spectrale

Cette partie exploite la relation (5) pour calculer ρ. *On suppose* $d > 2$.

C.1 : En utilisant l'identité (9) pour $a = 1/t$ et $s = d/2 - 1$, montrer que le membre de gauche de la relation (5) s'écrit

$$\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int_0^{+\infty} dw \int_0^1 d\alpha\, (w\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-m^2/(t\alpha(1-\alpha)) - w/t}.$$

C.2 : En insérant dans cette expression l'identité $1 = \int_0^{+\infty} d\mu^2\, \delta(\mu^2 - m^2/(\alpha(1-\alpha)) - w)$ et en effectuant l'intégrale sur w, vérifier que le membre de gauche de l'identité (5) peut s'écrire

$$\int_0^{+\infty} d\mu^2 \left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int_0^1 d\alpha\, \frac{H(\mu^2\alpha(1-\alpha)-m^2)}{(\mu^2\alpha(1-\alpha)-m^2)^{2-d/2}} \right) e^{-\mu^2/t},$$

où H désigne la fonction de Heaviside, qui prend la valeur 1 quand son argument est positif et 0 quand son argument est négatif.

C.3 : En interprétant (5) à l'aide de cette formule pour le membre de gauche comme une égalité de transformées de Laplace, conclure que

$$\rho(\mu^2) = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int_0^1 d\alpha\, \frac{H(\mu^2\alpha(1-\alpha)-m^2)}{(\mu^2\alpha(1-\alpha)-m^2)^{2-d/2}}.$$

Posant $\alpha = (1+\gamma)/2$, il vient

$$\rho(\mu^2) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int_{-1}^1 d\gamma\, \frac{H((\mu^2-4m^2)-\mu^2\gamma^2)4^{2-d/2}}{((\mu^2-4m^2)-\mu^2\gamma^2)^{2-d/2}}.$$

C.4 : En faisant un changement d'échelle dans l'intégrale, montrer que

$$\rho(\mu^2) \propto \frac{H(\mu^2-4m^2)}{\mu(\mu^2-4m^2)^{(3-d)/2}}. \tag{6}$$

C.5 : La fonction $\rho(\mu^2)$ s'annule en dessous d'un certain seuil. Interpréter.

C.6 : Calculer la constante de proportionnalité dans (6)[2]. Vérifier que pour $d = 6$

$$\rho(\mu^2) = \frac{1}{192\pi^3} \frac{H(\mu^2-4m^2)}{\mu(\mu^2-4m^2)^{-3/2}}. \tag{7}$$

Partie D : « Graphologie » pour la théorie ψ^3 à $d = 6$.

2. On pensera à consulter le formulaire.

Les réponses aux questions de cette partie sont des adaptations mineures de résultats vus en cours. Il est inutile de donner des justifications détaillées. On raisonnera par analogie avec le cas de la théorie ϕ^4 à $d = 4$.

On considère une théorie des champs d'action

$$S(\psi) = \int d^6x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 - \frac{\lambda}{3!}\psi^3 \right).$$

pour un champ scalaire réel ψ.

D.1 : $^\flat$ Quelle est la dimension de la constante de couplage (si l'action est sans dimension) ? ✎

En suivant la procédure de quantification habituelle, on obtient une théorie quantique pour un champ $\hat{\psi}$. Les fonctions de corrélation de $\hat{\psi}$ s'expriment comme d'habitude en terme des fonctions de corrélation d'un champ libre $\hat{\varphi}$ dans la représentation de Heisenberg. Par exemple pour la fonction à deux points on obtient

$$\langle \Omega | T\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) \exp(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^6z\, \hat{\varphi}(z)^3) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^6z\, \hat{\varphi}(z)^3) | 0 \rangle}$$

où $| 0 \rangle$ est le vide de l'espace de Fock de $\hat{\varphi}$. On peut alors, comme à l'accoutumée, développer en série de puissances de la constante de couplage λ en appliquant le théorème de Wick et réorganiser ce développement comme une somme de contributions associées à des graphes.

D.2 : Quels graphes de Feynman contribuent à

$$\langle 0 | T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) \exp(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^6z\, \hat{\varphi}(z)^3) | 0 \rangle$$

à l'ordre n en λ ? ✎

D.3 : Quels graphes de Feynman contribuent à

$$\langle \Omega | T\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) | \Omega \rangle$$

à l'ordre n en λ ? ✎

D.4 : Quels graphes de Feynman contribuent à

$$\langle \Omega | T\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) | \Omega \rangle_c \equiv \langle \Omega | T\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) | \Omega \rangle - \langle \Omega | T\hat{\psi}(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | T\hat{\psi}(y) | \Omega \rangle$$

à l'ordre n en λ ? ✎

Par invariance par translation, la fonction à deux points ne dépend que que $x - y$ et l'on définit

$$G_F(k) \equiv \int d^6x\, e^{-ikx} \langle\, \Omega\,| T\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(0) |\, \Omega\,\rangle_c.$$

D.5 : Vérifier qu'à l'ordre 2 en λ,

$$\begin{aligned} G_F(k) &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i0^+} \\ &- \frac{\lambda^2}{2}\frac{i}{k^2 - m^2 + i0^+} I_F(k, m^2) \frac{i}{k^2 - m^2 + i0^+} \\ &+ O(\lambda^4). \end{aligned}$$

où

$$I_F(k, m^2) \equiv \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{i}{q^2 - m^2 + i0^+} \frac{i}{(k-q)^2 - m^2 + i0^+}$$

On interprétera le terme du second ordre en λ en termes d'un graphe et des règles de Feynman. ✎

Il est commode de passer à la version euclidienne. On rappelle que lors de la rotation de Wick, le propagateur de Feynman est remplacé le propagateur euclidien. Pour tenir compte de la rotation de Wick $z^0 \to -iz^6$ aussi dans le terme $\exp(-i\frac{\lambda}{3!}\int d^6z\, \hat{\varphi}(z)^3)$, la constante de couplage $i\lambda$ est remplacée par λ.

La version euclidienne G de G_F est donc donnée à l'ordre 2 en λ par

$$G(k) = \frac{1}{k^2 + m^2} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{1}{k^2 + m^2} I(k, m^2) \frac{1}{k^2 + m^2} + O(\lambda^4).$$

où $I(k, m^2)$ est la fonction introduite à la question B.1 (spécialisée à $d = 6$ bien sûr).

L'interprétation intuitive du graphe de Feynman contribuant à l'ordre λ^2 est qu'un particule d'impulsion k se désintègre en deux particules qui collisionnent pour redonner une seule particule.

D.6 : Montrer que la représentation de Kählen-Lehmann (3) donne une autre interprétation intuitive de ce processus. ✎

D.7 : En général, quels sont les graphes qui contribuent à $1/G(k)$? Donner le développement de $1/G(k)$ à l'ordre 2 en λ. ✎

Partie E : Renormalisation à une boucle.

On part de la formule

$$\begin{aligned} 1/G(k) &= k^2 + m^2 - \frac{\lambda^2}{2} I(k, m^2) + O(\lambda^4) \\ &= k^2 + m^2 - \frac{\lambda^2}{4} \int_0^{+\infty} d\,\mu^2 \rho(\mu^2) \frac{1}{k^2 + \mu^2} + O(\lambda^4). \end{aligned}$$

La fonction

$$I(k, m^2) = \int \frac{d^6q}{(2\pi)^6} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(k-q)^2 + m^2}$$

est en fait mal définie.

E.1 : De quel type de divergence souffre l'intégrale ci-dessus ? Montrer que dans la représentation de Kählen-Lehmann (3) de $I(k, m^2)$ où la densité spectrale ρ est donnée explicitement en (7) les divergences sont bien du même type et proviennent des grandes valeurs de μ^2. ✎

À cause de cette divergence, il faut réinterpréter les calculs précédents. On suppose que dans la « vraie« théorie microscopique l'échange de particules de masse très élevée est pénalisé, de sorte qu'à basse énergie, la « vraie« densité spectrale microscopique r soit proche de ρ, mais qu'à très haute énergie, r soit assez petite pour que

$$\int_0^{+\infty} d\,\mu^2 r(\mu^2) \frac{1}{k^2 + \mu^2}$$

soit convergente. On veut en déduire la physique de basse énergie de la théorie, où seules les propriétés de $1/G(k)$ à « petit » k sont accessibles.

Dans la théorie libre, i.e. à l'ordre 0 en λ, $1/G(k) = m^2 + k^2$. En particulier, m^2 est simplement la valeur de $1/G(k)$ à $k^2 = 0$ et la dérivée de $1/G(k)$ par rapport à k^2 vaut simplement 1.

Dans la théorie en interaction, rien de cela n'est vrai. Cependant, changer la normalisation du champ ne change pas vraiment la physique. On peut remplacer ψ par $\psi_r = Z^{-1/2}\psi$. Ceci revient à considérer $G_r(k) \equiv G(k)/Z$ à qui l'on peut imposer qu'il ressemble au propagateur libre, par exemple en imposant, pour k^2 proche d'une certaine échelle d'énergie de référence fixée, notée K^2, la relation $1/G_r(k) - 1/G_r(K) \sim k^2 - K^2$. On peut aussi définir une masse m_r par la condition $m_r^2 = 1/G_r(0)$. Notez que les conditions sont imposées directement à la fonction de corrélation, qui est en principe mesurable dans les expériences.

E.2 : Partant de la formule

$$1/G(k) = k^2 + m^2 - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^{+\infty} d\,\mu^2 r(\mu^2)\frac{1}{k^2+\mu^2} + O(\lambda^4),$$

montrer que les conditions de normalisation sont :

$$Z = 1 - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^{+\infty} d\mu^2\, r(\mu^2)\frac{1}{(K^2+\mu^2)^2} + O(\lambda^4),$$

et

$$m_r^2 = m^2 - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^{+\infty} d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{m^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right) + O(\lambda^4).$$

✎

Cette dernière relation peut s'inverser (en théorie des perturbations) pour obtenir m^2 en fonction de m_r^2.

Dans un traitement plus complet de la théorie, il faudrait aussi définir la constante de couplage λ_r adaptée à la physique de basse énergie par une condition physique. On trouve trouve alors que $\lambda_r = \lambda + O(\lambda^3)$.

E.3 : Montrer que réexprimée en fonction de m_r et λ_r,

$$1/G_r(k) = k^2 + m_r^2 - \frac{\lambda_r^2}{4}\int_0^{+\infty} d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right) + O(\lambda_r^4).$$

✎

E.4 : Comment se comporte

$$\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}$$

pour μ^2 grand ? ✎

E.5 : En conclure que, si ρ est la fonction spectrale donnée explicitement en (7) (en substituant m_r pour m), l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} d\mu^2\, \rho(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$

est convergente. ✎

On suppose que $\rho(\mu^2)$ (en y substituant m_r pour m) et $r(\mu^2)$ ne diffèrent de façon appréciable qu'à partir d'une échelle d'énergie d'ordre Λ^2.

E.6 : En déduire par analyse dimensionnelle naïve que pour $k^2, K^2, m_r^2 << \Lambda^2$ (la fenêtre de basse énergie) on a

$$1/G_r(k) = k^2 + m_r^2 - \frac{\lambda_r^2}{4}\int_0^{+\infty} d\mu^2\,\rho(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right) + O(\lambda_r^4),$$

à des termes d'ordre Λ^{-2} près[3]. ✎

Dans cette gamme d'énergie, on peut donc prendre la limite $\Lambda^2 \to \infty$ et obtenir une théorie de basse énergie renormalisée finie et indépendante des détails de la « vrai » théorie microscopique.

On applique ce résultat au cas où la théorie de basse énergie est de masse nulle, i.e. $m_r = 0$.

E.7 : $^\flat$ Calculer explicitement $1/G_r(k)$ (à la limite $\Lambda^2 \to \infty$) pour $m_r = 0$ à l'ordre 2 en λ_r. Que se passe t-il pour $K^2 \to 0$? ✎

3. Un calcul plus soigneux montrerai qu'il y a en fait des termes en $\Lambda^{-2}\log\Lambda$ qui ne changent rien à la discussion.

Glossaire de concepts et formules

– Intégrale gaussienne unidimensionnelle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2+iuv} = e^{-v^2/4}.$$

– Fonction δ de Dirac :

Si f est une fonction dérivable,

$$\delta(f(w)) = \sum_{a, f(a)=0} \frac{1}{|f'(a)|} \delta(w-a).$$

Dans la somme sur a, a parcourt l'ensemble des zéros de fonction f.

– Transformation de Laplace-Fourier :

Si f est une fonction continue définie pour $w > 0$, intégrable au voisinage de l'origine et telle que pour un certain réel A, $f(w) = O(e^{Aw})$ lorsque $w \to +\infty$, on définit sa transformée de Laplace F par

$$F(a) = \int_0^{+\infty} dw\, e^{-aw} f(w), \;\; a > A.$$

La formule d'inversion de Fourier montre le résultat important suivant : si f et g on des transformées de Laplace F et G qui coïncident pour a assez grand, alors $f = g$.

– Représentations diverses :

La fonction Γ d'Euler est définie pour $s > 0$ par la formule

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} dw\, e^{-w} w^{s-1}. \tag{8}$$

En certains points la fonction Γ prend des valeurs simples. Ainsi, $\Gamma(1) = 1$ (clair) et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (un peu moins clair).

On montre, par exemple via une intégration par partie, que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

Par récurrence on obtient alors que

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ pour } n = 0, 1, \cdots.$$

et que

$$\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n} = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{4^n n!} \text{ pour } n = 0, 1, \cdots .$$

Par changement de variable on vérifie que, pour $a, s > 0$,

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} dw \, e^{-aw} w^{s-1}. \tag{9}$$

Pour être un peu pédant, La transformée de Laplace de $\frac{w^{s-1}}{\Gamma(s)}$ est $1/a^s$...

La cas particulier $s = 1$ est élémentaire :

$$\frac{1}{a} = \int_0^{+\infty} dw \, e^{-aw} \qquad a > 0. \tag{10}$$

La fonction Γ d'Euler permet d'exprimer la valeur de nombreuses intégrales courantes. Par exemple :

$$\int_{-1}^{1} d\nu \left(\frac{1}{1-\nu^2}\right)^{2-d/2} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(d/2-1)}{\Gamma(d/2-1/2)}.$$