TQC. Examen M1

2010 - 2011

Exercice

I.1. Par définition $e^{\lambda a^* a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (a^*)^k a^k$ donc

$: e^{\lambda a^* a} : = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\hat{a}^+)^k a^k$. Pour $k, m \geq 0$

$$\hat{a}^k |m\rangle = \begin{cases} 0 & k > m \\ \sqrt{m(m-1)\cdots(m-k+1)}\, |m-k\rangle & m \geq k \end{cases}$$

Mais pour $m \geq k$

$$(\hat{a}^+)^k |m-k\rangle = \sqrt{(m-k+1)(m-k+2)\cdots m}\, |m\rangle$$

Donc $(a^+)^k a^k |m\rangle = \begin{cases} 0 & k > m \\ \frac{m!}{(m-k)!} |m\rangle & m \geq k \end{cases}$

Donc $: e^{\lambda a^* a} : |m\rangle = \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{m!}{(m-k)!} |m\rangle$

$$= (1+\lambda)^m |m\rangle \quad (1)$$

I.2. Pour $\lambda = -1$ ceci vaut 0 $(m > 0)$ ou $|0\rangle$ $(m=0)$

Concl $: e^{-a^* a} : |m\rangle = \delta_{m,0} |0\rangle$

Mais $|0\rangle\langle 0|m\rangle = \delta_{m,0}|0\rangle$ donc

$:e^{-a^*a}: = |0\rangle\langle 0|$, le projecteur orthogonal sur le vide.

I.3. On pose $\lambda = -1+\varepsilon$ dans (1)

$:e^{(-1+\varepsilon)a^*a}: |m\rangle = \varepsilon^m |m\rangle$ soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} :e^{-a^*a} \frac{\varepsilon^k}{k!}(a^*a)^k: |m\rangle = \varepsilon^m |m\rangle$$

En identifiant terme à terme en ε il vient $:e^{-a^*a}\frac{(a^*a)^k}{k!}: |m\rangle = \delta_{k,m}|m\rangle$

Mais $|k\rangle\langle k|m\rangle = \delta_{k,m}|m\rangle$ donc

$:e^{-a^*a}\frac{(a^*a)^k}{k!}: = |k\rangle\langle k|$ le projecteur orthogonal sur l'état $|k\rangle$.

Problème

A.1. Le champ libre $\hat{\varphi}$ est une combinaison linéaire d'opérateurs de création et d'annihilation $\underbrace{a^{\dagger}_{\vec{k}},\ a_{\vec{k}}}_{\vec{k} \in \mathbb{R}^D}$. On écrit $\hat{\varphi} = \underbrace{\varphi_+}_{\text{création}} + \underbrace{\varphi_-}_{\text{annihilations}}$

Les opérateurs de création commutent entre eux et annihilent $\langle 0|$, le vide de l'espace de Fock. Les opérateurs d'annihilation commutent entre eux et annihilent $|0\rangle$.

Les opérateurs de création et d'annihilation ont des commutateurs proportionnels à l'identité. Ceci garantit que les deux propriétés de l'énoncé sont satisfaites.

Dans ce cas $\hat{\phi}(x) = :\varphi^2(x):$

A.2. Comme $[\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)] \propto \mathrm{Id}$, si l'on écrit $[\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)] = C\ \mathrm{Id}$ on a

$\langle \Omega | [\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)] | \Omega \rangle = C$. Mais

$[\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)] = \hat{\varphi}_-(x)\hat{\varphi}_+(y) - \hat{\varphi}_+(y)\hat{\varphi}_-(x)$ et

$\varphi_-(x)\,|\Omega\rangle = 0$ Donc

$$C = \langle\Omega|\,\hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y)\,|\Omega\rangle$$

Enfin $\hat\varphi(x)\,\hat\varphi(y) = \hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y) + \hat\varphi_+(x)\,\hat\varphi_+(y)$

$+ \hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_-(y) + \hat\varphi_+(x)\,\hat\varphi_-(y)$

Les trois derniers termes annihilent soit $|\Omega\rangle$ soit $\langle\Omega|$. Donc

$$\langle\Omega|\,\hat\varphi(x)\,\hat\varphi(y)\,|\Omega\rangle = \langle\Omega|\hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y)|\Omega\rangle$$

A.3. $\langle\Omega|\,\hat\phi(x) = \langle\Omega|\,\hat\varphi_-(x)^2$ (les deux autres termes de $\hat\phi(x)$ annihilent $\langle\Omega|$)

et de même $\hat\phi(y)\,|\Omega\rangle = \varphi_+(y)^2\,|\Omega\rangle$ donc

$$\langle\Omega|\,\hat\phi(x)\,\hat\phi(y)\,|\Omega\rangle = \langle\Omega|\,\varphi_-(x)^2\,\varphi_+(y)^2\,|\Omega\rangle$$

A.4. $\varphi_-(x)^2\,\varphi_+(y)^2 = \hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y)\,\hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y)$

$$+ \hat\varphi_-(x)\,\underbrace{[\hat\varphi_-(x), \hat\varphi_+(y)]}_{\text{commute avec tout}}\,\hat\varphi_+(y)$$

Mais $\hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y)\,\hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y) =$

$$\hat\varphi_+(y)\,\hat\varphi_-(x)^2\,\hat\varphi_+(y) + [\varphi_-(x), \varphi_+(y)]\;\hat\varphi_-(x)\,\hat\varphi_+(y)$$

Finalement $\hat{\varphi}_-(x)^2\hat{\varphi}_+(y)^2 = \hat{\varphi}_+(y)\,\hat{\varphi}_-(x)^2\,\hat{\varphi}_+(y)$

$$+ 2\,[\hat{\varphi}_-(x), \hat{\varphi}_+(y)]\ \hat{\varphi}_-(x)\,\hat{\varphi}_+(y)$$

Le premier terme annihile $\langle\Omega|$ donc

$$\langle\Omega|\hat{\varphi}_-(x)^2\,\hat{\varphi}_+(y)^2|\Omega\rangle = 2\,\langle\Omega|\,C\,\mathrm{Id}\ \hat{\varphi}_-(x)\,\hat{\varphi}_+(y)|\Omega\rangle$$

où $C = \langle\Omega|\hat{\varphi}_-(x)\,\hat{\varphi}_+(y)|\Omega\rangle$ d'après A.2.

Donc $\langle\Omega|\hat{\varphi}_-(x)^2\hat{\varphi}_+(y)^2|\Omega\rangle = 2\,\langle\Omega|\hat{\varphi}_-(x)\,\hat{\varphi}_+(y)|\Omega\rangle^2$

D'après A.3 $\langle\Omega|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)|\Omega\rangle = 2\langle\Omega|\hat{\varphi}_-(x)\,\varphi_+(y)|\Omega\rangle^2$

$$\underset{\text{par A.2}}{=} 2\langle\Omega|\hat{\varphi}(x)\,\hat{\varphi}(y)|\Omega\rangle^2$$

<u>A.5.</u> Dans le cas $x^0 > y^0$ on a

$$T\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) = \hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)$$

$$T\,\hat{\varphi}(x)\,\hat{\varphi}(y) = \hat{\varphi}(x)\,\hat{\varphi}(y) \quad \text{et}$$

les deux membres coincident par A.4.

Le cas $x^0 < y^0$ est similaire.

Donc $\langle\Omega|T\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)|\Omega\rangle = 2\,\langle\Omega|T\,\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)|\Omega\rangle^2$

<u>A.6</u> Si l'on applique le théorème de Wick

à $\langle\Omega|T\,\hat{\varphi}(x)^2\hat{\varphi}(y)^2|\Omega\rangle$ où $\hat{\varphi}(x)$ est un champ scalaire libre réel, il y a un terme supplémentaire $\langle\Omega| T\, \hat{\varphi}(x)^2 |\Omega\rangle \langle\Omega| T\, \hat{\varphi}(y)^2 |\Omega\rangle$.

Donc $\langle\Omega| T :\varphi(x)^2: :\varphi(y)^2: |\Omega\rangle$ differe de $\langle\Omega| T\, \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 |\Omega\rangle$ par le fait qu'un des trois contractions de Wick est absente, celle qui contracterai des champs à l'intérieur du produit normal. On montre que c'est là un phénomène général.

<u>B.1.</u> On a

$$\Delta_E(x,m^2)^2 = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{e^{ipx}}{p^2+m^2} \frac{e^{iqx}}{q^2+m^2}$$

À q fixé, on fait le changement de variable $p = k-q$ et le résultat annoncé suit

<u>B.2.</u> On a donc, d'après la représentation de Källen-Lehmann

$$2\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} I(k,m^2)\, e^{ikx} = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{e^{ikx}}{k^2+\mu^2}$$

Modulo une inversion d'ordre d'intégrales qu'on ne cherche pas à justifier, on en déduit que les fonctions de k $2I(k,m^2)$ et $\int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2)\frac{1}{k^2+\mu^2}$ ont même transformée de Fourier donc qu'elles coïncident (pour être pédant : presque partout). Ceci conduit à la formule (3)

B.3

$$\Delta_E(x, m^2) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{e^{ipx}}{p^2+m^2}$$

$$= \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} e^{ipx} \int_0^\infty e^{-t(p^2+m^2)} dt$$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-tm^2} \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} e^{ipx - tp^2}$$

Pour t fixé on fait le changement de variable $k = t^{1/2} p$. L'intégrale sur p devient

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} t^{-d/2} e^{-k^2 - \frac{k\cdot x}{\sqrt{t}}}$$

L'intégrale est un produit de d intégrales gaussiennes, et la formule de l'appendice donne $\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} e^{ipx - tp^2} = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

Substituant w pour la variable muette t, il vient

$$\Delta_E(x, m^2) = \int_0^\infty \frac{dw}{(4\pi w)^{d/2}}\, e^{-wm^2 - \frac{x^2}{4w}}$$

Posant $w = 1/t$ il vient

$$\Delta_E(x, m^2) = \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi)^{d/2}}\, t^{d/2-2}\, e^{-m^2/t - tx^2/4}$$

On utilise cette représentation pour $\Delta_E(x, m^2)^2$ en utilisant à la place de la variable muette t la variable u pour le premier propagateur et la variable v pour le second. Ceci mène directement au résultat demandé.

B.4. $2\Delta(x, m^2)^2 =$

$$2\int_0^\infty dt \underbrace{\int_0^\infty \frac{du\, dv}{(4\pi)^d} (uv)^{d/2-2}\, e^{-(u+v)\left(\frac{m^2}{uv} + \frac{x^2}{4}\right)}}_{u = t\alpha \qquad v = t\beta}\, \delta(t-u-v)$$

$2\Delta(x, m^2)^2 =$

$$2\int_0^\infty \frac{dt\; t^{d-2}}{(4\pi)^d} \int_0^\infty d\alpha\, d\beta\, (\alpha\beta)^{d/2-2}\, e^{-(\alpha+\beta)\left(\frac{m^2}{\alpha\beta t} + \frac{tx^2}{4}\right)}\, \delta(t(1-\alpha-\beta))$$

On utilise $\delta(t(1-\alpha-\beta)) = \frac{1}{t}\delta(\alpha+\beta-1)$ (formulaire)

A cause de $\delta(\alpha+\beta-1)$ l'intégrale sur β s'annulle si $\alpha > 1$, d'où

$$2\Delta_E(x,m^2)^2 = 2\int_0^\infty \frac{dt\; t^{d-3}}{(4\pi)^d} \int_0^1 d\alpha\,(\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-\frac{m^2}{\alpha(1-\alpha)t} - \frac{t x^2}{4}}$$

On reconnait

$$L(t) = \frac{2}{(4\pi)^d} t^{d-3} \int_0^1 d\alpha\,(\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-\frac{m^2}{\alpha(1-\alpha)t}}$$

B.5 $\int_0^\infty d\mu^2\, \rho(\mu^2)\, \Delta_E(x,\mu^2)$

$$= \int_0^\infty d\mu^2\,\rho(\mu^2) \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi)^{d/2}} t^{d/2-2} e^{-\frac{\mu^2}{t} - t\frac{x^2}{4}}$$

Cette fois, l'intégrant est positif donc pas besoin de réfléchir pour échanger l'ordre des intégrales !

On reconnait

$$R(t) = \frac{t^{d/2-2}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty d\mu^2\,\rho(\mu^2)\, e^{-\mu^2/t}$$

B.6 De l'égalité $\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{tx^2}{4}} L(t) = \int_0^\infty dt\, e^{-\frac{tx^2}{4}} R(t)$

qui s'interprète comme l'égalité des transformées de Laplace-Fourier de $L(t)$ et $R(t)$ en la variable $\frac{x^2}{4}$ qui décrit tout $\mathbb{R}^+$, on déduit

$$L(t) = R(t) \quad \text{i.e.}$$

$$\int_0^\infty d\mu^2 \, \rho(\mu^2)\, e^{-\mu^2/t} = \frac{2\, t^{d/2-1}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 d\alpha \, (\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-\frac{m^2}{t\alpha(1-\alpha)}}$$

C.1. Dans le membre de droite on remplace $t^{d/2-1}$ par

$$\left(\frac{1}{t^{-1}}\right)^{d/2-1} = \frac{1}{\Gamma(d/2-1)} \int_0^\infty e^{-w/t}\, w^{d/2-2}\, dw,$$

ce qui mène à l'expression

$$\frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(d/2-1)} \int_0^\infty dw \int_0^1 d\alpha \, (w\,\alpha(1-\alpha))^{d/2-2} e^{-\frac{m^2}{t\alpha(1-\alpha)} - \frac{w}{t}}$$

pour le membre de droite.

C.2 On insère $1 = \int_0^\infty d\mu^2 \, \delta\!\left(\mu^2 - \frac{m^2}{\alpha(1-\alpha)} - w\right)$.

L'intégrale par w s'annule si $\mu^2 - \frac{m^2}{\alpha(1-\alpha)} < 0$, et il vient

$$\int_0^\infty d\mu^2 \left(\frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(d/2-1)} \int_0^1 d\alpha \, \frac{H(\mu^2\alpha(1-\alpha) - m^2)}{(\mu^2\alpha(1-\alpha) - m^2)^{2-d/2}} \right) e^{-\mu^2/t}$$

C.3 D'après (5) ceci vaut $\int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) e^{-\mu^2/t}$

Comme cette égalité a lieu quelque soit $t>0$, on conclut par une interprétation en termes de transformées de Laplace-Fourier en la variable $1/t$ que

$$\rho(\mu^2) = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(d/2-1)} \int_0^1 d\alpha \, \frac{H(\mu^2 \alpha(1-\alpha) - m^2)}{(\mu^2 \alpha(1-\alpha) - m^2)^{2-d/2}}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int_{-1}^1 d\gamma \, \frac{H(\mu^2 - 4m^2 - \mu^2\gamma^2) 4^{2-d/2}}{(\mu^2 - 4m^2 - \mu^2\gamma^2)^{2-d/2}}$$

d'après l'énoncé

C.4 Si $\mu^2 - 4m^2 < 0$ l'intégrant s'annulle identiquement. Sinon on pose $\gamma = \frac{\nu}{\mu}\sqrt{\mu^2-4m^2}$ pour obtenir

$$\rho(\mu^2) = \frac{H(\mu^2-4m^2)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-4m^2}}}^{\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-4m^2}}} \frac{d\nu}{\mu} \frac{H(1-\nu^2) 4^{2-d/2}\sqrt{\mu^2-4m^2}}{(1-\nu^2)^{2-d/2} \, (\mu^2-4m^2)^{2-d/2}}$$

Les bornes $\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-m^2}}$ et $-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-4m^2}}$ contiennent l'intervalle $[-1,1]$ donc il vient

$$\rho(\mu^2) = \frac{H(\mu^2-4m^2)}{\mu\,(\mu^2-4m^2)^{\frac{3-d}{2}}} \int_{-1}^{1} \frac{d\nu\; 4^{2-d/2}}{(4\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2-1)} \frac{1}{(1-\nu^2)^{2-d/2}}$$

ce qui implique bien (6)

<u>C.5</u> : On a $\rho(\mu^2) = 0$ pour $\mu^2 < 4m^2$.

Si on a deux particules de masse m d'énergie $k_1^0, k_2^0 \geq m$ libres alors

$$\underbrace{(k_1+k_2)^2}_{\text{Minkovski}} = 2m^2 + \underbrace{2\,k_1\cdot k_2}$$

Mais $\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2 \leq \|\vec{k}_1\|\,\|\vec{k}_2\|$ donc

$$k_1\cdot k_2 = k_1^0\,k_2^0 - \vec{k}_1\cdot\vec{k}_2$$

$$\geq \sqrt{\vec{k}_1^{\,2}+m^2}\,\sqrt{\vec{k}_2^{\,2}+m^2} - \|\vec{k}_1\|\,\|\vec{k}_2\| \geq m^2$$

Donc $(k_1+k_2)^2 \geq 4m^2$

Donc le seuil est aussi l'énergie minimale d'un état à deux particules.

<u>C.6.</u> En utilisant la formule de l'appendice

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\nu}{(1-\nu^2)^{2-d/2}} = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(d/2-1)}{\Gamma(d/2-1/2)} \quad \text{il vient}$$

$$\rho(\mu^2) = \frac{H(\mu^2-4m^2)}{\mu\,(\mu^2-4m^2)^{\frac{3-d}{2}}} \underbrace{\frac{4^{2-d/2}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(d/2-1/2)}}$$

pour $d=6$ $\quad \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(4\pi)^3}\dfrac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3-1/2)}$ et

d'après l'appendice $\Gamma(3-1/2) = (2-1/2)(1-1/2)\Gamma(1/2)$

$$= \frac{3}{4}\Gamma(1/2)$$

Donc pour $d=6$

$$\rho(\mu^2) = \frac{H(\mu^2-4m^2)}{\mu\,(\mu^2-4m^2)^{-3/2}} \underbrace{\frac{1}{3\cdot(4\pi)^3}}_{\frac{1}{192\pi^3}}$$

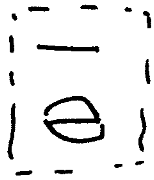
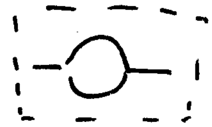
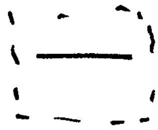
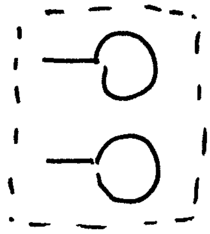
<u>D.1</u> Si l'action est sans dimension, le terme cinétique $\frac{1}{2}\int d^6x\,(\partial_\mu\Psi)\partial^\mu\Psi$ montre que

$$6-2+2\underbrace{[\Psi]}=0 \quad \text{donc} \quad [\Psi]=-2$$

dimension de $[\Psi]$ en échelle de longueur

Le terme d'interaction dit alors

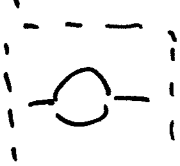
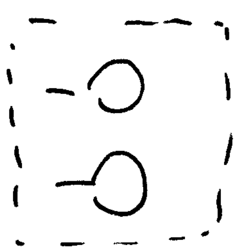
$6+3[\Psi]+[\lambda]=0$ d'où $[\lambda]=0$, λ est sans dimension

D.2 : Tous les graphes avec deux pattes externes et n vertex à 3 pattes, par exemple  ou  ou  ou  etc.

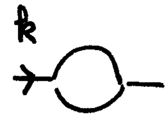
D.3 : les mêmes que ci dessus, en excluant ceux qui ont une composante connexe sans patte externe (diagrammes du vide).

par exemple, des graphes ci-dessus, le premier  est exclu.

D.4 : Tous les graphes connexes avec deux pattes externes et n vertex à 3 pattes.

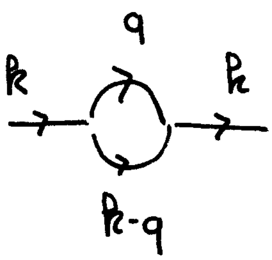
Des quatre graphes initiaux il ne reste que  et  car  est soustrait comme produit de fonction à un point.

D.5 On a donc

$G_F(k) = \xrightarrow{k} +$  $+ O(\lambda^4)$

(il n'y a pas de termes en λ^3 par parité : avec trois vertex à 3 pattes, on ne peut pas faire de graphe avec 2 pattes externes)

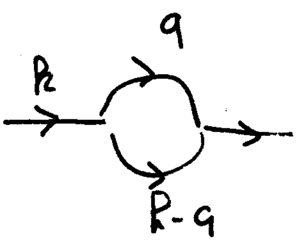
$$\xrightarrow{k} = \Delta_F(k) = \frac{i}{k^2-m^2+i0^+}$$



: nb de symétrie $\frac{1}{2}$ (échange des deux arêtes de la boucle)

chaque vertex donne $-i\lambda$

chaque arête donne un propagateur de Feynman et finalement on intègre sur le moment libre de la boucle avec la mesure $\frac{d^6q}{(2\pi)^6}$

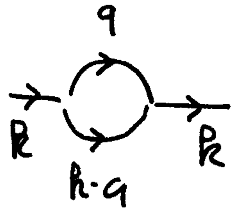


$$= \Delta_F(k)\left[\frac{(-\lambda^2)}{2}\int\frac{d^6q}{(2\pi)^6}\Delta_F(q)\Delta_F(k-q)\right]\Delta_F(k)$$

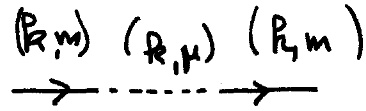
$$\int \frac{d^6q}{(2\pi)^6}\, \Delta_F(q)\, \Delta_F(k-q) \equiv I_F(k, m^2) \quad \text{donc}$$

$G_F(k)$ est bien comme indiqué dans l'énoncé

D.6



$=$

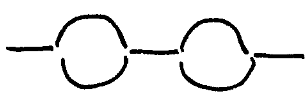


intégré sur q
les particules ont masse m

$\underbrace{\text{intégré sur } \mu}$

La particule initiale émet une particule de masse μ, qui réémet une particule de masse m.

D.7 Ce sont les graphes connexes 1 particule irréductible, ceux dont toutes les lignes internes sont dans une boucle. Par exemple



n'en fait pas partie,

$$\frac{1}{G(k)} = k^2+m^2 - \frac{\lambda^2}{2} I(k,m^2) + O(\lambda^4)$$

en inversant la formule du texte.

E.1. À grand q l'intégrand se comporte comme $\propto \frac{d^6 q}{q^4}$, on a donc affaire à une divergence quadratique.

D'après la question C.6,

$\rho(\mu^2) \propto \mu^2$ à grand μ, d'où

l'intégrand de Källen-Lehmann $\propto d\mu^2$.

A nouveau une divergence quadratique due au grand μ^2 (Rq: il n'y a pas de divergence à petit μ, même pour $m=0$)

E.2:
$$\frac{1}{G_r(k)} = Z\left(k^2+m^2 - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2 \frac{r(\mu^2)}{k^2+\mu^2} + O(\lambda^4)\right)$$

$$\frac{1}{G_r(k)} - \frac{1}{G_r(K)} = Z\left(k^2 - K^2 - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2 r(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{K^2+\mu^2}\right) + \cdots\right)$$

pour k proche de K^2 on a

$$\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{K^2+\mu^2} = \frac{K^2-k^2}{(k^2+\mu^2)(K^2+\mu^2)} \sim \frac{K^2-k^2}{(K^2+\mu^2)^2} \text{ donc}$$

$$\frac{1}{G_r(k)} - \frac{1}{G_r(K)} \sim (k^2-K^2)\, Z\left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2 \frac{r(\mu^2)}{(K^2+\mu^2)^2} + O(\lambda^4)\right)$$

La condition de normalisation est donc

$$Z\left(1+\frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2\frac{r(\mu^2)}{(K^2+\mu^2)^2}+O(\lambda^4)\right)=1 \quad \text{soit}$$

$$Z = 1-\frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2\,\frac{r(\mu^2)}{(K^2+\mu^2)^2}+O(\lambda^4)$$

$$\frac{1}{G_r(k)} = k^2+m^2-\frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2}+\frac{k^2+m^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$
$$+O(\lambda^4)$$

d'où $$m_r^2=\frac{1}{G_r(0)}=m^2-\frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{m^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$
$$+O(\lambda^4)$$

E.3 Ceci s'inverse en

$$m^2 = m_r^2+\frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{m_r^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)+O(\lambda^4)$$

On peut alors éliminer m^2 par m_r^2 et il vient

$$\frac{1}{G_r(k)} = k^2+m_r^2-\frac{\lambda^2}{4}\int_0^\infty d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}+\frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$
$$+O(\lambda^4)$$

et, si l'on suit l'énoncé $\lambda_r = \lambda + O(\lambda^3)$ donc $\lambda = \lambda_r + O(\lambda^3)$ donc à cet ordre on peut remplacer λ par λ_r dans la formule ci-dessus d'où le résultat annoncé.

E.4 À grand μ

$$\frac{1}{k^2+\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} - \frac{k^2}{\mu^4} + \frac{k^4}{\mu^6} + O(\mu^{-8})$$

$$\frac{1}{(K^2+\mu^2)^2} = \frac{1}{\mu^4} - \frac{2K^2}{\mu^6} + O(\mu^{-8})$$

Donc $\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2} = \frac{k^2(k^2-2K^2)}{\mu^6} + O(\mu^{-8}) = O(\mu^{-6})$

E.5 A grand μ, $\rho(\mu^2) = \frac{1}{192\pi^3} \frac{H(\mu^2-4m_r^2)}{\mu\,(\mu^2-4m_r^2)^{-3/2}} \propto \mu^2$

Mais $d\mu^2\ \mu^2\ O(\mu^{-6})$ est intégrable à l'∞, donc

$$\int_0^\infty d\mu^2\, \rho(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$ est convergente.

E.6 D'après les hypothèses, on peut écrire que

$\rho(\mu^2) \simeq r(\mu^2)$ $\quad \mu^2 < \Lambda^2$ et au delà de Λ^2

avec m_r

$\rho(\mu^2) \gg r(\mu^2)$ donc

$$\int_0^\infty d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$ est

$$\sim \int_0^\Lambda d\mu^2\, \rho(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$$ et

$$\int_\Lambda^\infty d\mu^2\, \rho(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} + \frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right) \sim \int_\Lambda^\infty \frac{d\mu^2}{192\pi^3}\, \mu^2\, \frac{k^2(k^2-2K^2)}{\mu^6}$$

$$= \frac{k^2(k^2-2K^2)}{192\pi^3\Lambda^2} = O(\Lambda^{-2})$$

donc $\int_0^\infty d\mu^2\, r(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}+\frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)$

$$= \int_0^\infty d\mu^2\, \rho(\mu^2)\left(\frac{1}{k^2+\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}+\frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right) + O(\Lambda^{-2})$$

D'où la formule annoncée pour $\frac{1}{G_r(k)}$ qui, à basse énergie, est indépendante de la façon dont la vraie théorie microscopique se comporte à haute énergie.

E.7 On fait $m_r^2 = 0$ d'où

$$\frac{1}{G_r(k)} = k^2 - \frac{\lambda_r^2}{4}\int_0^\infty \frac{d\mu^2}{192\pi^3}\, \underbrace{\mu^2\left(\frac{1}{k^2+\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}+\frac{k^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)}_{k^2\left(\frac{-1}{k^2+\mu^2}+\frac{\mu^2}{(K^2+\mu^2)^2}\right)} + O(\lambda^4)$$

Posant $\mu^2 = \sigma$ on veut donc

$$\int_0^\infty d\sigma\left(\frac{\sigma}{(K^2+\sigma)^2}-\frac{1}{k^2+\sigma}\right) = \int_0^\infty d\sigma\left(\frac{K^2+\sigma}{(K^2+\sigma)^2}-\frac{K^2}{(K^2+\sigma)^2}-\frac{1}{k^2+\sigma}\right)$$

$$= \int_0^\infty d\sigma\left(\frac{1}{K^2+\sigma}-\frac{1}{k^2+\sigma}+\frac{K^2}{(K^2+\sigma)^2}\right)$$

$$= \int_0^\infty d\left[\log\left(\frac{K^2+\sigma}{k^2+\sigma}\right)-\frac{K^2}{K^2+\sigma}\right] = \log\frac{k^2}{K^2}+1$$

$$\frac{1}{G_r(k)} = k^2\left[1-\frac{\lambda_r^2}{12\cdot(4\pi)^3}\left(\log\frac{k^2}{K^2}+1\right)+O(\lambda_r^4)\right]$$

Ceci diverge à $K^2\to 0$: dans la théorie renormalisée de masse nulle, on ne peut pas normaliser l'échelle de $\frac{1}{G_r}$ à $K^2=0$: divergence infrarouge.