M2 - Théorie quantique des champs

TD 9

Variables gaussiennes

- 1) Soit x une variable aléatoire gaussienne de moyenne x_0 et de variance σ^2 .
 Montrer que les cumulants de x au-delà du second s'annulent. Montrer que par conséquent tous les moments au-delà du second peuvent être exprimés en termes des premier et second.
- 2) On considère la généralisation de cette propriété à une loi gaussienne pour une variable à N composantes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= C \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_{ij} x_i x_j - \sum_i B_i x_i \right] \\
 &= C \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} \right]
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique $N \times N$ définie positive et $\mathbf{B}$ un vecteur à N composantes. Trouvez la constante de normalisation C .

- 3) Calculez la fonction caractéristique $G(\mathbf{k})$, où $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$. Déduisez-en la valeur de $\langle x_i x_j \rangle$.
- 4) On prend $\mathbf{B} = 0$ et on considère la moyenne $\langle x_i x_j x_k \dots \rangle$ du produit d'un nombre pair des x_n , avec $i, j, k, \dots$ tous différents. Montrez que

$$\langle x_i x_j x_k \dots \rangle = \sum \langle x_p x_q \rangle \langle x_r x_s \rangle \dots$$

où les indices $p, q, r, s, \dots$ et les indices $i, j, k, \dots$ constituent le même ensemble, et où la somme porte sur toutes les façons d'apparier ces indices. Cette relation s'appelle le *théorème de Wick*. On pourra se concentrer sur le cas à quatre x_n .

- 5) On considère la matrice $\mathbf{A}$ définie par

$$A_{ij} = am^2 \delta_{i,j} + \frac{(2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j})}{a}$$

où on identifie $N+i \equiv i$ (conditions périodiques) et où a est une constante positive qui peut être vu comme le pas du réseau. Comment interpréter cette matrice? On pourra par exemple, regarder la limite continue de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

6) Déterminez les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice $\mathbf{A}$ (indice: calculez la transformée de Fourier discrète de la suite finie A_{ij} où i est fixé)

7) Montrez que la fonction de corrélation correspondante peut s'écrire

$$\begin{aligned}\langle x_i x_j \rangle &= \sum_{n=1}^N \frac{e^{i \frac{2\pi n(i-j)}{N}}}{am^2 + \frac{2}{a} (1 - \cos(\frac{2\pi n}{N}))} \\ &= \sum_{k=2\pi/L}^{2\pi N/L} \frac{e^{ik(ai-aj)}}{am^2 + \frac{2}{a} (1 - \cos(ka))}\end{aligned}$$

où $L = Na$.

8) Étudiez la limite continue (i.e. $a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, L fixée). On posera $\varphi(y) = \sqrt{a}x_i$.