M2 - Théorie quantique des champs

TD 8 : Effet Compton scalaire (2ème partie)

I. Amplitude de la diffusion Compton

- 1) Dans la diffusion Compton, la particule chargée absorbe un photon d'impulsion k^μ et en émet un d'impulsion k'^μ . D'après la première partie, c'est un champ électromagnétique de fréquence positive (resp. négative) qui va provoquer l'absorption (resp. l'émission). On va donc étudier le mouvement de la particule chargée dans un champ électromagnétique de la forme

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2k^0V}} \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} + \frac{1}{\sqrt{2k'^0V}} \epsilon'^{\mu*} e^{ik' \cdot x}$$

On notera que ce champ n'est pas réel. On pourrait ajouter le complexe conjugué pour le rendre réel, mais les termes supplémentaires ne contribueraient pas au processus étudié, et ne feraient qu'obscurcir les calculs.

Nous allons calculer l'amplitude de probabilité pour que la particule ressorte dans un état d'impulsion $p_f = p_i + k - k'$, à l'ordre 2 dans le champ A^μ . Nous écrivons cette amplitude sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_i}V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_f}V}} \frac{1}{\sqrt{2k^0V}} \frac{1}{\sqrt{2k'^0V}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k' - p_i - k) i \tau_{fi}$$

où τ_{fi} est dite *amplitude réduite*.

Le terme W_2 étant lui même d'ordre 2 en A^μ , il suffit de le traiter au moyen de la théorie des perturbations au premier ordre. Montrez que sa contribution à τ_{fi} est

$$(\tau_{fi})_2 = 2e^2 \epsilon \cdot \epsilon'^*$$

- 2) Il reste à traiter le terme W_1 au moyen de la théorie des perturbations au deuxième ordre. Ecrivez l'amplitude de transition correspondante. Montrez que la contribution à l'amplitude de transition réduite s'écrit

$$(\tau_{fi})_1 = -e^2 \left(\frac{4 (\epsilon \cdot p_i) (\epsilon'^* \cdot p_f)}{(p_i + k)^2 - m^2} + \frac{4 (\epsilon \cdot p_f) (\epsilon'^* \cdot p_i)}{(p_f - k)^2 - m^2} \right)$$

- 3) Expliquez pourquoi le choix du propagateur (retardé ou avancé, par exemple) n'a aucune importance pour ce processus.

3) Montrez que la transformation

$$\epsilon^\mu \longrightarrow \epsilon^\mu + \lambda k^\mu$$

est une transformation de jauge. Vérifiez que l'amplitude de transition réduite est invariante par cette transformation. On notera que les trois termes de l'amplitude ne sont pas *séparément* invariants de jauge.

II. Section efficace

- 1) On se place dans le référentiel de repos de la particule chargée avant la collision, soit $\vec{p}_i = \vec{0}$. On note θ l'angle du photon diffusé avec la direction incidente. Calculez l'impulsion $|\vec{k}'|$ du photon diffusé en fonction de $|\vec{k}|$, θ et m .
- 2) Montrez qu'il est possible de prendre $\epsilon_0 = \epsilon'_0 = 0$. Ce choix est celui de la jauge de Coulomb dans laquelle nous nous plaçons désormais. Comment se simplifie alors l'amplitude de transition ?
- 3) L'expression de $|\mathcal{A}_{fi}|^2$ fait intervenir la quantité non définie qu'est le carré la distribution de Dirac $(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k)$. Mais cette distribution vient du fait que nous avons intégré $e^{i(p_f + k' - p_i - k) \cdot x}$ sur tout l'espace-temps. Si on intègre sur un volume fini V et un temps fini T , alors on peut calculer le carré. Expliquez pourquoi on peut écrire

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k)]^2 = VT(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k)$$

On pourra pour cela raisonner sur le cas plus simple, à une dimension, de la quantité suivante

$$\left| \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} \right|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega t}$$

en remarquant que le calcul "naïf" aboutit au même problème pour $T \rightarrow +\infty$ alors que l'application de l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} = 2\pi \delta(\omega)$$

à une seule des deux intégrales permet de contourner cette difficulté.

Déduisez que l'amplitude de transition par unité de temps vers un état quantique donné vaut

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{1}{4mV E_{\vec{p}_f}} \frac{1}{4V^2 |\vec{k}| |\vec{k}'|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + k' - p_i - k) |\tau_{fi}|^2$$

- 4) Quel est le nombre d'états quantiques pour le système (particule chargée et photon) dans l'élément d'espace des impulsions $d^3\vec{p}_f d^3\vec{k}'$? Déduisez-en la probabilité de transition par unité de temps vers cet élément d'espace des impulsions.

- 5) La section efficace différentielle $d\sigma$ est définie par le rapport entre l'amplitude de transition par unité de temps par diffuseur et par unité de flux incident. Vérifiez que la formule

$$d\sigma = \frac{1}{4m|\vec{k}|} \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2|\vec{k}'|} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_f}} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - k - p_i) |\tau_{fi}|^2$$

correspond à cette définition. On remarquera que le flux incident de photons dans le référentiel choisi est donné par $c/V = 1/V$.

- 6) Il y a six variables d'intégration mais quatre contraintes provenant de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, soit au total deux vrais degrés de liberté, qui correspondent physiquement à la direction, ou l'angle solide, du photon diffusé. Pour faire apparaître ces vrais degrés de liberté, il faut intégrer sur les "faux" degrés de liberté, que sont $\vec{p}_f$ et $|\vec{k}'|$. Commencez par intégrer l'expression précédente sur $\vec{p}_f$. Alors, $\vec{p}_f$ et $E_{\vec{p}_f}$ deviennent des fonctions de $\vec{k}'$ (l'impulsion incidente $\vec{k}$ étant fixée une fois pour toutes). Vérifiez notamment que pour une direction fixée de $\vec{k}'$,

$$\frac{dE_{\vec{p}_f}}{d|\vec{k}'|} = -\frac{\vec{k}' \cdot \vec{p}_f}{|\vec{k}'|E_{\vec{p}_f}}$$

et déduisez-en que

$$\frac{d(|\vec{k}'| + E_{\vec{p}_f})}{d|\vec{k}'|} = \frac{|\vec{k}|m}{|\vec{k}'|E_{\vec{p}_f}}$$

Décomposez ensuite $d^3\vec{k}' = |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| d\Omega$ et intégrez sur $|\vec{k}'|$. Montrez que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} \left(\frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \right)^2 |\vec{\epsilon}'^* \cdot \vec{\epsilon}|^2$$

où $|\vec{k}'|$ a la valeur obtenue à la question 1 de cette deuxième partie.

- 7) Comment se simplifie cette expression dans la limite où $|\vec{k}| \ll m$? Calculez la section efficace non polarisée dans cette limite puis, par intégration, la section efficace totale σ_{tot} . Montrez que le résultat peut s'écrire dans le système d'unités international

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad \text{avec} \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

ceci est l'expression de la section efficace totale de Thomson qui est un résultat purement classique.

- 8) Vérifiez que la première correction (en $\hbar\omega/mc^2$) à la section efficace totale de Thomson s'écrit

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(1 - 2 \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)$$

On remarquera que cette correction est relativiste *et* quantique.