FIP master 1ère année
lundi 6 novembre 2006

M2 - Théorie quantique des champs

TD 7 : Effet Compton scalaire (1ère partie)

Le but de ce problème est le calcul de la section efficace de collision élastique d'un photon avec une particule chargée de spin nul. Il s'agit d'un processus faisant intervenir deux particules distinctes, qui ne peut être traité rigoureusement que dans le cadre de la théorie quantique des champs. Cependant, la mécanique quantique relativiste permet de calculer correctement ce processus à l'ordre dominant en e, moyennant quelques hypothèses naturelles.

Pour ce calcul, nous aurons besoin du second ordre de la théorie des perturbations. Ce sera notre première application de la théorie du propagateur à un problème concret.

I. Rappel sur la théorie des perturbations et sur les amplitudes de transitions

1) Calculez les expressions des transformées de Fourier des propagateurs avancé et retardé de l'équation de Klein–Gordon. On prendra pour convention la définition des propagateurs avancé G_{av} et retardé G_{ret} dans l'espace réel

$$\left(\Box + m^2\right) G_{\text{ret,av}}\left(x - x'\right) \quad = \quad -\delta^4\left(x - x'\right)$$

2) Soit un champ $\phi(x)$ reprśentant une particule de masse m et de spin nul vérifiant l'équation de Klein–Gordon

$$\left(\Box + m^2\right) \phi(x) \quad = \quad -W(x)\phi(x)$$

où $W(x)$ est un opérateur de perturbation, pouvant contenir par exemple des opérateurs de dérivation agissant sur le champ et qui s'annule lorsque $t \to -\infty$. On suppose que le champ se trouve dans l'état $\phi_i(x)$ lorsque $t \to -\infty$, $\phi_i(x)$ étant une solution libre de l'équation de Klein–Gordon.

Vérifiez que

$$\phi(x) \quad = \quad \phi_i(x) + \int d^4x' G_{\text{ret}}\left(x - x'\right) W\left(x'\right) \phi\left(x'\right)$$

est bien solution du problème.

3) Déduissez de la solution précédente, l'expression de $\phi(x)$ au premier ordre de la théorie des perturbations par rapport à $W(x)$. Comment se généralise cette expression aux ordres supérieurs?

4) On s'intéresse à l'amplitude de transition par la perturbation $W(x)$ de l'état initial $\phi_i(x)$ vers un autre état libre $\phi_f(x)$ dans la limite $t \to +\infty$. Cette amplitude de transition est donnée par

$$\mathcal{A}_{fi} \quad = \quad -i \int d^4x \; \phi_f^*(x) W(x) \phi(x)$$

Montrez que cette expression devient au deuxième ordre de la théorie des perturbations

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{fi} \quad \simeq \quad & -i \int d^4x \; \phi_f^*(x) W(x) \phi_i(x) \\ & -i \int d^4x \int d^4x' \; \phi_f^*(x) W(x) G_{\mathrm{ret}}\left(x - x'\right) W\left(x'\right) \phi_i\left(x'\right) \end{aligned}$$

Donnez une interprétation physique à chacun des termes de $\mathcal{A}_{fi}$.

II. Absorption et émission d'un photon

1) Montrez que l'équation de Klein–Gordon en présence d'un champ électromagnétique représenté par le quadrivecteur potentiel A^μ peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} (\Box + m^2)\phi(x) \quad &= \quad -(W_1(x) + W_2(x))\phi(x) \\ W_1(x) \quad &= \quad ie(\partial_\mu A^\mu(x) + A^\mu(x)\partial_\mu) \\ W_2(x) \quad &= \quad -e^2 A^\mu(x) A_\mu(x) \end{aligned}$$

On prendra pour le couplage minimal $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. e est la charge de la particule considérée.

2) Un photon d'impulsion k^μ et de polarisation ϵ^μ peut être représenté par le quadrivecteur potentiel suivant

$$A^\mu \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2k_0 V}} \left(\epsilon^\mu e^{-ik^\nu x_\nu} + \epsilon^{*\mu} e^{ik^\nu x_\nu} \right)$$

où V est le volume de normalisation et $\epsilon^\mu \epsilon^*_\mu = -1$. Montrez que, dans la jauge de Lorentz, $k^2 = 0$ et $\epsilon^\mu k_\mu = 0$. Donnez l'expression de $W_1(x)$ et $W_2(x)$ pour ce champ.

3) On suppose que pour $t \to -\infty$, la particule se trouve dans un état libre d'impulsion p_i et on souhaite regarder l'amplitude de transition vers un état libre d'impulsion p_f. On rappelle qu'un état libre d'impulsion p s'écrit

$$\phi_p \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2Vp_0}} e^{-ipx}$$

Montrez qu'au premier ordre de la théorie des perturbations, l'amplitude de diffusion peut s'écrire

$$\mathcal{A}_{fi} \quad = \quad \frac{-ie}{2V\sqrt{p_{i0} p_{f0}}} \left(p_i^\mu + p_f^\mu \right) \int d^4x \; e^{i(p_f - p_i)x} A_\mu(x)$$

(on supposera que $A_\mu(x)$ vérifie les conditions nécessaires d'annulation à l'infini).

4) Quelles sont les deux valeurs possibles de l'impulsion finale p_f^μ? Interpréter physiquement les processus correspondants.

5) Montrez que la condition $p_f^2 = m^2$ permet d'exclure ces deux processus. Expliquez physiquement pourquoi.