FIP master 1ère année
lundi 30 octobre 2006

M2 - Théorie quantique des champs

TD 6

Niveaux de Landau - électrons dans le graphène

I. Cas non relativiste

On considère un gaz d'électrons libres à 3 dimensions, soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$ supposé constant. La charge de l'électron est notée $-e$ ($e > 0$).

1) Dans la jauge de Landau correspondant à $\overrightarrow{A} = Bx\overrightarrow{u}_y$, écrivez l'Hamiltonien d'un électron dans le système. On négligera l'effet de l'interaction du spin des électrons avec le champ magnétique $\overrightarrow{B}$. Montrez que les fonctions d'onde propres sont de la forme

$$\phi(x, y, z) = e^{i(k_y y + k_z z)}\chi(x)$$

2) En utilisant l'expression de $\phi(x, y, z)$, montrez que l'équation aux valeurs propres se réduit à l'équation d'un oscillateur harmonique dont on explicitera les niveaux d'énergie sous la forme

$$E = \left(q + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

q est entier positif, ω_c est la pulsation cyclotron et $\hbar\omega_c$ l'énergie cyclotron. Ces niveaux d'énergie sont appelés les niveaux de Landau. Donnez la forme de la fonction d'onde dans le cas $q = 0$ (appelé niveau de Landau le plus bas).

3) Expérimentalement, il est possible de réaliser dans des semiconducteurs, des gaz d'électrons fortement confinés dans une direction. On applique un fort champ magnétique dans cette direction. Expliquez à l'aide d'un modèle simple en quoi cela constitue un système bidimensionnel. Donnez en particulier un critère par rapport à la longueur magnétique l_B :

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

4) On se place dans le cas où le gaz d'électrons peut être considéré comme bidimensionnel. Soient L_x, L_y les dimensions de la boîte dans laquelle est confiné le gaz d'électrons. Montrez en utilisant les conditions cycliques que la dégénérescence d'un niveau de Landau est donnée par

$$g = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{m\omega_c L_x L_y}{h}$$

5) Le facteur de remplissage ν est défini par

$$\nu = \frac{hn}{eB}$$

où n est la densité du gaz bidimensionnel d'électrons. Quelle est l'interprétation de cette quantité?

6) Pour un gaz fabriqué à partir d'une hétérostructure d'arséniure de gallium GaAs / $Al_xGa_{1-x}As$ (i.e du GaAs dopé avec de l'aluminium), la masse effective des électrons est de 0.067 m_0 où m_0 est la masse de l'électron dans le vide. Une densité typique est de l'ordre de $n \simeq 10^{11}\text{cm}^{-2}$. En déduire l'énergie cyclotron pour un champ magnétique typique d'un tesla. Quel est l'ordre de grandeur du facteur de remplissage? A quelle température doit-on se placer pour espérer voir l'effet de la quantification des niveaux de Landau?

7) Décrire ce que devient le spectre lorsqu'on tient compte du spin. On notera $\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_0}$ le magnéton de Bohr et g le facteur gyromagnétique.

II. Particule de spin nul (exercice facultatif)

On considère une particule de spin nul, de masse m et de charge $-e$ ($e > 0$) qui peut être décrite à l'aide de l'équation de Klein-Gordon. On la soumet à champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et on négligera le mouvement suivant z. On se concentrera sur les solutions stationnaires d'énergie positive. La jauge utilisée sera la jauge de Landau (cf exercice précédent)

1) En écrivant la fonction d'onde sous la forme

$$\Phi(t, x, y) = e^{-iEt}\, e^{ik_y y}\, \varphi(x)$$

montrez que $\varphi(x)$ obéit à l'équation

$$\left(\partial_x^2 - \beta^2 (x - X_k)^2\right) \varphi(x) = -(E^2 - m^2)\varphi(x)$$

Explicitez X_{k_y} et β en fonction de k_y et de la pulsation cyclotron ω_c. On prendra pour expression du couplage minimale $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$

2) En déduire l'expression des niveaux d'énergie. Regardez la limite non relativiste et vérifiez que le résultat est bien en accord avec l'exercice précédent (pensez à remettre les facteurs $\hbar$ et c). Quelle est la première correction relativiste à l'énergie des niveaux de Landau ?

III. Niveaux de Landau dans le graphène

Le graphène représente un plan isolé de carbone dont l'empilement constitue le graphite. En 2004, deux groupes ont réussi à isoler un plan de graphène et effectuer des expériences de transport comme pour les gaz bidimensionnels d'électrons dans les semiconducteurs. La structure de bandes du graphène possèdent deux singularités côniques dans la première zone de Brillouin (appelées points K et K'). Sans dopage, l'énergie de Fermi est juste au niveau de ces singularités. Les électrons du graphène au voisinage du niveau de Fermi sont bien décrits par des particules relativistes de masse nulle où la vitesse de Fermi $v_F \simeq 10^6 ms^{-1}$ remplace la vitesse de la lumière. Chaque état est quatre fois dégénéré en tenant compte du spin et du point K ou K' où on se place.

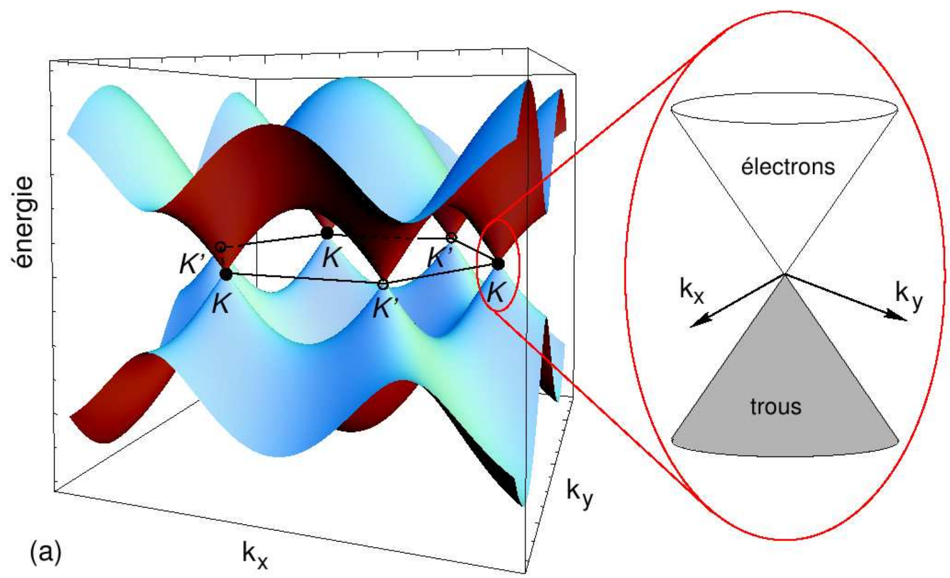

Figure 1: Structure de bandes du graphène

Dans tout le problème, on se place dans un espace à $2+1$ dimensions. La signature de la métrique est $(1, -1, -1)$.

1) Montrez que dans l'espace à 2+1 dimensions les matrices γ suivantes forment une représentation de l'algèbre de Clifford (i.e. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, \ \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}$$

où σ^i sont les matrices de Pauli définies par

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Ecrivez l'équation de Dirac à 2+1 dimensions pour une particule de masse m et de charge $-e$, décrit par un spineur à quatre composantes $\Psi(t, x, y)$. On utilisera le système d'unités internationales. Que devient cette expression si la particule est couplée à un champ électromagnétique défini par le quadrivecteur A^μ via le couplage minimal?

3) On regarde le problème de la particule dans un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$ (dans la direction perpendiculaire aux deux dimensions d'espace). On utilise la jauge de Landau et on pose

$$\Psi(t,x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \phi_+(t,x,y) \\ \phi_-(t,x,y) \end{pmatrix}$$

où $\phi_\pm$ sont des spineurs à deux composantes. Montrez qu'ils vérifient les équations découplées

$$\left[i\hbar\sigma^3\partial_t - \hbar c\sigma^1\partial_x - \hbar c\sigma^2\left(\partial_y - i\frac{eB}{\hbar}x\right) \mp mc^2\right]\phi_\pm \quad = \quad 0$$

4) On considère uniquement ϕ_+ et on cherche des solutions de la forme

$$\phi_+(t,x,y) \quad = \quad e^{-i\frac{Et}{\hbar}+ik_y y}\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

Ecrivez le système d'équations pour φ_1 et φ_2.

5) Montrez que φ_1 vérifie l'équation

$$\left[-\hbar^2c^2\partial_x^2 + (eBc)^2\left(x - l_B^2k_y\right)^2\right]\varphi_1 \quad = \quad \left(E^2 - m^2c^4 + \hbar eBc^2\right)\varphi_1$$

6) Déduisez les niveaux d'énergie du problème à partir de l'équation précédente

$$E \quad = \quad \pm\sqrt{m^2c^4 + 2\hbar eBc^2q}$$

avec q un entier positif. Discutez le cas de φ_2.

7) Que se passe-t-il dans le cas où $m = 0$?

8) A partir des résultats précédents, déterminez le spectre des électrons dans le graphène autour du point K ou K' en présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan. Faire un schéma des niveaux de Landau et comparez au cas non relativiste.

9) Calculez l'énergie cyclotron pour un champ magnétique typique d'un tesla. Commentez.