FIP master 1ère année
lundi 23 octobre 2006

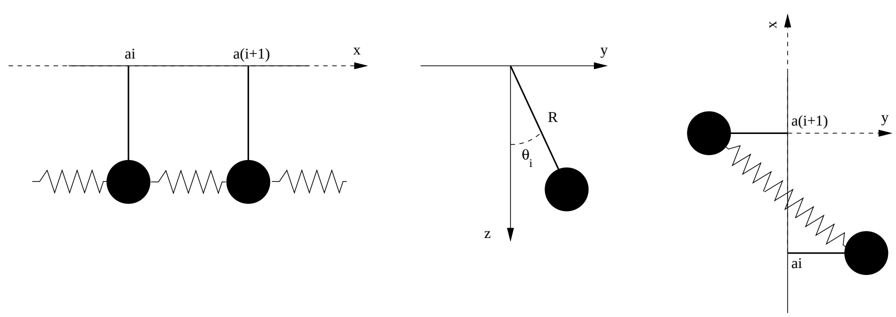
M2 - Théorie quantique des champs

TD 5

Analogue mécanique de l'équation de Klein–Gordon

Ce problème a pour objectif la réalisation d'un analogue mécanique de l'équation de Klein–Gordon. C'est aussi l'occasion de manipuler la notion de dérivée fonctionnelle.

Soit une chaîne de pendules de masse m de longeur R et couplés à leurs plus proches voisins par des ressorts de raideur k et de longueur au repos nulle. Chaque pendule est contraint de se déplacer dans un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) situé en $x = a\,i$ (i est un entier). Il fait un angle θ_i avec la verticale (axe (Oz)). On notera g l'accélération de la pesanteur et on se placera dans la limite des faibles oscillations.



1) Montrez que le lagrangien du système peut se mettre sous la forme

$$L = \sum_i \left[\frac{mR^2}{2} \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 - \frac{mgR}{2} \theta_i^2 - \frac{kR^2}{2} \left(\theta_{i+1} - \theta_i \right)^2 \right]$$

En déduire les équations du mouvement ainsi que l'expression de l'action.

2) Quelle est la limite continue de ces équation du mouvement? On posera $\mu = m/a$ la masse linéïque et $\kappa = ka$ le module d'Young. Même question pour l'action. Faire le lien avec Klein–Gordon.

3) Soit $S[\phi]$ une fonctionnelle (comme l'action par exemple). La dérivée fonctionnelle est définie par

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x,t)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{S\left[\phi(x',t') + \epsilon \delta(x - x') \delta(t - t')\right] - S\left[\phi(x',t')\right]}{\epsilon}$$

ce qui permet d'écrire :

$$S\left[\phi+\delta\phi\right]-S\left[\phi\right] = \int dxdt\ \frac{\delta S}{\delta\phi\left(x,t\right)}\delta\phi\left(x,t\right)+o\left(\delta\phi^{2}\right)$$

En particulier, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\delta S}{\delta\phi\left(x,t\right)} = 0$$

Calculez les dérivées fonctionnelles par rapport à $\phi\left(x',t'\right)$ des fonctionnelles suivantes

$$\int dxdt\ \phi\left(x,t\right)\ , \qquad \int dxdt\ \left(\phi\left(x,t\right)\right)^{n}$$
$$\int dxdt\ \phi\left(x,t\right)\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}}\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\phi\left(x,t\right) \quad \text{et} \quad \int dxdt\ \left(\frac{\partial\phi\left(x,t\right)}{\partial t}\right)^{2}$$

4) Retrouvez ces résultats en utilisant la règle suivante :

$$\frac{\delta\phi\left(x,t\right)}{\delta\phi\left(x',t'\right)} = \delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)$$

et en remarquant que la dérivée fonctionnelle agit dans l'espace des fonctions alors que les dérivées et intégrales par rapport à x et t agissent dans l'espace temps (i.e. ces opérations commutent).

5) A partir des résultats précédents, déterminez directement les équations du mouvement pour le modèle continu à partir l'expression de l'action.