

M2 - Théorie quantique des champs

TD 3

Atome d'hydrogène (1ère partie)

On sait que l'équation de Klein–Gordon est l'équation d'onde d'une particule scalaire (sans spin) et ne peut donc décrire correctement l'électron. Cependant, le calcul du spectre de l'atome d'hydrogène dans le cadre de l'équation de Klein–Gordon est simple et instructif. Dans tout ce problème sauf dans la dernière question, on se place dans la limite où le proton est infiniment lourd, et peut être considéré comme une charge fixe et ponctuelle, choisie pour origine des coordonnées.

1. Pour un état stationnaire d'énergie E de l'atome d'hydrogène, montrer que l'équation de Klein–Gordon s'écrit

$$\left(\left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \Delta - m^2 \right) \phi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (1)$$

avec $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0$.

2. On cherche une solution de la forme

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (2)$$

On rappelle que le laplacien est alors donné par

$$\Delta\phi = \frac{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{r} \left(\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u \right). \quad (3)$$

Ecrire l'équation différentielle pour $u(r)$.

3. Chercher un équivalent à l'origine de la forme $u(r) \sim r^{\lambda+1}$. Montrer que $\lambda = l - \delta_l$, où δ_l est une petite correction dont on donnera l'expression.

4. On s'intéresse à un état lié d'énergie mécanique négative, c'est à dire $E < m$. Montrer que $u(r)$ décroît alors exponentiellement à l'infini, sous la forme e^{-kr} , et déterminer k .

5. Une meilleure approximation est donnée par $u(r) \sim r^\beta e^{-kr}$. Calculer alors l'énergie en fonction de β .

6. On admet que les solutions exactes de l'équation s'écrivent sous la forme $u(r) = r^{\lambda+1} e^{-kr} P(r)$, où $P(r)$ est un polynôme. En déduire que $\beta = n - \delta_l$, où n est un entier strictement supérieur à l , et δ_l a été déterminé à la question 3.

7. Développer E en puissances de α jusqu'à l'ordre α^4 inclus. Remettre le résultat dans le système d'unités international. Commenter l'ordre de grandeur des corrections relativistes, leur dépendance en n et l . On remarquera que les

effets relativistes lèvent la dégénérescence entre les niveaux de même n et de l différents.

8. Dans le cas non relativiste, comment prend-on en compte le mouvement du proton ? Est-il légitime de procéder de la même manière dans le cas relativiste ?