FIP master 1ère année
lundi 2 octobre 2006

M2 - Théorie quantique des champs

TD 2

Spineurs et quation de Dirac

0.1 Spineurs quatre dimensions

0.1.1 Conventions et notations

Mtrique de Lorentz :

$$\eta_{\mu,\nu} = \eta^{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Transformations de Lorentz : matrices ${\Lambda_\mu}^\nu$ telles que[1]

$${\Lambda_\mu}^\rho \eta_{\rho,\tau} {\Lambda_\nu}^\tau = \eta_{\mu,\nu} \quad \text{i.e.} \quad \Lambda \eta \Lambda^t = \eta$$

Transformations de Lorentz propres :

$${\Lambda_0}^0 > 1 \quad \det {\Lambda_\mu}^\nu = 1$$

Coordonnes :

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

Vecteur covariant : V^μ tel que dans une transformation de Lorentz

$$V^\mu \to V'^\mu = V^\nu {\Lambda_\nu}^\mu$$

Vecteur contravariant : V_μ tel que dans une transformation de Lorentz

$$V_\mu \to V'_\mu = {\Lambda_\mu}^\nu V_\nu$$

Si V^μ est un vecteur covariant, $V_\mu = \eta_{\mu,\nu} V^\nu$ est un vecteur contravariant et $V^\mu \eta_{\mu,\nu} V^\nu = V^\mu V_\mu \equiv V_\mu^2$ est un invariant de Lorentz.

Matrices de Pauli : dfinies par

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

elle vrifient $\{\sigma^i, \sigma^j\} \equiv \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{i,j}$ et permettent de dfinir

$$\sigma^\mu \equiv \tilde{\sigma}_\mu \equiv (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \qquad \sigma_\mu \equiv \tilde{\sigma}^\mu \equiv \eta_{\mu,\nu}\sigma^\nu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \quad (1)$$

[1]On note * la conjugaison complexe, ^{t} la transposition des matrices et † l'hermitique conjugu, compose des deux prcdents.

0.1.2 Prliminaires

Si V_μ est un vecteur contravariant, on dfinit $\mathbb{V} \equiv V_\mu \sigma^\mu$.

1. Si V_μ est un vecteur rel, que peut-on dire de la matrice $\mathbb{V}$?

2. Calculer $\det \mathbb{V}$.

3. Si A est une matrice de $SL_2(\mathbb{C})$ (i.e. une matrice complexe 2×2 de dterminant 1) verifier que la transformation linaire $V_\mu \to V'_\mu$ dfinie par $A\mathbb{V}A^\dagger \equiv V'_\mu \sigma^\mu$ transforme un vecteur rel en un vecteur rel de mme longueur et en dduire que c'est une transformation de Lorentz (optionnel : on obtient ainsi les transformations de Lorentz propres). On peut donc crire

   $$V'_\mu \equiv \Lambda_\mu{}^\nu(A) V_\nu$$

   o $\Lambda_\mu{}^\nu(A)$ est une transformation de Lorentz.

4. Si $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ dfinissent la mme transformation de Lorentz, i.e. si pour toute matrice hermitienne $\mathbb{V}$ on a $A\mathbb{V}A^\dagger = B\mathbb{V}B^\dagger$, alors $A = \pm B$.

5. Quelle est la transformation de Lorentz correspondant au produit AB de deux matrices de $SL_2(\mathbb{C})$?

6. (optionnel) Si A, B sont deux matrices de $M_2(\mathbb{C})$ (i.e. deux matrices complexes 2×2), quelle(s) condition(s) le vecteur V'_μ dfini par $A\mathbb{V}B \equiv V'_\mu \sigma^\mu$ vrifie-t-il
   – ${V'_\mu}^2 = V_\mu^2$?
   – V'_μ est rel si V_μ l'est ?
   Quelles transformations linaires sur V_μ de ce type ne se ramnent pas au cas de la question 3 ?

0.1.3 Spineurs de Weyl

L'existence exprimentale de particules de spin 1/2 comme l'lectron amne "remplacer" le groupe de Lorentz propre par $SL_2(\mathbb{C})$, qui est en est un recouvrement double et que nous noterons Lorentz'.

On appelle spineur de type $(1/2, 0)$ un vecteur complexe deux composantes ψ_α tel que, dans une transformation de Lorentz'

$$\psi'_\alpha = A_\alpha{}^\beta \psi_\beta \quad A_\alpha{}^\beta \in SL_2(\mathbb{C})$$

et spineur de type $(0, 1/2)$ un vecteur complexe deux composantes $\bar\psi^{\dot\alpha}$ tel que, dans une transformation de Lorentz'

$$\bar\psi'^{\dot\alpha} = (A^*)^{-1}{}_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha} \bar\psi^{\dot\beta} \quad A_\alpha{}^\beta \in SL_2(\mathbb{C})$$

1. Vrifier que les spineurs de type $(0, 1/2)$ se transforment correctement sous l'action de deux transformations de Lorentz' successives.

2. Comment les vecteurs se transforment-ils dans une transformation de Lorentz' ?

3. Vrifier que, si $\tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ comme dfinie l'quation (1)

$$\sigma^2 \tilde{\sigma}^\mu \sigma^2 = \sigma^{\mu *}$$

et que si A est une matrice de $SL_2(\mathbb{C})$

$$\sigma^2 A^t \sigma^2 = A^{-1}$$

4. En dduire que

$$\sigma^\mu {\Lambda_\mu}^\nu(A) = A\sigma^\nu A^\dagger \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}^\mu {\Lambda_\mu}^\nu(A) = (A^{-1})^\dagger \sigma^\nu A^{-1}$$

5. Montrer que si ψ est un spineur de type $(1/2, 0)$, $-i\sigma^2\psi^*$ est un spineur de type $(0, 1/2)$.

6. Montrer que si $\bar{\psi}$ (resp. ψ) est un spineur de type $(0, 1/2)$ (resp. $(1/2, 0)$)

$$\psi^\dagger \bar{\psi} \quad \text{et} \quad \bar{\psi}^\dagger \psi$$

sont des scalaires dans les transformations de Lorentz'.

7. Montrer que si V_μ est un vecteur (contravariant) et $\bar{\psi}$ (resp. ψ) est un spineur de type $(0, 1/2)$ (resp. $(1/2, 0)$)

$$(\bar{\psi}^\dagger \sigma^\mu \bar{\psi}) V_\mu \quad \text{et} \quad (\psi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi) V_\mu$$

sont des scalaires donc que

$$\bar{\psi}^\dagger \sigma^\mu \bar{\psi} \quad \text{et} \quad \psi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi$$

sont des vecteurs covariants dans les transformations de Lorentz'.

0.1.4 Spineurs de Dirac et de Majorana

On appelle spineur de Dirac un vecteur complexe quatre composantes Ψ dont les deux premires composantes sont un spineur de type $(1/2, 0)$ (not ψ_L) et les deux dernires un spineur de type $(0, 1/2)$ (not ψ_R) :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}.$$

Si Ψ est un spineur de Dirac, on note $\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$.
L'lectron (et son antiparticule le positron) sont trs bien dcrits par un spineur de Dirac dans de nombreux phnomnes.
Un spineur de Majorana est un spineur de Dirac tel que $\psi_R = -i\sigma^2 \psi_L^*$.

1. S'assurer que les matrices 4×4

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

vrifient l'algbre de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu,\nu}$$

2. Montrer que si Ψ est un spineur de Dirac $\overline{\Psi}\Psi$ est un scalaire et $\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ un vecteur dans les transformations de Lorentz'. Que vaut $\overline{\Psi}\Psi$ si Ψ est un spineur de Majorana ?

3. Si $\Psi(x^\mu)$ est solution de l'quation de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x^\mu) = 0$$

et si $x'^\mu = x^\nu {\Lambda_\nu}^\mu$ est une transformation de Lorentz associe la transformation de Lorentz' $A \in SL_2(\mathbb{C})$, montrer que

$$\Psi'(x'^\mu) \equiv \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^\dagger \end{pmatrix} \Psi(x^\mu)$$

est solution de

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\Psi'(x'^\mu) = 0$$

Ceci montre que l'quation de Dirac est covariante dans les transformations de Lorentz'.

4. Montrer que si $m = 0$ les quations pour ψ_L et ψ_R se dcouplent. On a longtemps pens que les neutrinos taient dcrit par des spineurs de Weyl. On sait depuis quelques annes qu'il sont en fait massifs, mais les neutrinos (lectroniques en particulier) ont une masse si faible que la description par des spineurs deux composantes est tout--fait satisfaisante dans de nombreux cas.

0.1.5 Rotations et boosts (optionnel)

Le but de cet exercice est d'interprter les rotations et boosts en terme de transformations de Lorentz'.

1. Dcomposition polaire : si M est une matrice inversible de $M_2(\mathbb{C})$, alors il existe une unique matrice H hermitienne[2] et une unique matrice U unitaire[3] telles que

$$M = Ue^H.$$

Si $A \in SL_2(\mathbb{C})$ et qu'on la dcompose comme $A = Ue^H$ alors $\det U = 1$ et $\mathrm{Tr}\, H = 0$.

2. Si l'on crit $H \equiv H_\mu\sigma^\mu \equiv h_0\sigma^0 + h_i\sigma^i$ et $||h|| \equiv \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$ montrer que

$$e^H = e^{h_0}(\mathrm{ch}\,||h||\,\sigma^0 + \frac{\mathrm{sh}\,||h||}{||h||} h_i\sigma^i)$$

3. Le cas o $A = U$ est une matrice unitaire de determinant 1 (i.e. $H = O$).
   – Montrer que

$$U\sigma^0U^\dagger = \sigma^0 \quad \text{et} \quad U\sigma^iU^\dagger = \sigma^j {R_j}^i$$

   o ${R_j}^i$ est une matrice de rotation.
   – En dduire que les spineurs ψ_L et ψ_R sont pour les rotations trois dimensions des spineurs usuels de la thorie du moment cintique.

[2] Une matrice H est hermitienne si $H^\dagger = H$.
[3] Une matrice U est unitaire si $U^\dagger = U^{-1}$.

4. Le cas o $A = e^H$ est une matrice hermitienne positive de dterminant 1 (i.e. $U = 1$).
   – Montrer que ψ_L et ψ_R ont des transformations diffrentes.
   – Calculer $e^H \sigma^\mu e^{H^\dagger}$ si $H = h\sigma^1$.
   – En composant avec une rotation, dduire qu'en gnral la transformation de Lorentz associe H est un boost de vitesse

$$c\frac{\mathrm{th}\, 2||h||}{2||h||}h_i$$

L'utilisation de $SL_2(\mathbb{C})$ pour manipuler commodment les transformations de Lorentz est l'analogue des formules de Hamilton pour le groupe des rotations trois dimensions.

0.1.6 Le cas du groupe des rotations quatre dimensions (trs optionnel)

1. En remplaant σ^0 par $i\sigma^0$ pour associer une matrice 2×2 un vecteur, reprendre toutes les questions prcdente dans le cas Euclidien, quand la matrice $\eta^{\mu,\nu}$ est remplace par $\delta^{\mu,\nu}$... Quelles sont les similitudes et les diffrences ?

0.2 L'quation de Dirac deux dimensions : le puit de potentiel

1. Trouver les tats stationnaires pour l'quation de Schrdinger (non relativiste) dcrivant une particule dans un puit de potentiel carr : $V(x) = 0$ pour $x \in [0, L]$ mais $V(x) = V_0 > 0$ pour $x \notin [0, L]$.
   Que se passe-t-il la limite $V_0 \to +\infty$?

2. Il y a deux possibilits inquivalentes pour le pendant relativiste du problme prcdent (par exemple pour l'quation de Dirac) :
   – faire la substition $i\partial_t \to i\partial_t - V(x) \to E - V(x)$
   – faire les substitutions $m \to m + V(x)$ et $i\partial_t \to E$
   Qu'est-ce qui les distingue gomtriquement, i.e. comment se comporte $V(x)$ dans les transformations de Lorentz dans les deux cas ?

3. (optionnel) Vrifier que les deux choix redonnent l'quation de Schrdinger la limite non relativiste.

4. Trouver les tats stationnaires dans le second cas.
   Que se passe-t-il la limite $V_0 \to +\infty$?

5. Quel problme rencontrez-vous en cherchant les tats stationnaires dans le premier cas ? Ceci est li au "paradoxe de Klein".

Il n'est pas exclu qu'un choix judicieux de matrices de Dirac simplifie un peu ce problme.