FIP master 1ère année
lundi 8 janvier 2007

M2 - Théorie quantique des champs

TD 14 : Le modèle d'Ising unidimensionnel

Dans tout le TD on considère une chaîne de N spins d'Ising $\sigma_i = \pm 1$, $i \in [1, N]$, avec des conditions aux bords périodiques $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, en équilibre avec un thermostat à la température $T = 1/\beta$. L'hamiltonien du système est :

$$\mathcal{H} \quad = \quad -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

Que représentent J et H ?

On notera dans la suite la fonction de partition sous la forme :

$$Z_N(J, H) \quad \equiv \quad \sum_{\sigma_1=\pm 1, \ldots, \sigma_N=\pm 1} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

Pour simplifier les expressions, on posera $\beta = 1$ ce qui correspond juste à une redéfinition de J et H.

I. Développement diagrammatique

1) Montrez l'identité suivante, valable $\forall x \in \mathbb{R}$, si $\epsilon = \pm 1$:

$$e^{x\epsilon} \quad = \quad (\cosh x)\,(1 + \epsilon \tanh x)$$

2) En déduire que la fonction de partition à champ nul peut s'exprimer comme :

$$Z_N(J, 0) \quad = \quad (\cosh J)^N \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_N} \prod_{i=1}^{N} (1 + \sigma_i \sigma_{i+1} \tanh J) \tag{1}$$

On peut associer une représentation diagrammatique à chacun des termes du développement de ce produit : le lien entre le site i et le site $i+1$ est présent si le facteur $\sigma_i \sigma_{i+1} \tanh J$ est choisi, absent dans l'autre cas.

Quels sont les diagrammes qui survivent quand on fait la somme sur les σ_i ?

3) En déduire que :

$$Z_N(J, 0) \quad = \quad (2 \cosh J)^N + (2 \sinh J)^N$$

Dans la limite thermodynamique, que vaut l'énergie libre par spin, $\mathcal{F} = -\frac{1}{N} \ln Z$?

4) On veut calculer la fonction de corrélation $\langle \sigma_k \sigma_l \rangle$, où k et l désignent deux sites de la chaîne. Explicitez la définition de la moyenne $\langle \ldots \rangle$.

5) Mettez la fonction de corrélation sous une forme ressemblant à (1). Que pouvez conclure sur les diagrammes correspondants qui contribuent à cette expression?

6) Dans la limite thermodynamique, mettez la fonction de corrélation sous la forme :

$$\langle \sigma_k \sigma_l \rangle \quad = \quad e^{-|l-k|/\xi}$$

On donnera l'expression et l'interprétation de ξ.

7) Déterminez et interprétez le comportement de ξ quand $T \to 0$.

8) On note a la distance entre deux spins consécutifs, on pose $x = la$ et $y = ka$. De plus, on suppose que ξa possède une limite finie $1/m$ lorsque $a \to 0$ (justifiez le validité de cette hypothèse). Déduisez que dans cette limite, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation est donnée par

$$\int dx\, e^{ipx} \, \langle \sigma(x)\sigma(0) \rangle \quad = \quad \frac{2m}{p^2 + m^2}$$

II. Décimation

L'idée, très générale, de cette méthode consiste à éliminer une partie des degrés de liberté pour se ramener à un système "équivalent" plus petit. Plus précisément, dans le cas étudié ici, on part d'une chaîne de $2N$ spins et l'on somme sur les spins des sites pairs pour aboutir à une chaîne de longueur N.

1) Montrez que l'on peut écrire :

$$\sum_{\sigma_2 = \pm 1} e^{J(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3)} \quad = \quad A\, e^{J'\sigma_1\sigma_3} \qquad (2)$$

où A et J' sont des fonctions de J que vous calculerez.

2) Quels sont les points fixes de l'application $J' = f(J)$?

3) Montrez que la longueur de corrélation se transforme comme

$$\xi\left(J'\right) = \frac{\xi(J)}{2}$$

Justifiez ce résultat.

4) Déduisez de la relation (2) une formule reliant Z_{2N} et Z_N.

III. Matrice de transfert

1) Mettez la fonction de partition sous la forme :

$$Z_N(J,H) \quad = \quad \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_N} \prod_{i=1}^{N} T(\sigma_i,\sigma_{i+1})$$

avec T symétrique.

2) Introduisez une matrice $\mathbb{T}$, d'ordre 2, telle que $\mathbb{T}_{\sigma\sigma'} = T(\sigma,\sigma')$, et exprimez $Z_N(J,H)$ en fonction de $\mathbb{T}$.

3) Trouvez les valeurs propres $\lambda_\pm$ de $\mathbb{T}$ ($\lambda_+ > \lambda_-$).

4) Exprimez la densité d'énergie libre par spin $\mathcal{F}$ en fonction des $\lambda_\pm$ et simplifiez le résultat dans la limite thermodynamique.

5) Montrez que la fonction de corrélation peut s'écrire

$$\langle\sigma_k\sigma_l\rangle \quad = \quad \frac{1}{Z_N(J,H)}\mathrm{Tr}\left(\tau_z\mathbb{T}^{|k-l|}\tau_z\mathbb{T}^{N-|k-l|}\right)$$

où Tr désigne la trace et τ_z est la matrice

$$\tau_z \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Faites le calcul explicite de la fonction de corrélation dans le cas $H = 0$.