FIP master 1ère année
lundi 18 décembre 2006

M2 - Théorie quantique des champs

TD 13 : Régularisation dimensionnelle

I. Préambule

Dans l'ensemble de ce TD, on travaille dans l'euclidien. On considère la théorie à d dimensions définie par l'action suivante

$$S[\varphi] \quad = \quad \int d^d x \, \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \frac{\lambda}{n!} \varphi^n(x)$$

où n est un entier supérieur ou ègal à 3.

1) Quelles sont, en termes d'une unité de masse, les dimensions du champ φ et de la constante de couplage λ ? A quelle condition la constante de couplage λ est-elle sans dimension ?

2) Pour quelle valeur de d le couplage λ est-il sans dimension si $n = 4$, si $n = 3$? Pour ces deux cas particuliers rappelez, en fonction du nombre de pattes externes, quelles sont les diagrammes de Feynman superficiellement divergents. On utilisera le comptage des puissances.
Dessinez, pour $\varphi^4, d = 4$ puis $\varphi^3, d = 6$, tous les graphes divergents à une boucle et donner leur degré superficiel de divergence.

3) Dans la suite, on se concentre sur les fonctions à 2 et 4 points pour $\varphi^4, d = 4$ et sur la fonction à 2 points pour $\varphi^3, d = 6$. Donnez les expressions des diagrammes de Feynman à une boucle correspondants. N'oubliez pas les facteurs de symétrie !

4) Montrez que le diagramme à une boucle et deux pattes externes pour φ^4, d amène à calculer l'intégrale

$$I \quad = \quad \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2}.$$

Discutez suivant la valeur de d les cas où cette intégrale est convergente ou divergente (explicitez dans ce cas le type de divergence). Que se passe-t-il lorsque $m = 0$?

5) Montrez que les trois diagrammes à une boucle et quatre pattes externes pour φ^4, d et le diagramme à une boucle et deux pattes externes pour φ^3, d amènent tous à calculer l'intégrale

$$J = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(p-q)^2+m^2}.$$

On exprimera p en fonction des impulsions externes.
Discutez suivant la valeur de d les cas où cette intégrale est convergente ou divergente (explicitez dans ce cas le type de divergence).

II. Régularisation dimensionnelle

1) Montrez que la surface S_d d'une sphère de rayon unité en dimension d quelconque est donnée par

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt\, t^{x-1} e^{-t}$$

On pourra pour cela, effectuer de deux façons différentes, le calcul de l'intégrale gaussienne suivante

$$\int d^d k e^{-k^2/2}$$

Remarquer que le résultat a un sens pour une valeur (presque) quelconque de d, et pas seulement pour les entiers positifs.

2) Soit l'intégrale suivante

$$\int d^d k f(k)$$

où f ne dépend que de la norme de k. Montrez qu'il est possible de donner un sens à cette intégrale lorsque d n'est pas un entier.

3) Pour illustrer la question précédente, considérons l'intégrale

$$I = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2}$$

introduite plus haut.

En utilisant l'identité suivante

$$\frac{1}{q^2+m^2} = \int_0^{+\infty} d\alpha\, e^{-\alpha\left(q^2+m^2\right)},$$

montrez que

$$I = \frac{m^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$$

4) Avec le même type d'astuce, on peut traiter l'intégrale

$$J = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(p-q)^2+m^2}.$$

même si l'intégrant n'est pas fonction que de q^2.
Écrivez

$$\frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(p-q)^2+m^2} = \int_0^{+\infty} d\alpha \; e^{-\alpha\left(q^2+m^2\right)} \int_0^{+\infty} d\beta \; e^{-\beta\left((p-q)^2+m^2\right)}$$

et calculez l'intégrale sur q (qui est gaussienne) pour obtenir

$$J = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int\int_0^{+\infty} d\alpha d\beta \; \frac{1}{(\alpha+\beta)^{d/2}} \; e^{-m^2(\alpha+\beta)-p^2\alpha\beta/(\alpha+\beta)}.$$

Posant $\alpha = tx$, $\beta = t(1-x)$, vérifiez que

$$J = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} dt \; t^{1-d/2} \; e^{-t(m^2+x(1-x)p^2)},$$

et calculez l'intégrale sur t pour obtenir

$$J = \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \; \left(m^2+x(1-x)p^2\right)^{d/2-2}.$$

5) On montre, pour $\mathrm{Im}\, x > 0$, l'identité $\Gamma(x+1)/x = \Gamma(x)$ par une intégration par parties. Par itération, ceci définit la fonction Γ pour toute valeur réelle ou complexe hormis aux points $-1, -2, \ldots$. Donc l'intégrale I est définie pour les valeurs non entières de d ainsi que pour d impaire, elle s'annulle (!) si $d > 2$ et $m = 0$. De même, l'intégrale I est définie pour les valeurs non entières de d ainsi que pour d impaire

Vérifiez que la fonction Γ admet le développement suivant autour de 0

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \gamma + o(\epsilon)$$

où γ est la constante d'Euler

$$\gamma = \int_0^{+\infty} dt \; \ln t \; e^{-t}$$

III. Renormalisation de $\varphi^4, d = 4$ à une boucle

1) Dans le cours, on a vu que la fonction à 2 points peut s'écrire

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2+m^2-\Sigma(p)}.$$

Gardant d quelconque, vérifiez que $\Sigma(p) = -\frac{\lambda}{2} I + O(\lambda^2)$.
Posant $m_r^2 \equiv m^2 + \frac{\lambda}{2} I + O(\lambda^2)$, vérifiez qu'en fonction de m_r (et non plus de m) $G_2(p)$ a une limite bien définie pour $d \to 4$ au premier ordre en λ. Quelle est cette limite ?

2) Vérifiez que la fonction “une particule irréductible à 4 points” s'écrit

$$\Gamma_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad = \quad \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\left(J(p_1+p_2) + J(p_1+p_3) + J(p_1+p_4)\right) + O(\lambda^3).$$

Montrez qu'à cet ordre, on peut remplacer m par m_r

3) Gardant d quelconque, on définit la constante de couplage renormalisée par $\lambda_r \equiv \Gamma_4(p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} J(p=0) + O(\lambda^3)$ en supposant $m_r \neq 0$. Montrez qu'en fonction de m_r et λ_r (et plus de m et λ), Γ_4 a une limite bien définie pour $d \to 4$ au second ordre en λ_r. On posera $d = 4 - \varepsilon$ et on utilisera le développement de la fonction Γ d'Euler vu ci-dessus.

4) Pour les courageux : donnez une expression aussi simple que possible de cette limite.

IV. Renormalisation du propagateur pour $\varphi^3, d = 6$ à une boucle

1) Écrivant à nouveau

$$G_2(p) \quad = \quad \frac{1}{p^2 + m^2 - \Sigma(p)},$$

vérifier que $\Sigma(p) = -\frac{\lambda^2}{2} J + O(\lambda^3)$.

2) Gardant d quelconque, développez J à l'ordre 1 en p^2. On définit m_r^2/Z_r comme le coefficient constant et $1/Z_r$ comme le coefficient de p^2 dans le développement de $p^2 + m^2 - \Sigma(p)$ en puissances de p^2. Montrez qu'en fonction de m_r (et plus de m), $G_{2,r}(p) \equiv G(p)/Z_r$ a une limite bien définie pour $d \to 6$ au second ordre en λ. On posera $d = 6 - \varepsilon$ et on utilisera le développement de la fonction Γ d'Euler vu ci-dessus.

3) Montrez que Z_r peut se réabsorber par un changement de normalisation du champs. Qu'est ce qu'une telle redéfinition évoque ? Pour les courageux : donnez une expression aussi simple que possible de $G_{2,r}(p)$ à $d = 6$ au second ordre en λ.