FIP master 1ère année
lundi 4 décembre 2006

M2 - Théorie quantique des champs

TD 11 : Intégrale de chemin à zéro dimension : mécanique quantique

L'objectif de ce TD est de donner un aperçu de l'intégrale de chemin. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la reformulation de la mécanique quantique dans le cadre de ce formalisme. Cette démarche peut être étendue au cas de la théorie quantique des champs.

Soit une particule évoluant selon l'hamiltonien indépendant du temps

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{x})$$

On notera $|\vec{x}\rangle$ les états propres de l'opérateur position et $|\vec{p}\rangle$ les états propres de l'opérateur impulsion avec la convention

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{x}\vec{p}}$$

A l'instant $t = 0$, on suppose que la particule est décrite par l'état $|\vec{x}_i\rangle$ et on se propose d'exprimer l'amplitude de probabilité

$$\mathcal{A} \quad = \quad \left\langle \vec{x}_f \left| e^{-iH\tau} \right| \vec{x}_i \right\rangle$$

de trouver la particule en $\vec{x}_f$ à l'instant τ.

1) On subdivise l'intervalle de temps τ en N pas de temps $\Delta\tau = \tau/N$ (N grand). Montrez qu'au premier ordre

$$e^{-iH\Delta\tau} \quad \simeq \quad e^{-i\frac{P^2}{2m}\Delta\tau} e^{-iV(\vec{x})\Delta\tau}$$

2) En insérant de façon judicieuse les relations de fermeture pour les bases $\{|\vec{x}\rangle\}$ et $\{|\vec{p}\rangle\}$, déduisez de la question précédente que

$$\mathcal{A} = \int \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \int \prod_{j=1}^{N} d^3 x_j \qquad \delta^{(3)}\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_i\right) e^{-i\Delta\tau\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{p}_j^2}{2m} + V(\vec{x}_j)\right)}$$
$$\times e^{i\sum_{j=1}^{N-1} \vec{p}_j(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)} e^{i(\vec{x}_f - \vec{x}_N)\vec{p}_N}$$

3) Montrez que le calcul de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\; e^{i\frac{p^2}{2m}}$$

revient à un calcul d'intégrale gaussienne. On admettra pour la suite que les résultats connus pour les variables gaussiennes s'appliquent aussi au cas où les variances sont imaginaires pures.

4) Effectuez l'intégration par rapport aux $\vec{p}_j$ dans l'expression de $\mathcal{A}$.

5) On prend la limite $\Delta\tau \to 0$, τ étant fixé. Montrez que

$$\Delta\tau \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{m\left(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j\right)^2}{2\Delta\tau^2} + V\left(\vec{x}_j\right) \right) \quad \to \quad \int_0^\tau dt \frac{m\dot{\vec{x}}^2(t)}{2} + V\left(\vec{x}(t)\right)$$

Argumentez le fait que termes $\delta^{(3)}\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_i\right)$ et $\exp\left(im\left(\vec{x}_f - \vec{x}_N\right)^2 / \left(2\Delta\tau\right)\right)$ dans cette limite, correspondent à imposer que $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_i$ et $\vec{x}(t=\tau) = \vec{x}_f$.

6) Dans le cadre de la limite $\Delta\tau \to 0$, on choisit la notation suivante pour la mesures

$$\int \prod_{j=1}^{N} \frac{d^3x_j}{\left(\frac{2\pi\Delta\tau}{im}\right)^{3/2}} \to \int \mathcal{D}\vec{x}(t)$$

On prendra soin d'indiquer en indice du signe intégrale les conditions aux limites. Ces mesures s'interprètent comme une intégration sur l'ensemble des "chemins" vérifiant les conditions aux limites.

Montrez qu'au final, l'amplitude de probabilité peut s'écrire

$$\mathcal{A} \quad = \quad \int_{\substack{\vec{x}(0) = \vec{x}_i \\ \vec{x}(\tau) = \vec{x}_f}} \mathcal{D}\vec{x}(t)\;\; e^{i\dfrac{S\left[\vec{x}(t)\right]}{\hbar}}$$

où S est l'action classique (la constante $\hbar$ a été explicitement réintroduite).

Interprétez le résultat ainsi obtenu.

7) Rappelez le principe de la méthode du col. On considérera l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-\alpha f(x)}$$

où α joue le rôle du grand paramètre ($\alpha > 0$). Dans le cas où l'on remplace $-\alpha \to i\alpha$, argumentez le fait que la démarche soit similaire. C'est l'approximation de la phase stationnaire.

Montrez qu'il est possible de retouver la limite classique à partir de l'intégrale de chemin lorsque $\hbar \to 0$ en s'appuyant sur l'approximation de la phase stationnaire.

8) Donnez une interprétation simple de l'expérience des fentes d'Young dans le cadre du formalisme de l'intégrale de chemin.

9) Le formalisme de l'intégrale de chemin s'applique aussi à la mécanique statistique. On s'intéresse au cas de l'ensemble canonique. Montrez que la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right)$$

peut aussi s'exprimer à l'aide d'une intégrale de chemin. Pour simplifier le problème, on considérera des particules indépendantes dans un potentiel extérieur $V(\vec{x})$. Comment intuiter le résultat à partir de celui de la mécanique quantique?

Discutez qualitativement du résultat en présence d'interactions entre particules.