FIP master 1ère année
lundi 27 novembre 2006

M2 - Théorie quantique des champs

TD 10 : Potentiel de Yukawa

On considère deux particules représentées par des paquets d'onde gaussiens centrés aux points fixes x_1 et x_2 et de largeur σ_1 et σ_2. Ces particules interagissent en absorbant et émettant des particules scalaires de charge nulle et de masse m, décrites par le champ quantique $\hat{\varphi}$. Pour ce champ, les deux particules se comportent comme des sources classiques qu'il est possible de décrire par

$$J(x) \quad = \quad \frac{g_1}{\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{g_2}{\left(2\pi\sigma_2^2\right)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

où g_1 et g_2 sont des constantes. La masse des particules sera considérée comme largement supérieure à m validant ainsi l'hypothèse de particules statiques.

L'objectif de ce problème est de déterminer la forme du potentiel associé à cette interaction entre les deux particules dont le médiateur est le champ $\hat{\varphi}$.

1) Rappelez l'hamiltonien libre H_0 pour le champ scalaire quantique $\hat{\varphi}$ et la relation de commutation vérifiée par ce champ. Dérivez l'expression du propagateur ordonné dans le temps

$$\langle 0 \left| T\left(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right) \right| 0 \rangle \quad = \quad i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i0^+}$$

$|0\rangle$ est le vide de l'hamiltonien libre dont l'énergie est prise égale à zéro.

2) Ecrire l'hamiltonien $H(t)$ pour le champ scalaire quantique $\hat{\varphi}$ en présence du terme de source.

3) Pour trouver la forme du potentiel, nous faisons le raisonnement suivant. A $t < t_0$, les sources sont éteintes ($g_1 = g_2 = 0$). A $t = t_0$ on branche les deux sources de façon adiabatique. Puis l'instant $t = t_0 + \tau$, on débranche ces sources. On définit la persistance du vide par

$$\langle 0 \left| S \right| 0 \rangle \quad = \quad \langle 0 \left| U(+\infty, -\infty) \right| 0 \rangle$$

où $U(t_2, t_1)$ désigne l'opérateur d'évolution entre les instants t_1 et t_2.

Montrez que cette quantité vaut

$$\langle 0 \left| U(+\infty, -\infty) \right| 0 \rangle \quad = \quad \left\langle 0 \left| T\left(e^{i \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt H(t)} \right) \right| 0 \right\rangle$$

4) Justifiez qualitativement le fait que la condition d'adiabaticité nous permet d'écrire la relation suivante

$$\left\langle 0 \left| T \left(e^{i \int_{t_0}^{t_0+\tau} H(t) dt} \right) \right| 0 \right\rangle = e^{-i \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt E(g_1(t), g_2(t))}$$

$E(g_1(t), g_2(t))$ est l'énergie du système en fonction des deux paramètres $g_1(t)$ et $g_2(t)$ qui passe de 0 à leur valeur nominale lors de l'allumage des sources (et inversement au moment de l'extinction des sources).

On supposera dans la suite que τ est suffisament grand devant le temps necessaire pour allumer et eteindre les sources pour pouvoir considérer que $E(g_1(t), g_2(t)) = E_J$, où E_J est l'énergie du système en présence des sources. La persistance du vide nous permet ainsi d'extraire la variation d'énergie dûe à l'interaction entre les particules.

5) Dans le cours, il a été démontré que la valeur moyenne de $U(+\infty, -\infty)$ en présence d'un terme de source classique est donnée par

$$\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \tilde{J}(x) \langle 0 | T(\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y)) | 0 \rangle \tilde{J}(y)}$$

où dans notre cas $\tilde{J}$ vaut J pour $t_0 < t < t_0 + \tau$ et 0 sinon. Montrez que l'énergie E_J peut ici se décomposer de la façon suivante

$$E_J = g_1^2 \mathcal{I}_{11} + g_2^2 \mathcal{I}_{22} + g_1 g_2 \mathcal{I}_{12}$$

Les deux premiers termes s'interprètent comme des termes d'énergie propre pour les particules 1 et 2. Le troisième terme correspond à l'énergie d'interaction. Nous nous concentrons donc uniquement sur ce dernier que nous interpréterons comme l'énergie d'interaction ΔE entre les deux particules.

6) Pour simplifier les calculs, nous allons supposer que l'extension spatiale des particules est négligeable devant les autres longueurs caractéristiques du problème. On peut ainsi prendre la limite $\sigma_1, \sigma_2 \to 0$. Montrez que dans cette limite

$$\frac{1}{\left(2\pi\sigma_{1,2}^2\right)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{x}_{1,2})^2}{2\sigma_{1,2}^2}} \longrightarrow \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{1,2})$$

7) Vérifiez alors que

$$\mathcal{I}_{12} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x_1}-\vec{x_2})}}{k^2 + m^2}$$

8) Montrez la relation suivante

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}{k^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{x_1}-\vec{x_2}|}}{|\vec{x_1} - \vec{x_2}|}$$

Déduisez-en que l'énergie d'interaction ΔE entre les deux particules, est donnée par

$$\Delta E = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

9) L'interaction ainsi décrite correspond au potentiel de Yukawa. Commentez ce résultat (signe et portée de l'interaction). Que se passe-t-il dans la limite $m \to 0$?