M2 - Théorie quantique des champs

TD 1

Fonctions de Green

I. Fonction de Heaviside

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)e^{i\omega t} \quad (1)$$

et la transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Soit la fonction $\theta_\varepsilon(t)$ définie par

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon(t) &= 0 \text{ si } t < 0 \\ \theta_\varepsilon(t) &= e^{-\varepsilon t} \text{ si } t \geq 0 \end{aligned}$$

où ε est un paramètre réel positif.

- 1) Quelle est la limite de $\theta_\varepsilon(t)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$?
- 2) Calculer la transformée de Fourier $\tilde{\theta}_\varepsilon(\omega)$ de la fonction $\theta_\varepsilon(t)$. Où est le pôle dans le plan complexe ? Vérifier sur ce cas particulier que ceci est conforme à la notion de fonction de Green retardée.
- 3) Calculer la transformée de Fourier inverse au moyen du théorème des résidus. Quel contour d'intégration faut-il utiliser pour $t < 0$? Idem pour $t > 0$?

II. Propagateur de l'onde à une dimension

Le but de ce problème est de résoudre l'équation d'onde à une dimension avec un second membre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) s(t, x) = j(t, x) \quad (3)$$

où $j(t, x)$ est une fonction donnée. Cette équation admet une infinité de solutions. Nous déterminerons la solution retardée qui s'annule pour $t \rightarrow -\infty$. Dans tout le problème, nous supposerons que $j(t, x)$ s'annule à l'infini en x et t , ce qui nous permettra d'appliquer la transformée de Fourier.

1) Solution explicite

- a) L'équation d'onde à une dimension se simplifie considérablement lorsqu'on l'écrit dans le système de coordonnées du cône de lumière (x^+, x^-) définies par

$$x^+ = \frac{t+x}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

On notera S et J les expressions de s et j dans le nouveau système de coordonnées

$$\begin{aligned} S(x^+, x^-) &= s\left(\frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}\right) \\ J(x^+, x^-) &= j\left(\frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Montrer que l'équation (3) se réécrit dans le nouveau système de coordonnées

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} S(x^+, x^-) = \frac{1}{2} J(x^+, x^-) \quad (5)$$

- b) Quelle est la solution générale de l'équation (5) lorsque $j(t, x) = 0$?
Quelle en est l'interprétation physique?
c) Vérifier que la solution retardée de l'équation (5) est

$$S(x^+, x^-) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dx_1 \int_0^{+\infty} dx_2 J(x^+ - x_1, x^- - x_2) \quad (6)$$

- d) Représenter le domaine d'intégration de l'équation (6) dans le plan (x^+, x^-) puis (t, x) . En déduire la solution correspondante $s(t, x)$ en fonction de $j(t, x)$.

2) fonction de Green

- a) Mettre la solution précédente sous la forme

$$s(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G(t', x') j(t - t', x - x') \quad (7)$$

où $G(t, x)$ est la fonction de Green de l'équation

$$G(t, x) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|) \quad (8)$$

où $\theta(x)$ est la fonction d'Heaviside, nulle pour $x < 0$ et égale à 1 pour $x > 0$.

- b) La fonction $G(t, x)$ ne s'annulant pas pour $t \rightarrow +\infty$, il n'est pas possible de calculer directement sa transformée de Fourier. Par contre, on peut calculer la transformée de $G(t, x)e^{-\varepsilon t}$ où ε est un paramètre réel positif que ferons tendre vers 0 à la fin du calcul. Effectuer ce calcul et mettre le résultat sous la forme

$$\tilde{G}(\omega, k) = \frac{1}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}$$

où sont les pôles de $\tilde{G}$ dans le plan complexe de la variable ω ?

- c) Calculer $s(t, x)$ définie par l'équation (7) dans le cas particulier où $j(t, x) = \delta(t)\delta(x)$. Dédire alors de l'équation (3) que $G(t, x)$ est solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G = \delta(x)\delta(t)$$

Effectuer une transformée de Fourier de cette équation et montrer qu'on retrouve le résultat précédent au facteur $i\varepsilon$ près.

III. Potentiel retardé en électromagnétisme

On rappelle les équations de Maxwell sous leur forme covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (9)$$

où $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ est le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique, A^μ le quadrivecteur potentiel et j^μ le quadrivecteur densité de courant.

- 1) Démontrer, dans la jauge de Lorenz, que A^μ vérifie l'équation

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (10)$$

- 2) On note $G_{\text{ret}}(x^\mu)$ le propagateur retardé vérifiant l'équation

$$\square G_{\text{ret}}(x^\mu) = \delta^{(4)}(x^\mu)$$

Déterminer l'expression de la transformée de Fourier $\tilde{G}_{\text{ret}}(k^\mu)$. (on utilisera la prescription des propagateurs retardés). En déduire l'expression de $G_{\text{ret}}(x^\mu)$.

- 3) Dériver de la question précédente, l'expression des potentiels retardés pour l'équation (10).

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3x' \frac{j^\mu(t - |\vec{x}' - \vec{x}|, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|}$$

- 4) (question facultative) Effectuer le même travail pour les potentiels avancés.