# Problème



$$S = \int dt \int_0^\ell dx \left( \frac{1}{2} \dot\varphi^2 - \frac{1}{2} \varphi'^2 \right)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n \geq 1} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \tilde\varphi_n$$

1) $$\dot\varphi = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n \geq 1} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \dot{\tilde\varphi}_n$$

$$\int_0^\ell dx \varphi'^2 = - \int_0^\ell dx \, \varphi \varphi''$$

$$\varphi'' = -\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \sin \frac{\pi n x}{\ell} \tilde\varphi_n$$

$$S = \int dt \sum_{n \geq 1} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \dot{\tilde\varphi}_n^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \tilde\varphi_n \right)}$$

mode $\tilde\varphi_n$ : oscillateur harmonique non couplé
aux autres $\tilde\varphi_m$ $m \neq n$
pulsation $\omega_n = \frac{\pi n}{\ell}$ $n = 1, 2, \dots$

2) $$E_n = \frac{1}{2} \omega_n \quad (\hbar = 1)$$

$$E_n = \frac{\pi n}{2\ell}$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{\pi n}{2\ell}$ est divergente

$$\sum_{E_n \leq E} E_n = \sum_{\frac{\pi n}{2\ell} \leq E} \frac{\pi n}{2\ell} = \frac{\pi}{2\ell} \sum_{n \leq \frac{2\ell E}{\pi}} n$$

$$\sum_{E_n \leq E} E_n \sim \frac{\pi}{2\ell} \; \frac{1}{2}\left(\frac{2\ell E}{\pi}\right)^2 = \frac{\ell E^2}{\pi}$$ qui diverge comme

le carré de $E$ → divergence quadratique.

<u>3</u>] Si $\varphi_k(t) = \sqrt{a}\,\varphi(t, ka) \quad k = 1, N$

$$S_a = \int dt \; a \left( \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t, ka)^2 - \sum_{0}^{N} \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi(t,(k+1)a) - \varphi(t, ka)}{a^2} \right)^2 \right)$$

Si $\varphi(t,x)$ est régulière, qd $a \to 0$

$$\varphi(t,(k+1)a) - \varphi(t, ka) = a\,\varphi'(t, ka) + O(a^2)$$
(ou $o(a)$)

$$S_a = \int dt \; a \sum_{k=1}^{N} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t, ka)^2 - \frac{1}{2} \varphi'(t, ka)^2 \right) + Na\,O(a)$$

Ce sont des sommes de Riemann, quand $a \to 0$ elle donnent $\int_0^\ell$, CQFD.

<u>4</u>] $$\dot{\varphi}_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \sin \frac{\pi n k}{N+1} \dot{\tilde{\varphi}}_n$$

$$\sum_{k=0}^{N} \left( \varphi_{k+1} - \varphi_k \right)^2 = - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \left( \varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} \right)$$

$$\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \left( \sin \frac{\pi n (k+1)}{N+1} - 2 \sin \frac{\pi n k}{N+1} + \sin \frac{\pi n (k-1)}{N+1} \right) \tilde{\varphi}_n$$

On utilise une identité trigonométrique

$$\sin\frac{\pi n(k+1)}{N+1}+\sin\frac{\pi n(k-1)}{N+1}=2\sin\frac{\pi n k}{N+1}\cos\frac{\pi n}{N+1}$$

$$\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1}=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sum_{n=1}^{N}\underbrace{2\left(\cos\frac{\pi n}{N+1}-1\right)}_{-4\sin^2\frac{\pi n}{2(N+1)}}\sin\frac{\pi k n}{N+1}\,\tilde{\varphi}_n$$

d'où

$$S_a=\int dt\sum_{n=1}^{N}\underbrace{\frac{1}{2}\dot{\tilde{\varphi}}_n^{\,2}-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_n^{\,2}\left(\frac{4}{a^2}\sin^2\frac{\pi n}{2(N+1)}\right)}$$

mode $\tilde{\varphi}_n$ : oscillateur harmonique non couplé aux autres $\tilde{\varphi}_m$ $m\neq n$

5] pulsation $\omega_n=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi n}{2(N+1)}$ $n=1,2,\dots,N$

(Rq: c'est bien toujours la racine carrée positive) $\frac{1}{N+1}=\frac{a}{\ell}$ d'où

$$\omega_n=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi n a}{2\ell}$$

Pour $n$ fixé à $a\to 0^+$ $\omega_n\to\frac{\pi n}{\ell}$ comme trouvé en 1]

6] $$E_n = \frac{1}{2}\omega_n = \frac{1}{a}\sin\frac{\pi n a}{2\ell} \qquad (k=1)$$

7] $$\sum_{n=1}^{N} E_n = \frac{1}{a}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\sin\frac{\pi n}{2(N+1)}}_{\equiv S}$$

$\equiv S$ (pour somme, pas pour action)

$$S = \sum_{n=0}^{N}\sin\frac{\pi n}{2(N+1)} \quad \text{car} \quad \sin\frac{\pi\cdot 0}{2(N+1)} = 0$$

$$S = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{\frac{i\pi n}{2(N+1)}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{2}}}{1-e^{i\frac{\pi}{2(N+1)}}}\right)$$

$$S = \mathrm{Im}\,\frac{1-i}{e^{\frac{i\pi}{4(N+1)}}(-2i)\sin\frac{\pi}{4(N+1)}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4(N+1)}}\,\mathrm{Im}\,(1+i)e^{-\frac{i\pi}{4(N+1)}}$$

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4(N+1)}}\left(-\sin\frac{\pi}{4(N+1)} + \cos\frac{\pi}{4(N+1)}\right)$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{N} E_n = \frac{1}{a}S = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4(N+1)}\right) - 1\right) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{cotg}\,\frac{\pi a}{4\ell} - 1\right.$$

8] $$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + O(u^5)$$
$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + O(u^4)$$
d'où $$\mathrm{cotg}\,u = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{u^2}{3} + O(u^4)\right)$$

en $0$

et $\sum_{n=1}^{N} E_n = \frac{2\ell}{\pi a^2} - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{24\ell} + O(a^2)$ quand $a \to 0^+$

$\sum_{n=1}^{N} E_n$ diverge comme $\frac{1}{a^2}$ ..

Si $a$ est une longueur, comme $\hbar c$ est une energie multipliée par une longueur $\frac{\hbar c}{a}$ est bien une énergie.

On retrouve donc bien que $\sum_{n=1}^{N} E_n$ diverge comme le carré d'une energie de coupure $E \sim \frac{\hbar c}{a}$

g) $\sum_{i=1}^{p} E(\ell_i, a) = \frac{2L}{\pi a^2} - \frac{p}{2a} - \frac{\pi}{24} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\ell_i} + O(a^2)$

Le premier terme, en $a^{-2}$ est une contribution intensive dans la taille du système

le second terme, en $a^{-1}$ est une contribution intensive dans le nombre de plaques

Donc la différence d'énergie entre deux systemes de même longueur avec le même nombre de plaques (éventuellement disposées à des distances $\ell_i$ différentes) a une limite finie quand $a \to 0^+$, i.e. cette différence d'énergie n'est pas singulière quand $a \to 0^+$

10] $E(\ell,a)+E(L-\ell,a)-2E(L/2,a) = -\frac{\pi}{24\ell} - \frac{\pi}{24(L-\ell)} + \frac{4\pi}{24L} + O(a$

$$\lim_{a\to 0^+} E(\ell,a)+E(L-\ell,a)-2E(L/2,a) = -\frac{\pi}{24\ell} - \frac{\pi}{24(L-\ell)} + \frac{\pi}{6L}$$

11] $\lim_{L\to\infty}\lim_{a\to 0^+} E(\ell,a)+E(L-\ell,a)-2E(L/2,a) = -\frac{\pi}{24\ell} \equiv E_c(\ell)$

Cette dernière limite ($L\to\infty$) correspond à regarder deux plaques à distance $\ell$ dans un "univers" infini.

12] $E_c(\ell)$ est une fonction décroissante de $\ell$ pour $\ell>0$, donc les contributions des énergies de point 0 (fluctuations quantiques du vide) sont responsables d'une interaction attractive.

13] Comme rappelé en 8] $\frac{\hbar c}{\ell}$ est une énergie (cf $S$, l'action, qui a les dimensions d'une énergie multipliée par un temps, $\hbar$ est le quantum d'action) donc

$$E_c(\ell) = -\frac{\pi\hbar c}{24\ell} \qquad F_c(\ell) = -\frac{\pi\hbar c}{24\ell^2}$$

Energie Casimir Force Casimir

14) $f(x) = e^{-x}$

$$\sum_{n\geq 1} E_n\, f(E_n/\Lambda) = \sum_{n\geq 1} \frac{\pi n}{2\ell}\, e^{-\frac{\pi n}{2\ell\Lambda}}$$

si $u<0$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{nu} = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{nu} = \frac{d}{du}\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu}$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} n e^{nu} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-e^{u}}\right) = \frac{e^{u}}{(1-e^{u})^2} = \frac{1}{4\,\mathrm{sh}^2\frac{u}{2}}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\pi n}{2\ell}\, e^{-\frac{\pi n}{2\ell\Lambda}} = \frac{\pi}{2\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\frac{n\pi}{2\ell\Lambda}}$$ , d'où

$u = -\frac{\pi}{2\ell\Lambda}$ donne

pour $f(x) = e^{-x}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} E_n\, f\left(\frac{E_n}{\Lambda}\right) = \frac{\pi}{8\ell\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{4\ell\Lambda}}$

15) $\mathrm{sh}\, v = v + \frac{v^3}{6} + O(v^5) = v\left(1 + \frac{v^2}{6} + O(v^4)\right)$

$$\mathrm{sh}^2 v = v^2\left(1 + \frac{v^2}{3} + O(v^4)\right)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 v} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{3} + O(v^2) \qquad v \text{ petit}$$

$$\sum_{n\geq 1} E_n\, e^{-\frac{E_n}{\Lambda}} \simeq \frac{2\ell\Lambda^2}{\pi} - \frac{\pi}{24\ell} + O(\Lambda^{-2})$$

quand $\Lambda \to \infty$

Dans le cas du réseau

$$"\sum E_n" = \frac{2\ell}{\pi a^2} - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{24\ell} + O(a^2)$$

Pour la coupure par $e^{-x}$ --

$$"\sum E_n" = \frac{2\ell\Lambda^2}{\pi} - \frac{\pi}{24\ell} + O(\Lambda^{-2})$$

La divergence quadratique est dans les deux cas proportionnelle à l'espacement entre plaque et (petit miracle) le terme fini est le même $\frac{\pi}{24\ell}$.

(Rq: Dans le second cas, il n'y a pas de terme divergent linéairement, mais sur le réseau, que ce serait-il passé si l'on avait défini $\ell = Na$ au lieu de $\ell = (N+1)a$ ? )

17| Si $f(x) = \sum_\alpha c_\alpha e^{-d_\alpha x}$ (somme finie !)

$$\sum_n E_n f\left(\frac{E_n}{\Lambda}\right) = \sum_\alpha c_\alpha \underbrace{\sum_n E_n e^{-E_n \frac{d_\alpha}{\Lambda}}}$$

changer $\Lambda$ en $\frac{\Lambda}{d_\alpha}$ dans le résultat de 14|

$$\sum_n E_n f\left(\frac{E_n}{\Lambda}\right) = \sum_\alpha c_\alpha \frac{\pi}{8\ell\, \mathrm{sh}^2 \frac{\pi d_\alpha}{4\ell\Lambda}}$$

On développe à $\Lambda \to \infty$ pour obtenir

$$\sum_n E_n f\left(\frac{E_n}{\Lambda}\right) = \frac{2\ell\Lambda^2}{\pi}\left(\sum_\alpha \frac{c_\alpha}{d_\alpha^2}\right) - \frac{\pi}{24\ell}\left(\sum_\alpha c_\alpha\right) + O(\Lambda^{-2})$$

mais $\sum c_\alpha = 1$ d'où

$$\sum_n E_n f\left(\frac{E_n}{\Lambda}\right) = \frac{2\ell\Lambda^2}{\pi}\left(\sum_\alpha \frac{c_\alpha}{d_\alpha^2}\right) - \frac{\pi}{24\ell} + O(\Lambda^2)$$

A nouveau, le terme fini est $-\frac{\pi}{24\ell}$ !

18] Si, suivant Euler, on définit

"$\sum_{n\geq 1} n$" $= -\frac{1}{12}$ on trouve

$$\sum_{n\geq 1} E_n = \sum_{n\geq 1} \frac{\pi n}{2\ell} = -\frac{\pi}{24\ell}$$

La méthode Euler redonne donc le terme fini, (responsable de l'effet Casimir), sans jamais calculer la partie quadratiquement divergente !

Si l'on y regarde de près, cette partie disparaît au moment où l'on regarde $S(x)+S(-x) = 4S(x^2)$ quand $x \to 1^-$ : les contributions des pôles se compensent entre les deux membres ... :)