Exercice.

1] Pour $J = 0$

$$1 \equiv \sum_{S_0 = \pm 1} \cdots \sum_{S_{N-1} = \pm 1} e^{\sum_{i=0}^{N-1} (H S_i + F)} = e^{NF} \left(\sum_{S = \pm 1} e^{HS} \right)^N$$

d'où $\quad F = -\log(2 \operatorname{ch} H)$

$$M_j = \sum_{S_0 = \pm 1} \cdots \sum_{S_{N-1} = \pm 1} S_j \, e^{\sum_{i=0}^{N-1} (H S_i + F)}$$

$$= e^{NF} \left(\sum_{\substack{S = \pm 1 \\ i \neq j}} e^{HS} \right)^{N-1} \left(\sum_{S_j = \pm 1} S_j \, e^{H S_j} \right)$$

$$= e^F \cdot 2 \operatorname{sh} H = \operatorname{th} H$$

$$M_j = M = \operatorname{th} H \qquad \left(= -\frac{\partial F}{\partial H} \text{, formule générale} \right)$$

Conclusion : pour $J = 0$ $\begin{cases} F = -\log 2 \operatorname{ch} H \\ M = \operatorname{th} H \end{cases}$

2]
$$E = \sum_{i=0}^{N-1} \left(J S_i S_{i+1} + H S_i + F \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\tilde{N}-1} \Big(J \left(S_{2i} S_{2i+1} + S_{2i+1} S_{2i+2} \right) + H S_{2i} + H S_{2i+1} + 2 \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{\tilde{N}-1} \left(H + J \left(S_{2i} + S_{2i+2} \right) \right) S_{2i+1} + \frac{H}{2} \left(S_{2i} + S_{2i+2} \right) + 2F \ldots$$

Maintenant la somme sur les spins des sites impairs se fait explicitement:

$$\sum_{S_1=\pm 1}\cdots\sum_{S_{2\tilde N-1}=\pm 1} e^{-E(S)} = \prod_{i=0}^{\tilde N-1} e^{\tilde H(S_{2i}+S_{2i+2})/2+2F} \times$$

$$\times \; 2\mathrm{ch}\left(H+J(S_{2i}+S_{2i+2})\right)$$

3)

$$\left.\begin{array}{ll} S, S' = 1 & S+S' = 2 \\ S, S' = -1 & S+S' = -2 \\ \left.\begin{array}{l} S=1 \quad S'=-1 \\ \text{ou} \quad S=-1 \quad S'=1 \end{array}\right\} & S+S' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{trois valeurs distinctes.} \quad \left\{\begin{array}{l} SS' = 1 \\ SS' = 1 \\ SS' = - \end{array}\right.$$

$$g(S+S') \overset{?}{=} \tilde J\, SS' + \frac{\tilde H}{2}(S+S') + \tilde F$$

Pour $S, S' = \pm 1$ $\quad SS'$ n'est fonction que de $S+S'$

Il faut résoudre un système linéaire

$$\left[\begin{array}{l} g(2) = \tilde J + \tilde H + \tilde F \\ g(0) = -\tilde J \qquad\;\; + \tilde F \\ g(-2) = \tilde J - \tilde H + \tilde F \end{array}\right.$$

C'est possible car

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

(par un calcul direct, ce déterminant vaut 4)

$$\sum_{E_n \leq E} E_n \sim \frac{\pi}{2\ell} \; \frac{1}{2}\left(\frac{2\ell E}{\pi}\right)^2 = \frac{\ell E^2}{\pi}$$ qui diverge comme

le carré de E $\to$ divergence quadratique.

3] Si $\varphi_k(t) = \sqrt{a}\,\varphi(t, ka)$ $k = 1, N$

$$S_a = \int dt \; a \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t, ka)^2 - \sum_{0}^{N} \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi(t,(k+1)a) - \varphi(t, ka)}{a^2}\right)^2 \right)$$

Si $\varphi(t,x)$ est régulière, qd $a \to 0$

$$\varphi(t,(k+1)a) - \varphi(t,ka) = a\,\varphi'(t,ka) + O(a^2)$$
(ou $o(a)$)

$$S_a = \int dt \; a \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}(t,ka)^2 - \frac{1}{2} \varphi'(t,ka)^2 \right) + Na\, O(a)$$

Ce sont des sommes de Riemann, quand $a \to 0$ elle donnent $\int_0^{\ell}$, CQFD.

4] $$\dot{\varphi}_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=1}^{N} \sin \frac{\pi n k}{N+1} \; \dot{\tilde{\varphi}}_n$$

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\varphi_{k+1} - \varphi_k\right)^2 = - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \left(\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}\right)$$

$$\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \left(\sin \frac{\pi n (k+1)}{N+1} - 2 \sin \frac{\pi n k}{N+1} + \sin \frac{\pi n (k-1)}{N+1} \right) \tilde{\varphi}_n$$

6] $e^{-\widetilde{E}(\widetilde{S})}$ est bien normalisé: en effet

$$\sum_{\{\widetilde{S}\}} e^{-\widehat{E}(\widetilde{S})} \equiv \sum_{\{S\}} e^{-E(S)} = 1$$: au lieu de

sommer sur tous les spins, on somme d'abord sur les spins impairs pour obtenir $e^{-\widehat{E}(\widetilde{S})}$, puis sur les spin pairs; l'identité $\sum_{\{\widetilde{S}\}} e^{-\widehat{E}(\widetilde{S})} = 1$ est donc due à une sommation par paquets.

Du fait des conditions périodiques, on sait que l'aimantation ne dépend pas du site. Si l'on prend $j = 2\widetilde{j}$ pair dans la définition de M_j, on obtient par sommation par paquets (d'abord les spins impairs, puis pairs)

$$M_{2\widetilde{j}} = \sum_{\{\widetilde{S}\}} S_{2\widetilde{j}}\, e^{-\widetilde{E}(\widetilde{S})}$$

Donc $M = \widetilde{M}$

7] (4) dit $e^{4\widetilde{J}} \geq 1$ car $\left(\frac{\mathrm{sh}\,2J}{\mathrm{ch}\,H}\right)^2 \geq 0$ donc

$\widetilde{J} \geq 0$ $\quad 4\,\mathrm{sh}^2 2\widetilde{J} = \left(e^{2\widetilde{J}} - e^{-2\widetilde{J}}\right)^2 = e^{4\widetilde{J}} \underbrace{-2 + e^{-4\widetilde{J}}}_{\leq -1 \text{ car } \widetilde{J} \geq 0}$

donc $4\,\mathrm{sh}^2 2\widetilde{J} \leq e^{4\widetilde{J}} - 1$

donc (1) dit que $\left(\frac{\operatorname{sh} 2J}{\operatorname{ch} H}\right)^2 \geq 4 \operatorname{sh}^2(2\tilde{J})$ d'où

$$|\operatorname{sh} 2J| \geq 2 \operatorname{ch} H \operatorname{sh} 2\tilde{J} \geq 0$$

En particulier $0 \leq \tilde{J} \leq |J|$ car $\begin{cases} \text{sh est croissante} \\ \text{et } 2\operatorname{ch} H \geq 1 \end{cases}$

8] Comme $e^{2\tilde{J}}\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2 2J}{\operatorname{ch}^2 H}\right)^{-1/2} > 0$, de (2) on déduit que sh H et sh $\hat{H}$, donc H et $\hat{H}$, ont le même signe.

En multipliant $(1)^{1/2}$ et (2) membre à membre il vient $e^{2\tilde{J}} \operatorname{sh} \hat{H} = e^{2J}\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2 2J}{\operatorname{ch}^2 H}\right)^{1/2-1/2} \operatorname{sh} H$ d'où

$e^{2\tilde{J}} \operatorname{sh} \hat{H} = e^{2J} \operatorname{sh} H$ donc $I = e^{2J} \operatorname{sh} H$ est invariant par décimation.

Si $J > 0$ on a $0 < \tilde{J} < J$ donc $|\operatorname{sh} \hat{H}| > |\operatorname{sh} H|$ et $|\hat{H}| > |H|$

9] Quel que soit J_0, J_1 est ≥ 0 et ensuite J_n est décroissante à partir de $n \geq 1$, bornée inférieurement. Donc elle converge vers une limite ≥ 0. Mais d'après la question 7, on a

$|\operatorname{sh} 2J| \geq 2 \operatorname{ch} H \operatorname{sh} 2\tilde{J} \geq 0$ et $\operatorname{ch} H \geq 1$ donc

$|\operatorname{sh} 2J| \geq 2 \operatorname{sh}(2\tilde{J})$. Cette relation doit être vraie si l'on remplace J et $\tilde{J}$ par la limite de J_n (par continuité) donc "$\operatorname{sh} 2J_\infty$" $\geq$ 2 "$\operatorname{sh} 2 J_\infty$"

donc $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$ atteinte par valeurs positives.

Comme $I(J, H)$ est invariant par décimation, la convergence de J_n implique celle de H_n vers une limite finie "H_∞" telle que

$$e^{2J_\infty} \operatorname{sh} H_\infty = e^{2J_0} \operatorname{sh} H_0 \quad \text{donc}$$

$$\operatorname{sh} H_\infty = e^{2J_0} \operatorname{sh} H_0$$

10) Comme $M(N, J, H) = M(\tilde{N}, \tilde{J}, \tilde{H})$, en prenant $N = 2^n \bar{N}$ il vient

$M(2^n \bar{N}, J_0, H_0) = M(\bar{N}, J_n, H_n)$. On fait tendre $n \to \infty$. Dans le membre de gauche, on trouve l'aimantation thermodynamique (on suppose que la limite ne dépend pas de la suite utilisée pour faire $N \to \infty$). Dans le membre de droite, on trouve $M(\bar{N}, J_\infty, H_\infty) = M(\bar{N}, 0, H_\infty) = \operatorname{th} H_\infty$

d'après la question 1] (ouf, ça ne dépend pas de $\bar{N}$!) Donc $\lim_{N \to \infty} M(N, J_0, H_0) = \text{th}\, H_\infty$.

Mais $\quad \text{sh}\, H_\infty = I(J_0, H_0)$, et

$$\text{th}\, H_\infty = \frac{I}{\sqrt{1+I^2}}$$

Conclusion : $\quad \lim_{N \to \infty} M(N, J, H) = \dfrac{I(J,H)}{\sqrt{1+I(J,H)^2}}$

11] J_{15} est <u>très très</u> petit et H_{15} est presque égal à $H_\infty = \text{argsh}\left(e^{10}\, \text{sh}\frac{1}{100}\right)$, ce qui assure une aimantation voisine de 1.

Remarque : voyez-vous pourquoi les équations (1) (2) (3) peuvent s'interpréter comme des fonctions β discrètes ?