

M2 - Examen de théorie quantique des champs

Problème : l'effet Casimir

Un champ électromagnétique classique, dans le vide ou dans une cavité, peut être décrit comme une collection d'oscillateurs harmoniques. Les fréquences propres de ces oscillateurs dépendent des conditions aux limites. Par exemple, à la surface d'un conducteur (parfait), le champ électrique est normal et le champ magnétique tangentiel. La formulation en termes d'oscillateurs permet de quantifier le champ électromagnétique d'où l'interprétation en terme de photons. Les fréquences propres des oscillateurs sont (au facteur $\hbar/2$ près) les énergies de point zéro des différents modes de photons, et celles-ci dépendent donc des conditions aux limites. La somme de ces énergies est en général divergente sans conséquence physique observable. Mais la comparaison des énergies de point zéro correspondant à des conditions aux limites différentes peut avoir des conséquences observables. Une exemple célèbre est la prédiction de Casimir (1948) : deux fines plaques métalliques conductrices parallèles placées dans le vide à une distance l l'une de l'autre s'attirent avec une force (par unité de surface)

$$F = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4}$$

due à la modification des fluctuations quantiques du vide que leur présence induit en changeant les conditions aux limites. Véritable tour de force, cet effet minuscule a été mesuré expérimentalement par Sparnay (1958).

Partie 1

L'objectif du problème qui suit est l'étude d'un effet analogue à l'effet Casimir pour le champ libre de masse nulle à *une dimension* d'espace. Pour garder un langage imagé, nous parlerons encore de plaques (en fait des

objets ponctuels), modélisées en disant que le champ est astreint à s'annuler aux points où se trouvent les plaques. Entre deux plaques, disons placées en 0 et l , on considère donc un champ $\varphi(t, x)$ tel que $\varphi(t, 0) = \varphi(t, l) = 0$, décrit par une action

$$S = \int dt \int_0^l dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Sauf mention explicite du contraire, on se place dans la suite du problème dans un système d'unités où $\hbar = c = 1$.

Dans le problème étudié par Casimir, la structure microscopique des plaques (des atomes dans un réseau de maille finie) donne une longueur caractéristique, donc une coupure naturelle des oscillations de haute fréquence, mais une analyse microscopique détaillée, en principe nécessaire, est techniquement difficile.

Dans notre modèle simplifié, cette complication est absente, mais la méthode que nous allons décrire se transpose facilement pour une analyse “naïve” du problème réel à trois dimensions qui redonne le résultat exact.

Comme $\varphi(t, 0) = \varphi(t, l) = 0$, on peut développer $\varphi(t, x)$ en série de Fourier sous la forme

$$\varphi(t, x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n \geq 1} \sin \frac{\pi n x}{l} \tilde{\varphi}_n(t).$$

On rappelle que

$$\int_0^l dx \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{l}{2} \delta_{n,m}$$

pour $m, n = 1, 2, \dots$.

1. Établir la forme de l'action S en terme des variables $\tilde{\varphi}_n(t)$. Pour cela on pourra utiliser avec profit la formule d'intégration par partie $-\int_0^l dx \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \int_0^l dx \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ valide car $\varphi(t, 0) = \varphi(t, l) = 0$. Remarquer que cette action décrit les $\tilde{\varphi}_n$ comme des oscillateurs harmoniques indépendants dont on donnera les pulsations ω_n .

2. On utilise les variables $\tilde{\varphi}_n$ pour quantifier le système. Quelle est l'énergie E_n du fondamental du mode $\tilde{\varphi}_n$. Vérifier que l'énergie totale du fondamental $\sum_{n \geq 1} E_n$ est divergente. On coupe la somme à une énergie E grande. Calculer $\sum_{E_n \leq E} E_n$ et conclure que l'énergie du fondamental est quadratiquement divergente.

Cette divergence est une divergence ultraviolette, c'est à dire due à la contribution des modes dont la variation spatiale est arbitrairement rapide. On peut faire valoir que la physique réelle à très courte distance est inconnue et que la description continue donnée par $\varphi(t, x)$ est forcément une approximation valable seulement pour des champs lentement variables dans l'espace. La partie suivante étudie un champ libre sur réseau, ce qui supprime les modes dont la période spatiale est plus petite que la maille.

Partie 2

On discrétise l'espace en $N + 2$ sites numérotés de 0 à $N + 1$. On pose $a = l/(N + 1)$, et on remplace les dérivées spatiales par des différences finies, ce qui amène à remplacer S par

$$S_a = \int dt \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{a} \right)^2 \right],$$

avec $\varphi_{N+1}(t) = \varphi_0(t) = 0$.

On rappelle l'identité

$$\sum_{k=1}^N \sin \frac{\pi m k}{N+1} \sin \frac{\pi n k}{N+1} = \frac{N+1}{2} \delta_{n,m}$$

pour $m, n = 1, 2, \dots, N$, qui montre que la transformation de Fourier discrète

$$\tilde{\varphi}_n = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{k=1}^N \sin \frac{\pi n k}{N+1} \varphi_k$$

est sa propre inverse :

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N \sin \frac{\pi n k}{N+1} \tilde{\varphi}_n.$$

3. Si $\varphi(t, x)$ est une fonction régulière de x et $l = (N + 1)a$ est fixé, vérifier que l'action S_a évaluée pour $\varphi_k(t) \equiv \sqrt{a}\varphi(t, ka)$, $k = 1, \dots, N$ tend vers S évalué pour $\varphi(t, x)$ quand $a \rightarrow 0^+$.
4. Établir la forme de l'action S_a en terme des variables $\tilde{\varphi}_n(t)$. Pour cela on pourra utiliser avec profit la formule d'intégration par partie discrète $-\sum_{k=0}^N \left(\frac{\varphi_{k+1}-\varphi_k}{a}\right)^2 = \sum_{k=1}^N \varphi_k \left(\frac{\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1}}{a^2}\right)$ valide car $\varphi_{N+1}(t) = \varphi_0(t) = 0$.
5. Remarquer que cette action décrit les $\tilde{\varphi}_n$ ($n = 1, \dots, N$) comme des oscillateurs harmoniques indépendants de pulsation $\omega_n = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi na}{2l}$. Vérifier que pour n fixé et $a \rightarrow 0^+$ on retrouve les pulsations de la question 1.
6. On utilise les variables $\tilde{\varphi}_n$ pour quantifier le système. Quelle est l'énergie E_n du fondamental du mode $\tilde{\varphi}_n$.
7. Remarquer que l'énergie du fondamental du système complet, $E(l, a) \equiv \sum_{n=1}^N E_n$ est la partie imaginaire d'une somme géométrique et en déduire que $E(l, a) = \frac{1}{2a} (\cotg \frac{\pi a}{4l} - 1)$.
8. Développer $E(l, a)$ en puissances de a pour $a \rightarrow 0^+$ (l étant fixé) jusqu'à l'ordre 0 inclus. Remarquer en particulier qu'à la limite $a \rightarrow 0^+$ on trouve une divergence quadratique de l'énergie du fondamental. On vérifiera que dans un système d'unités où $\hbar = c = 1$, a^{-1} a les dimensions d'une énergie.

L'objectif de la partie suivante est d'étudier le sens physique des trois termes dans le développement ci-dessus.

Partie 3

On considère que l'espace est un cercle de taille L discrétisé comme dans la partie 2 et l'on y place p plaques espacées de $l_1, l_2, \dots, l_p$ avec $l_1 + \dots + l_p = L$ (en toute rigueur, il faut supposer pour que la discrétisation soit possible que tous les rapports de deux l_i sont rationnels). Le système est donc équivalent à p systèmes du type de celui étudié dans la partie 2 et l'énergie du fondamental du système complet est $\sum_{i=1}^p E(l_i, a)$

9. Développer $\sum_{i=1}^p E(l_i, \alpha)$ en puissances de α pour $\alpha \rightarrow 0^+$ (l étant fixé) jusqu'à l'ordre 0 inclus.

Vérifier que le terme en α^{-2} est proportionnel à L , la taille du système mais indépendant du nombre de plaques et de leurs espacements.

Vérifier que le terme en α^{-1} est proportionnel à p , le nombre de plaques, mais indépendant de leurs espacements et de la taille du système.

On suppose que $p=2$ (deux plaques). On fixe $l < L/2$ et l'on place sur le cercle les deux plaques à distance $l < L/2$ l'une de l'autre.

10. Remarquer que $E(l, \alpha) + E(L - l, \alpha) - 2E(L/2, \alpha)$ est la différence des énergies du fondamental correspondant à deux situations : celle où les plaques sont à distance l l'une de l'autre et celle où les plaques sont aussi éloignées que possible.

Vérifier que $E(l, \alpha) + E(L - l, \alpha) - 2E(L/2, \alpha)$ a une limite finie quand $\alpha \rightarrow 0^+$.

11. Prendre ensuite la limite $L \rightarrow +\infty$, décrivant l'énergie du fondamental en présence de deux plaques à distance l dans un "univers" infini à une dimension, énergie normalisée pour tendre vers 0 quand les plaques s'éloignent indéfiniment.
12. En déduire sans calcul que les fluctuations quantiques du vide (i.e. les mouvements de point zéro des oscillateurs dans leur mode fondamental) sont responsable d'une interaction effective attractive entre les plaques. C'est l'effet Casimir.
13. Par analyse dimensionnelle, restituez la dépendance en $\hbar$ et c dans le résultat final.

Si la physique microscopique est effectivement décrite par la discrétisation proposée, les calculs précédents montrent que les fluctuations quantiques du vide, et leur influence sur la force entre les plaques, peuvent être décrite par une théorie continue si $\alpha \ll l$. En revanche, si la théorie microscopique nous est vraiment inconnue, il faut prendre avec des pincettes les conclusions des calculs précédents. Pour voir la robustesse de ces résultats, on peut les comparer à ceux d'autres régularisations i.e. d'autres façons de

supprimer les contributions des modes de haute énergie dans l'expression de l'énergie du fondamental. C'est le but de la partie suivante.

Partie 4

Si f est une fonction régulière sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 1$ et f tends vers 0 rapidement à l'infini, et si Λ est une échelle d'énergie, on peut remplacer $\sum_{n \geq 1} E_n$ par $E_f(l, \Lambda) \equiv \sum_{n \geq 1} E_n f(E_n/\Lambda)$. Dans cette formule, les E_n sont à nouveau les énergies dans le continu trouvées à la question 2. Les $E_n \ll \Lambda$ contribuent pleinement, mais les $E_n \gg \Lambda$ sont écrasées. Chaque choix d'une fonction f est une modélisation phénoménologique de la physique à courte distance/haute énergie du système.

14. Pour $f(x) = e^{-x}$, vérifier que

$$E_f(l, \Lambda) = \frac{\pi}{8l \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{4l\Lambda}}.$$

On remarquera que la somme est la dérivée d'une fonction simple.

15. Développer le résultat en puissances de Λ pour $\Lambda \rightarrow \infty$ (l étant fixé) jusqu'à l'ordre 0 inclus.
16. Remarquer que la divergence quadratique (le coefficient de Λ^2) est proportionnelle à la taille du système comme à la question 8, et que le terme indépendant de Λ coïncide avec le terme indépendant de a de la question 8. En conclure que la régularisation avec $f(x) = e^{-x}$ mène à la même valeur pour la force entre deux plaques que celle obtenue à la question 12 en utilisant la régularisation par discrétisation.
17. Vérifier sans calcul que cette conclusion subsiste si l'on choisit pour $f(x)$ une somme finie arbitraire d'exponentielles $f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{-d_{\alpha} x}$ où les d_{α} sont des réels > 0 et $f(0) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} = 1$.

On peut approcher des fonctions f très générales par des superpositions d'exponentielles, et par continuité toutes ces fonctions de régularisation mènent à la même valeur pour la force entre plaques. On appelle universalité ce phénomène remarquable : la théorie continue n'est pas bien définie à priori car elle contient des divergences dues à son comportement à courte

distance/haute énergie, et il faut pour mener les calculs introduire une théorie microscopique contenant une échelle de longueur microscopique ; mais les quantités mesurables macroscopiques (ici une éventuelle force entre plaques) sont insensibles aux détails de la théorie microscopique.

Le mathématicien suisse Euler (1707-1783) traite le même problème de divergence par une méthode “bien à lui” (i.e. à déconseiller quand on n’a pas la formidable intuition d’Euler pour les résultats justes). Il pose $\sum_{n \geq 1} n = a$ et $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n = b$. Il calcule $s(x) = \sum_{n \geq 1} nx^n = x/(1-x)^2$ sans se préoccuper de domaine de convergence, et fait $x = -1$ pour obtenir $b = s(-1) = -1/4$. Il remarque l’identité $s(x) + s(-x) = 4s(x^2)$ et y substitue $x = 1$ pour obtenir $a + b = 4a$ donc $a = b/3 = -1/12$ d’où il conclut $\sum_{n \geq 1} n = -1/12$.

18. Comparer avec les résultats précédents !

Pour conclure ce problème, notons qu’une méthode pour calculer avec des fonctions f générales moins frustre que de les approcher par des combinaisons linéaires d’exponentielles est d’utiliser la formule d’Euler-Mac Laurin (le même Euler !) qui aboutit aux mêmes conclusions universelles.

Exercice : Décimation pour le modèle d’Ising à une dimension en champ magnétique

On considère un système de spins $S_i = \pm 1$, $i = 0, \dots, N-1$ pour lequel l’énergie d’une configuration $\mathcal{S} \equiv (S_0, \dots, S_{N-1})$ est

$$E(\mathcal{S}) \equiv - \sum_{i=0}^{N-1} (JS_i S_{i+1} + HS_i + F),$$

avec des conditions aux limites périodiques $S_N \equiv S_0$. D’après le principe de Boltzmann, la probabilité $p(\mathcal{S})$ d’une configuration est proportionnelle à $e^{-E(\mathcal{S})}$. La constante $F \equiv F(N, J, H)$, appelée aussi énergie libre par site dans la suite, est ajustée pour que la constante de proportionnalité soit

exactement l'unité, i.e.

$$e^{-NF} = \sum_{S_0=\pm 1} \dots \sum_{S_{N-1}=\pm 1} e^{\sum_{i=0}^{N-1} JS_i S_{i+1} + HS_i}.$$

Pour simplifier les notations, la “température” β est incorporée dans l'énergie, la constante de couplage J , le champ magnétique H et l'énergie libre.

L'aimantation $M_j \equiv M_j(N, J, H)$ au site j est définie par

$$M_j = \sum_{\{S\}} S_j e^{-E(S)} = \sum_{S_0=\pm 1} \dots \sum_{S_{N-1}=\pm 1} S_j e^{\sum_{i=1}^N (JS_i S_{i+1} + HS_i + F)}.$$

Comme le système considéré est invariant par translation, elle ne dépend pas du site j et vaut aussi l'aimantation moyenne, notée $M \equiv M(N, J, H)$.

Le but de ce problème est d'obtenir des informations sur ce système en analysant son comportement par un changement d'échelle via une décimation.

1. Calculer F et M pour $J = 0$.

On suppose dans les questions suivantes que $N = 2\tilde{N}$ est pair. On définit la transformation de “décimation”

$$\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \dots \sum_{S_{2\tilde{N}-1}=\pm 1} e^{\sum_{i=0}^{N-1} JS_i S_{i+1} + HS_i + F} \equiv e^{-\tilde{E}(\tilde{S})},$$

où $\tilde{S} \equiv (S_0, S_2, \dots, S_{2(\tilde{N}-1)})$.

2. Calculer explicitement la somme sur les spins des sites impairs du membre de gauche pour obtenir

$$e^{-\tilde{E}(\tilde{S})} = \prod_{i=0}^{\tilde{N}-1} e^{H(S_{2i} + S_{2(i+1)})/2 + 2F \text{ch}(H + J(S_{2i} + S_{2(i+1)}))}.$$

3. Combien de valeurs distinctes prend la fonction $S + S'$ quand $S, S' = \pm 1$? Vérifier que la fonction la plus générale de $S + S'$ pour $S, S' = \pm 1$ peut s'écrire sous la forme $\tilde{J}SS' + \tilde{H}(S + S')/2 + \tilde{F}$

Ceci indique qu'on peut écrire

$$H(S + S')/2 + 2F + \log 2 \operatorname{ch} (H + J(S + S')) = \tilde{J}SS' + \tilde{H}(S + S')/2 + \tilde{F}$$

pour $S, S' = \pm 1$ pour des réels $\tilde{J}, \tilde{H}$ et $\tilde{F}$ bien choisis.

On admet pour la suite qu'au prix de l'utilisation de quelques identités trigonométriques, la solution de ce système linéaire pour $\tilde{J}, \tilde{H}$ et $\tilde{F}$ est

$$e^{4\tilde{J}} \equiv 1 + \frac{\operatorname{sh}^2 2J}{\operatorname{ch}^2 H} \quad (1)$$

$$\operatorname{sh} \tilde{H} \equiv e^{2J} \left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2 2J}{\operatorname{ch}^2 H} \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh} H \quad (2)$$

$$\tilde{F} \equiv 2F + \log 2 \operatorname{ch} H + \frac{1}{4} \log \left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2 2J}{\operatorname{ch}^2 H} \right) \quad (3)$$

4. Vérifier que la ligne $J = 0$ est une ligne de points fixes pour la transformation de décimation (pour l'énergie libre, penser à utiliser la question 1).
5. Vérifier que

$$\tilde{E}(\tilde{\mathcal{S}}) = - \sum_{i=0}^{\tilde{N}-1} (\tilde{J}S_{2i}S_{2(i+1)} + \tilde{H}S_{2i} + \tilde{F}).$$

L'énergie conserve donc la même forme fonctionnelle dans les transformations de décimation.

6. En utilisant la définition de la transformation de décimation, montrer que $\tilde{F}$ est telle que le poids de Boltzmann $e^{-\tilde{E}(\tilde{\mathcal{S}})}$ est bien normalisé, i.e. $\tilde{F}$ est bien l'énergie libre du système après décimation, et que $M = \tilde{M}$ c'est-à-dire que $M(N, J, H) = M(\tilde{N}, \tilde{J}, \tilde{H})$, i.e. que l'aimantation est invariante par décimation.
7. Dédire de la relation (1) que $\tilde{J}$ est toujours ≥ 0 et interpréter physiquement. Vérifier qu'en conséquence $4 \operatorname{sh}^2 2\tilde{J} \leq e^{4\tilde{J}} - 1$. Conclure de la relation (1) que $|\operatorname{sh} 2J| \geq 2 \operatorname{ch} H \operatorname{sh} 2\tilde{J}$ et en particulier $\tilde{J} \leq |J|$.
8. Dédire de (2) que $\tilde{H}$ et H sont de même signe. Vérifier que $I \equiv e^{2J} \operatorname{sh} H$ est invariant par décimation, i.e. que $I(J, H) = I(\tilde{J}, \tilde{H})$ et utiliser la question précédente pour obtenir que, si $J > 0$ et $H \neq 0$, alors $|\tilde{H}| > |H|$.

9. Si N est divisible par une grande puissance de 2, on peut itérer la décimation. Ceci amène à définir récursivement $(J_0, H_0) \equiv (J, H)$ et

$$(J_{n+1}, H_{n+1}) \equiv (\tilde{J}(J_n, H_n), \tilde{H}(J_n, H_n)).$$

Montrer en utilisant les deux questions précédentes que la suite J_n converge vers 0 (0^+ si $J \neq 0$) et que H_n a une limite finie que l'on exprimera en fonction de I .

10. Montrer (en utilisant les questions précédentes mais sans calcul !) que l'aimantation à la limite thermodynamique, $\lim_{N \rightarrow \infty} M(N, J, H)$ vaut $I(J, H)/\sqrt{1 + I(J, H)^2}$.

Même si l'on dispose d'une description microscopique d'un système, il n'est bien souvent possible de mesurer sur un échantillon que des quantités macroscopiques. Une modélisation (très caricaturale) de cette situation dans le système étudié serait de supposer que seuls les spins S_i dont l'indice i est un multiple de, disons, 2^{15} sont observables.

11. Calculer numériquement J_{15} et H_{15} pour $J = 5$ et $H = 0,01$. En déduire que partant d'une physique à courte distance où le champ magnétique est faible et le couplage est fort, la physique macroscopique est une physique de spins *très* faiblement couplés dans un champ magnétique fort.