

Habilitation à Diriger des Recherches

2011

Désordre et Instabilités

François Pétrélis

Laboratoire de Physique Statistique
Ecole Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75005 Paris

Les thèmes de recherche présentés concernent principalement des phénomènes hors équilibre et notamment des instabilités. Une part importante est prise par l'étude des effets de fluctuations sur une instabilité, problématique qui est dans notre cas en partie motivée par l'effet dynamo.

On appelle effet dynamo une instabilité qui, dans un fluide conducteur de l'électricité, convertit de l'énergie cinétique en énergie magnétique. C'est ce processus qui engendre le champ magnétique des objets astrophysiques (planètes, étoiles, galaxies). Dans un métal liquide, l'instabilité dynamo apparaît dans des écoulements très turbulents. Nous sommes donc en présence d'une instabilité où le champ qui est instable (le champ magnétique) est forcé par un champ très fluctuant (le champ de vitesse).

Dans ce contexte, un des phénomènes que nous aborderons concerne les renversements du champ magnétique engendré. Ces renversements correspondent à l'évolution du système entre deux états décrits comme $+\mathbf{B}$ et son opposé $-\mathbf{B}$.

Avant d'aller plus loin, on peut s'interroger sur les deux remarques précédentes qui sont souvent considérées comme évidentes :

- Comment se fait-il que pour des écoulements de métaux liquides, le problème soit invariant quand on change $\mathbf{B}$ en $-\mathbf{B}$? En règle générale, les lois de la physique ne sont pas invariantes quand on change le sens du champ magnétique : un électron verra sa trajectoire courbée dans des directions opposées suivant le signe du champ magnétique qui lui est appliqué.

- Au seuil de l'instabilité dynamo, le nombre de Reynolds magnétique Rm est au minimum de l'ordre de l'unité. Le nombre de Reynolds cinétique Re est alors très grand et l'écoulement très turbulent. En effet, le rapport $Pm = Rm/Re$ appelé nombre de Prandtl magnétique est très petit pour les métaux liquides. Plus précisément ce nombre qui vaut $Pm = \nu/\eta$, où ν est la viscosité cinématique du fluide et η sa diffusivité magnétique, est inférieur à 10^{-5} pour les métaux liquides connus. Comment un nombre sans dimension comparant deux processus diffusifs peut-il prendre des valeurs si petites?

En guise d'introduction, nous allons voir que ces deux propriétés résultent de la valeur de quelques constantes fondamentales. Il s'en déduit que si elles avaient été différentes, ces recherches auraient eu moins d'intérêt et l'on se serait économisé l'écriture ou la lecture de ce manuscrit.

1- De la faible valeur du nombre de Prandtl magnétique

La nature turbulente des écoulements au seuil de l'instabilité dynamo résulte naturellement de la faible valeur du nombre de Prandtl magnétique que nous pouvons aussi écrire $Pm = \mu_0 \sigma \nu$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, σ la conductivité électrique du fluide et ν sa viscosité cinématique. Pour donner un exemple, le sodium liquide près de son point de fusion a comme propriétés physiques $\nu \simeq 7 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$ et $\sigma \simeq 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ soit $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1} \simeq 0.1 m^2 s^{-1}$ et donc $Pm \simeq 7 \cdot 10^{-6}$. On peut s'étonner d'une telle différence de valeur pour les deux coefficients dissipatifs ν et η .

Du point de vue microscopique, cette différence vient de ce que η est associé au transport de charges électriques qui est effectué principalement par les électrons tandis que ν est associé au transport d'impulsion qui est effectué par les atomes. Pour simplifier, considérons le métal comme un liquide contenant des ions constitués d'un seul proton de masse m_p et d'un électron de conduction par ion. La prise en compte du nombre de charges modifierait juste les préfacteurs numériques de nos résultats ce qui est sans importance puisque nous considérons seulement des ordres de grandeurs.

La viscosité cinématique ν est le produit de la vitesse des atomes v_i , par leur libre parcours moyen l_i , soit $\nu \simeq v_i l_i$. Dans le métal, on estime la vitesse des ions par un argument d'équipartition $v_i \simeq \sqrt{kT/m_p}$. Leur libre parcours moyen est de l'ordre de la distance interatomique soit $l_i \simeq r_0$ où r_0 est une taille microscopique et est donc de l'ordre du rayon de Bohr. Nous prendrons donc $r_0 = \hbar^2/(m_e q^2)$ en introduisant la notation usuelle $q^2 = e^2/(4\pi\epsilon_0)$. Pour des températures proches de la température de fusion d'un métal, l'ordre de grandeur de ν obtenu est alors d'environ $10^{-7} m^2 s^{-1}$.

La conductivité électrique est, suivant la loi de Drude, $\sigma = ne^2\tau/m_e$ où n est la densité d'électrons, e la charge élémentaire d'un électron, m_e sa masse tandis que τ est le temps de collision d'un électron (voir par exemple [1]). On peut d'ailleurs écrire $\tau = l_e/v_e$ avec l_e le libre parcours moyen et v_e la vitesse caractéristique des électrons. Pour les températures considérées, la vitesse des électrons de conduction est la vitesse de Fermi $v_e \simeq \sqrt{kT_F/m_e}$ où la température de Fermi est associée à une énergie de l'ordre du Rydberg, soit $kT_F \simeq m_e q^4/\hbar^2$.

A ce stade nous obtenons la loi $P_m \simeq \frac{\mu_0 n e^2 l_e}{m_e} \sqrt{\frac{m_e T}{m_p T_F}}$.

Dans ce modèle la densité de charges est $n \simeq r_0^{-3}$. A très basse température, le libre parcours moyen des électrons peut être bien plus grand que la distance interatomique. Néanmoins, cette distance diminue avec la température car les collisions avec les phonons sont plus nombreuses. Considérons qu'au dessus de la température de fusion, le libre parcours moyen des électrons est de l'ordre de grandeur de la distance interatomique. Encore une fois nous nous contenterons de cette valeur pour notre estimation qualitative en notant que la conductivité ainsi estimée est $\sigma \simeq 10^6 \Omega^{-1} m^{-1}$ ce qui est finalement assez proche de ce qui est mesuré.

Pour simplifier encore le résultat, nous notons qu'apparaît le rapport T/T_F . Pour un métal liquide, la température T doit être supérieure à la température de fusion. Microscopiquement, cela signifie que le réseau périodique maintenu par la liaison métallique doit être détruit par l'agitation thermique. En ordre de grandeur, cela signifie que l'énergie thermique est de l'ordre d'une fraction de l'énergie de liaison qui est une énergie microscopique et est donc de l'ordre du Rydberg. Dimensionnellement, on trouve donc que la température de fusion est une fraction de la température de Fermi. On pourrait garder cette fraction explicitement dans le résultat mais puisqu'elle est d'ordre de 0.1 ou 0.01 et que nous en prenons la racine carrée, nous l'omettons ce qui revient à surestimer le résultat. Finalement, en introduisant la vitesse de la lumière $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$ nous obtenons

$$Pm \simeq \frac{q^4}{\hbar^2 c^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \simeq \alpha^2 \sqrt{\frac{m_e}{m_p}}. \quad (1)$$

où a été introduite la constante de structure fine $\alpha = q^2/(\hbar c) \simeq 1/137$. Il en découle $Pm \simeq 10^{-6}$ ce qui est l'ordre de grandeur correct. A nouveau, nous insistons sur le fait que ces résultats sont des ordres de grandeur et un accord à un facteur près (10–100) est déjà satisfaisant. En particulier, la détermination des comportements plus précis, tel que la dépendance en température des coefficients, nécessite des modèles plus détaillés et ne peut être obtenue par cette estimation.

Nous concluons que la nature très turbulente des écoulements dynamo résulte de la faible valeur relative de la masse de l'électron par rapport à celle du proton ainsi que de la valeur de la constante de structure fine.

Notons enfin que le même raisonnement appliqué au nombre de Prandtl thermique donne $P_r \simeq (m_e/m_p)^{1/2}$ ce qui vaut environ 0.03. L'ordre de grandeur est juste puisque nous avons $P_r \simeq 0.01$ pour le sodium liquide près de son point de fusion. Les deux nombres P_r et Pm diffèrent de α^2 car la diffusivité magnétique fait intervenir $\mu_0 e^2 \propto \mu_0 \epsilon_0 q^2 \propto c^{-2}$ via l'expression de la conductivité électrique.

2- De l'invariance $B \rightarrow -B$ en magnétohydrodynamique

Les équations de la magnétohydrodynamique

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\rho\mu_0} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3)$$

sont invariantes par changement du signe du champ magnétique.

Cette propriété n'est pas une loi générale : c'est uniquement dans la limite qui permet d'obtenir les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) que cela est vérifié. En particulier, nous négligeons

l'effet Hall qui décrit l'effet du champ magnétique sur la trajectoire des électrons. Cet effet apparaît comme un terme non linéaire dans la loi d'Ohm qui relie le courant électrique $\mathbf{j}$ aux champs :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

L'effet Hall et la rupture de symétrie $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ qui en résulte peuvent être négligés si $\sigma B/(ne)$ est très petit. Cela définit un champ magnétique maximum B_m qui avec les hypothèses du paragraphe précédent prend la forme

$$B_m = \frac{m_e}{e\tau} = \frac{m_e^2 q^4}{e\hbar^3}, \quad (5)$$

dont la valeur est de l'ordre de $10^5 T$ ce qui est bien supérieur aux champs appliqués aux métaux liquides. Du point de vue de la physique, la première expression compare le temps de collision et le temps pour lequel le champ magnétique affecte la trajectoire des électrons (l'inverse de la pulsation cyclotron). Le système présente la symétrie $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ quand les trajectoires électroniques subissent des collisions suffisamment fréquentes pour que le désordre qu'elles engendrent annihile le biais systématique causé par le champ magnétique.

3- Présentation du mémoire

Après cette introduction, nous allons présenter différents résultats. La présentation est séparée en cinq parties. La première regroupe les résultats ayant trait à l'instabilité dynamo. La seconde partie présente ceux liés à l'effet du bruit sur une instabilité. La troisième décrit l'étude de milieux granulaires composés de grains qui interagissent à distance. La quatrième partie résume deux résultats liés à la propagation d'ondes en milieu complexe. La cinquième concerne des travaux dont l'objectif est de décrire rigoureusement des écoulements turbulents en calculant des extremas pour la puissance dissipée dans ces systèmes.

Ces problèmes sont évidemment connectés : l'instabilité dynamo est une instabilité qui se développe sur un champ turbulent donc présentant des fluctuations spatiales et temporelles ; les milieux de grains en interaction subissent des instabilités affectées par les fluctuations du système ; des ondes acoustiques se propageant dans un champ magnétique sont susceptibles d'être diffusées tandis que certaines bornes sur la dissipation concernent des écoulements MHD turbulents...

Le plan est le suivant :

I- Magnétohydrodynamique et Effet Dynamo

- 1- Quelques résultats de l'expérience Von Karman Sodium
- 2- Théories et modèles

II- Effets de bruits multiplicatifs sur une instabilité

- 1- Déplacement du seuil d'instabilité
- 2- L'intermittence on-off
- 3- Caractérisation spectrale de l'effet d'un bruit sur divers processus
- 4- Modifications d'instabilités sous l'effet de bruits multiplicatifs
- 5- Effet d'un bruit de phase sur une instabilité paramétrique

III- Systèmes de grains en interaction

- 1- Instabilité de surface d'une couche de grains en interaction
- 2- Instabilité de Hopf dans un milieu turbulent
- 3- Effondrement d'un gaz de particules en interaction

IV- Propagation d'ondes en milieu complexe

V- Bornes sur la dissipation d'énergie dans des écoulements turbulents

Afin d'éviter que le mémoire ne se présente comme une liste de résultats succinctement décrits, deux parties seront un peu plus détaillées. Il s'agit tout d'abord du mécanisme expliquant les renversements du champ magnétique (partie I-2). Par ailleurs, l'effet d'un bruit multiplicatif sur un seuil d'instabilité et le phénomène d'intermittence on-off sont introduits sous la forme d'une brève revue des propriétés connues (parties II-1 et II-2). Des perspectives sont présentées à la fin des parties.

I- Magnétohydrodynamique et Effet Dynamo

Comme mentionné précédemment, outre les possibles applications astrophysiques, l'effet dynamo est un problème intéressant car les écoulements considérés sont toujours très turbulents. Cela a deux conséquences. Expérimentalement, il faut injecter une très grande puissance mécanique dans le système et cela explique que l'instabilité n'ait été observée pour la première fois que très récemment (en 2001 à Karlsruhe et Riga [2, 3] dans des écoulements très contraints géométriquement). Par ailleurs, le champ magnétique est forcé par le champ de vitesse qui fluctue à de très nombreuses échelles spatiales et temporelles. Il s'agit donc d'un problème d'instabilité original et riche où l'effet des fluctuations peut être important.

1- Quelques résultats de l'expérience Von Karman Sodium

Je participe à l'expérience Von Karman Sodium depuis les premières expériences (dites VKS1) en 1999. Cette expérience est située au CEA-Cadarache et implique trois équipes (au CEA-Saclay, à l'ENS-Lyon et à l'ENS). Nous étudions un écoulement turbulent de sodium liquide (environ 150 litres) dont le mouvement est forcé par deux disques en rotation. La puissance des moteurs qui entraînent les disques (300 kW) permet d'atteindre des nombres de Reynolds cinétiques de plusieurs millions. Après plusieurs années de travail qui ont permis d'observer divers phénomènes mais pas l'effet dynamo, une modification a permis de franchir le seuil d'instabilité.

a- Observation de l'instabilité dynamo

Nous avons envisagé depuis longtemps que les conditions aux limites du champ magnétique pouvaient abaisser le seuil d'instabilité dynamo (voir [4] S. Fauve et F. Pétrélis, "The dynamo effect", dans "Peyresq Lectures on Nonlinear Phenomena, Vol. II", Ed. J-A Sepulchre, pp. 1-64, World Scientific 2003). Cela a donc motivé l'utilisation de disques en fer doux. Ces disques sont ferromagnétiques et présentent une perméabilité magnétique élevée. Ce changement a permis la mise en évidence de l'instabilité dynamo.

Nous avons donc montré que l'écoulement engendré par la contrarotation de ces deux disques engendre spontanément un champ magnétique si l'écoulement est suffisamment intense [5]. Il s'agit de la première observation de l'effet dynamo dans un écoulement non contraint donc présentant des fluctuations turbulentes à toutes les échelles spatiales. En raison de la turbulence, le champ magnétique présente localement de grandes fluctuations comme on peut le voir en fig. 1 gauche. Le champ à grande échelle est un dipole axial (d'axe parallèle à l'axe du cylindre, voir fig. 1 droite) et il ne se renverse pas quand les deux disques sont en contrarotation à la même vitesse. Ce résultat est surprenant : bien que deux états soient possibles (dipole pointant vers l'une ou l'autre des deux faces du cylindre), et bien que le système soit très fluctuant, les fluctuations n'ont pas l'efficacité suffisante pour renverser le champ magnétique (quand les deux disques tournent en sens opposés à la même vitesse).

b- Energie magnétique à saturation

Une question très attendue était la valeur du champ créé par l'instabilité dynamo et son évolution quand on s'éloigne du seuil d'instabilité. Les mesures sont représentées en figure 2. Un champ de l'ordre de 100 Gauss est mesuré au coeur de l'écoulement. Une prédiction antérieure sur l'ordre de grandeur de ce champ est en bon accord avec ce résultat et explique que les mesures réalisées à différentes températures

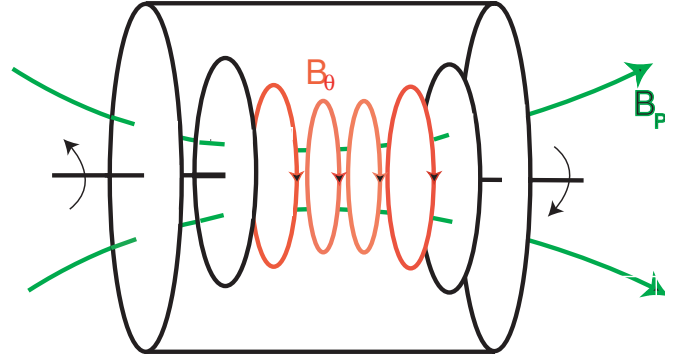
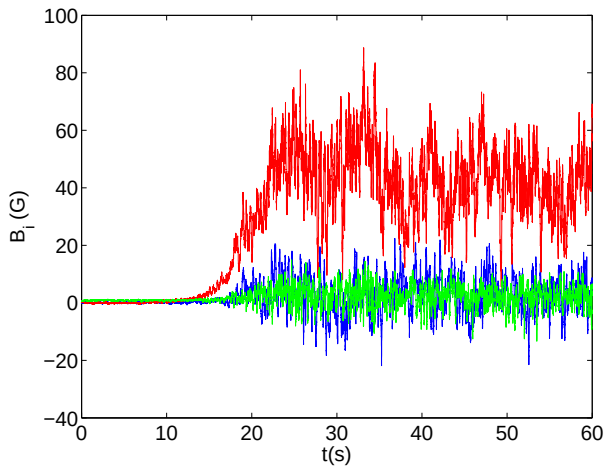


FIGURE 1 – Gauche : Série temporelle du champ magnétique obtenu lors du franchissement du seuil en contrarotation exacte. Droite : Allure de la moyenne temporelle du mode instable observé en contrarotation exacte.

puissent être représentées par une seule courbe en variables sans dimension (voir dans la partie "Théories et modèles").

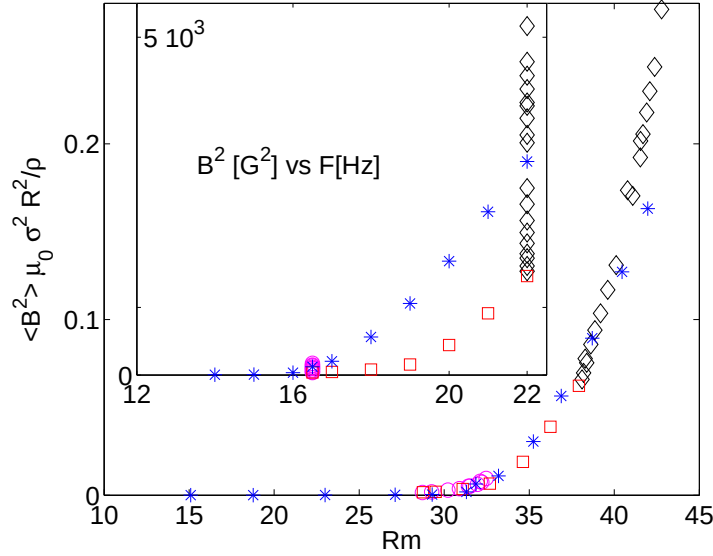


FIGURE 2 – Energie magnétique adimensionnée en fonction du nombre de Reynolds magnétique. Le nombre de Reynolds magnétique est $Rm \simeq 2\pi\mu_0\sigma FR^2$ où F est la fréquence de rotation des disques et R leur rayon. Insert : énergie magnétique en fonction de la fréquence de rotation des disques pour différentes températures donc différentes valeurs de la conductivité électrique σ .

c- Renversements aléatoires du champ magnétique

Lorsque les deux disques tournent à des vitesses différentes, un champ magnétique est aussi engendré. Le champ magnétique grande échelle peut avoir un comportement différent : l'espace des paramètres (voir fig. 3) contient plusieurs domaines dans lesquels sont observés des régimes dynamiques tels que des renversements aléatoires. Une série temporelle du champ est présentée en fig. 3 bas. L'étude détaillée de ce régime permet d'identifier plusieurs propriétés [6] :

- Les renversements ont toujours la même forme : on superpose tous les renversements sur la même courbe

(voir fig. 3 haut droit) ce qui indique qu'une partie de l'évolution est de basse dimensionnalité.

- Il existe des renversements ratés (aussi appelés excursions).

- A la fin d'un renversement, le champ magnétique atteint des valeurs élevées avant de saturer à une valeur plus basse (on parle d'overshoot). Cela n'est pas le cas des excursions.

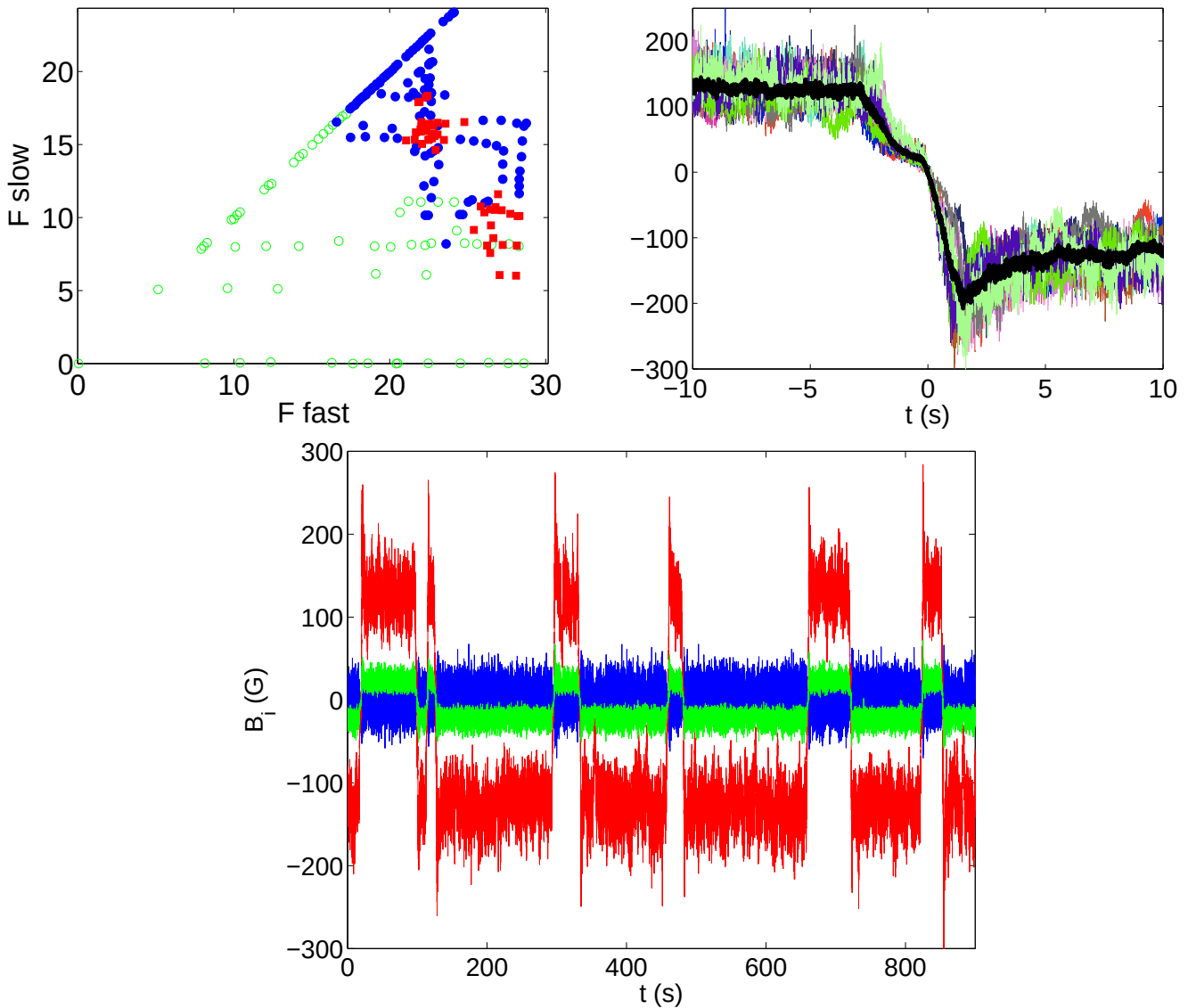


FIGURE 3 – En bas : Série temporelle du champ magnétique obtenu dans l'expérience VKS pour un régime de renversements. En haut à gauche : exemple d'espace des paramètres pour l'expérience VKS. En principe, les nombres de Reynolds magnétiques Rm construits à partir de la vitesse de chaque disque sont les paramètres pertinents ; ici, les mesures sont faites à température à peu près constante et les Rm sont donc proportionnels à la fréquence de rotation de chaque disque F . En haut à droite : Superposition des renversements observés dans l'expérience VKS. En noir : moyenne sur les réalisations. On note que les renversements ont la même forme et sont constitués d'une phase de décroissance lente suivie d'une phase de croissance rapide vers la polarité opposée qui se termine avec un overshoot.

d- Autres régimes dynamiques de basse dimensionnalité

En changeant les valeurs des paramètres de contrôle, nous avons identifié d'autres régimes dynamiques. Des oscillations non linéaires sont observées, voir fig. 4. En traçant une projection de l'espace des phases

à partir de deux composantes du champ, il est mis en évidence que le cycle est observé quand une solution stationnaire perd sa stabilité et que ce cycle décrit le lieu des solutions stationnaires voisines [7].

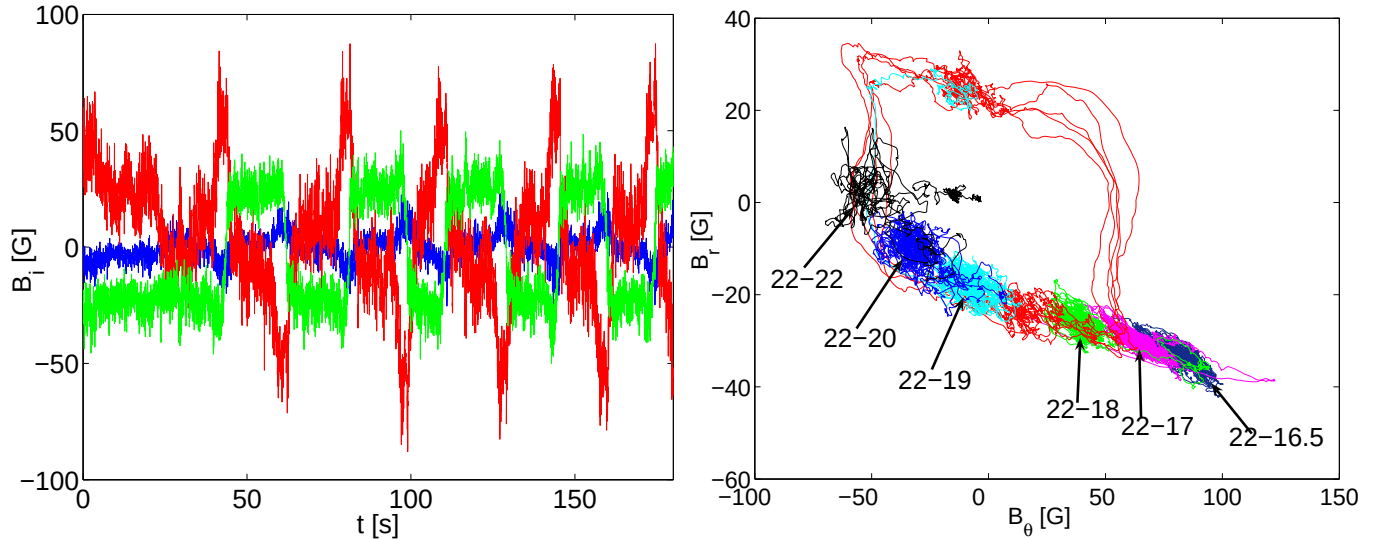


FIGURE 4 – Gauche : série temporelle du champ magnétique obtenu dans l’expérience VKS pour un régime d’oscillations non linéaires. Droite : espace des phases et transition à l’oscillation non linéaire. En contrarotation exacte, pour des vitesses des disques $F_1 = F_2 = 22Hz$, l’état du système représenté en noir fluctue autour d’un dipôle correspondant à une fort champ radial et peu de champ azimuthal (la mesure présentée est faite dans le plan central). En diminuant la vitesse d’un disque, la composante quadrupolaire du champ (B_θ) augmente tandis que la composante dipolaire diminue. L’état purement quadrupolaire n’est ici pas stable et le système décrit le cycle limite présenté en figure de gauche et représenté en rouge dans la figure de droite. Notons que ce cycle décrit le lieu des états stationnaires voisins représentés en noir, bleu foncé, bleu clair, vert, cyan et violet.

Nous avons aussi montré que près de certains régimes de renversement, le champ peut présenter des oscillations périodiques, des bursts symétriques ou des bursts asymétriques, voir fig. 5. Nous insistons sur le fait que cette variété de régime est obtenue avec des modifications très faibles des paramètres de contrôle : moins de 7% pour les fréquences de rotation des disques et moins de 5% sur la conductivité électrique. Cela a des conséquences importantes du point de vue astrophysique : de nombreuses études tentent de relier le type de champ observé (stationnaire ou renversements périodiques ou aléatoires) à la nature de l’écoulement dans l’objet astrophysique. Nos observations montrent que cela est peu pertinent puisqu’en changeant très peu l’écoulement, on change le type de dynamique observé.

En étudiant ces différents régimes et, en construisant une projection de l’espace des phases à l’aide de la méthode des retards, nous montrons que ces signaux qui semblent très divers peuvent être décrits dans un cadre simple. En effet, en fig. 5, nous identifions deux paires de points fixes (notés $\pm P$ et $\pm Q$). Les régimes dynamiques correspondent tous à une évolution particulière entre ces points : les renversements connectent P à $-P$ en passant près de $\pm Q$; les bursts asymétriques sont des excursions à partir de Q vers le point P ; les bursts symétriques connectent Q à $-Q$ en passant près de $\pm P$

e- Existence de dynamos bistables

Dans certains régimes (par exemple lorsqu’un disque tourne très vite par rapport à l’autre), nous avons observé que le champ magnétique est bistable : il peut être soit stationnaire soit oscillant. Ces états sont très stables ce qui est surprenant : malgré l’amplitude des fluctuations turbulentes, on n’observe pas de transitions spontanées entre ces deux états. Nous avons étudié le scénario d’instabilité mis en jeu. Il s’agit d’une bifurcation de codimension 2 [8] qui se produit quand un seul mode est proche à la fois d’une bifurcation stationnaire et d’une bifurcation de Hopf [9].

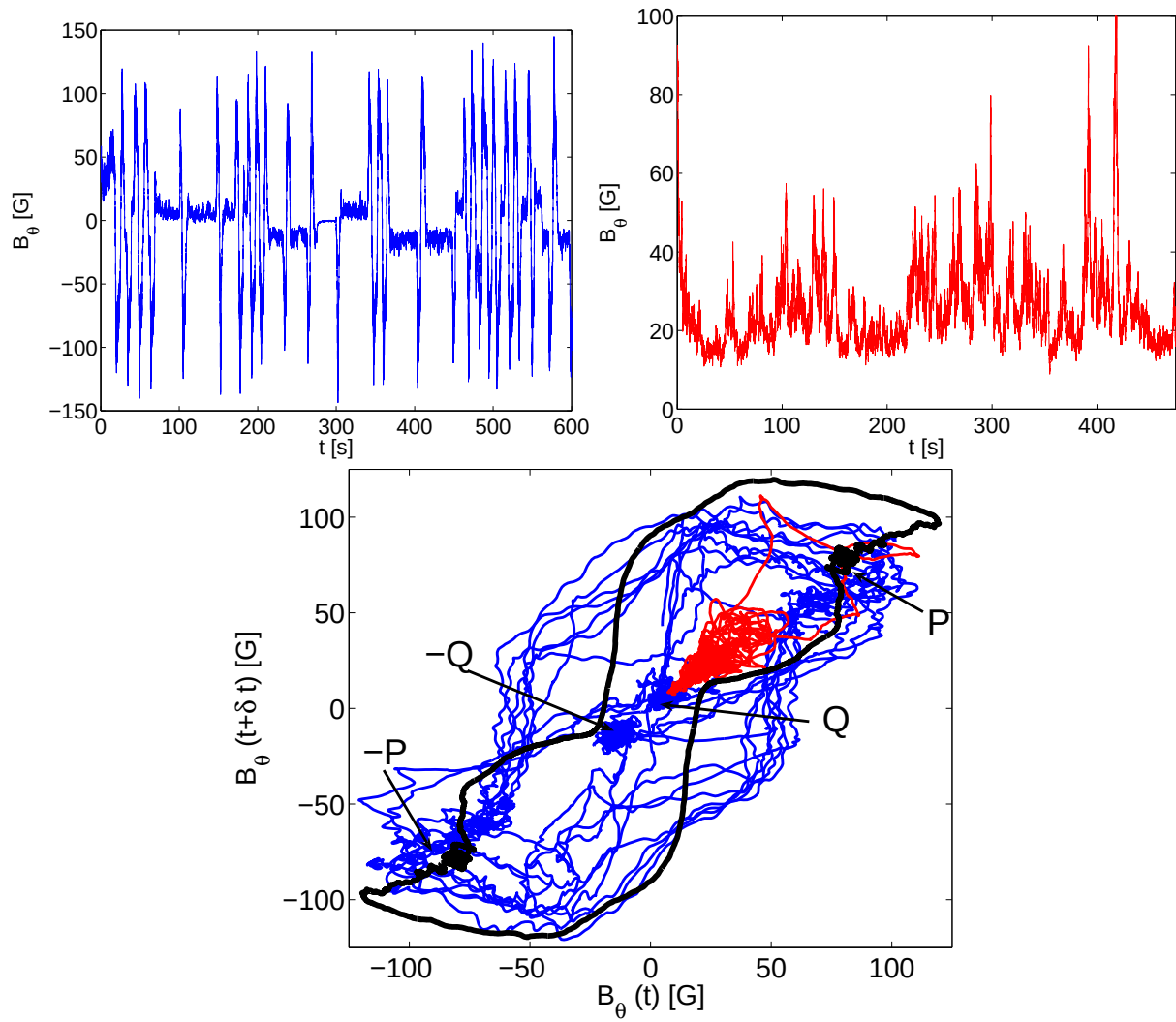


FIGURE 5 – En haut : Séries temporelles du champ magnétique mesuré dans l’expérience VKS pour un régime de bursts symétriques (gauche) et bursts asymétriques (droite). En bas : reconstruction de l’espace des phases de ces signaux superposé à l’espace des phases construit à partir de la moyenne des renversements (en noir). On voit que les renversements connectent deux états d’amplitudes élevées $\pm P$. Les bursts asymétriques (rouge) sont des fluctuations à partir d’un état de faible amplitude (Q) tandis que les bursts symétriques (bleu) connectent ces deux états de faible amplitude ($\pm Q$) en évoluant transitoirement près des états d’amplitude élevée ($\pm P$).

f- Transport d’un champ localisé sous le seuil d’instabilité

Dans une configuration avec des disques en inox, donc en l’absence d’effet dynamo, nous avons appliqué localement un champ magnétique (avec un aimant intense mais de petite taille) dans l’écoulement. En mesurant à distance le champ magnétique induit, nous avons étudié le transport d’un champ magnétique localisé par un écoulement turbulent. Il s’agit d’un problème de complexité intermédiaire entre celui de l’advection-diffusion d’un scalaire passif (par exemple l’évolution de la concentration d’un polluant dans un écoulement) et le problème d’instabilité du champ magnétique (où le champ est aussi advecté et diffusé mais modifie le champ de vitesse par l’intermédiaire de la force de Lorentz).

Nous avons obtenu plusieurs résultats intéressants. Loin de la source localisée, le champ moyen mesuré peut être presque nul tandis que les fluctuations croissent linéairement en l’intensité du forçage (plus précisément linéairement avec le nombre de Reynolds magnétique). Ces fluctuations sont très intermittentes et la distribution des fluctuations présente des ailes exponentielles [10]. Cela signifie que le champ magnétique perd rapidement sa cohérence si il est créé localement. Il faut donc en tenir compte dans les

modèles de génération de champ magnétique qui supposent que les effets d'induction sont localisés dans des domaines disjoints de l'espace.

2- Théories et modèles

Outre ces résultats expérimentaux, j'ai obtenu plusieurs résultats théoriques dont certains permettent de comprendre les résultats de l'expérience VKS. Ces études ont principalement été menées avec S. Fauve.

a- Mécanisme d'instabilité

La question du mécanisme d'instabilité en jeu dans l'expérience VKS est très importante car, comme discuté précédemment, il s'agit du premier effet dynamo observé dans un écoulement turbulent non contraint. Plusieurs simulations numériques avaient été réalisées qui prédisaient la formation d'un champ magnétique ayant la structure d'un dipole transverse. Il est particulièrement intéressant que le champ observé (dans le cas de la contrarotation exacte) soit dominé par un dipole axial en contradiction avec les prédictions numériques. Avec N. Mordant et S. Fauve, nous avons proposé que les fluctuations de vitesse engendrées par les disques sont à la source d'un effet alpha qui permet ainsi de faire croître un dipole axial. Dans les simulations numériques, seule la composante moyenne du champ de vitesse était prise en compte et, dans ce cas, seul un dipole transverse peut être créé. Le mécanisme que nous proposons tient compte des fluctuations de vitesse et prédit un champ à grande échelle dipolaire axial en accord avec les mesures expérimentales [11].

b- Energie magnétique à saturation

Le résultat précédent concerne le seuil de l'instabilité (on parle du problème linéaire). Au dessus du seuil d'instabilité, le champ magnétique croît avant de saturer. Il s'agit du problème non linéaire pour lequel peu de résultats sont disponibles car sa résolution requiert à priori de décrire l'effet de la force de Lorentz sur le champ de vitesse dans le cas où l'écoulement est très turbulent.

Nous avons prédit une loi qui régit l'évolution de l'énergie magnétique à saturation en fonction du nombre de Reynolds magnétique Rm pour une dynamo turbulente [12, 13]. De façon générale, l'énergie magnétique est de la forme

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\rho\eta^2}{R^2} f(Rm, Pm), \quad (6)$$

où f est une fonction inconnue du Rm et de Pm . Pour une dynamo engendrée dans un écoulement très turbulent, nous nous attendons à ce que la viscosité cinématique ν n'apparaisse pas dans le résultat et donc que la fonction f ne dépende pas de Pm . Nous écrivons donc $f(Rm, Pm) = g(Rm)$. Près d'une bifurcation supercritique, la dépendance habituelle de l'amplitude du champ en l'écart au seuil impose le comportement $g(Rm) \propto Rm - R_{mc}$. Cette dépendance est attendue si les fluctuations turbulentes n'ont pas d'effet. On parle dans ce cas de "champ moyen" par analogie avec les transitions de phases à l'équilibre.

Cette loi, dont la vérification expérimentale a été présentée en figure 2 pour la dynamo VKS, prédit aussi le bon ordre de grandeur de l'énergie magnétique pour les autres dynamos expérimentales (Riga et Karlsruhe) comme on peut le voir en figure 6. Notons que, pour l'expérience VKS, alors que les mesures faites à différentes températures sont bien représentées sur la même courbe maîtresse en utilisant la loi prédite, il semble que $\langle B^2 \rangle$ ne soit pas linéaire en l'écart au seuil $Rm - R_{mc}$ pour des valeurs proches du seuil. Comme mentionné précédemment, les prédictions de type champ moyen prédisent une évolution linéaire en l'écart au seuil. Il est donc possible que l'écart à la linéarité soit une conséquence des fluctuations turbulentes : il s'agirait alors d'un comportement critique dans ce système hors équilibre. Il est aussi possible que cela soit dû à l'aimantation rémanente des disques qui rend la bifurcation imparfaite. Quoi qu'il en soit la compréhension du régime près du seuil est particulièrement intéressante.

Enfin nous avons étendu cette approche au cas de dynamos engendrées par un écoulement turbulent homogène isotrope, qui est un système modèle étudié en détail par divers groupes de numériciens. Nos prédictions expliquent simplement plusieurs des résultats obtenus dans ces travaux numériques notamment la forme de la courbe donnant le seuil (Rm critique) en fonction du nombre de Prandtl magnétique

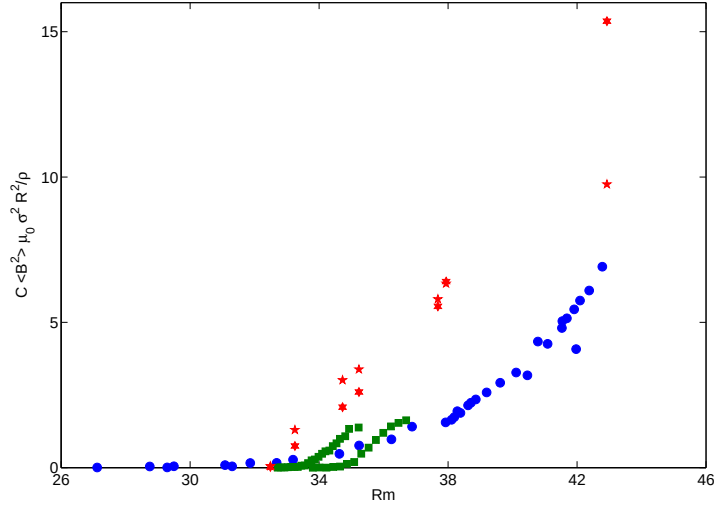


FIGURE 6 – Energie magnétique moyenne $\langle B^2 \rangle$ adimensionnée suivant la prédiction faite pour une dynamo turbulente en fonction du nombre de Reynolds magnétique pour l'expérience VKS (rond bleu); l'expérience de Riga (étoile rouge); l'expérience de Karlsruhe (carré vert). Pour chaque expérience, l'énergie magnétique adimensionnée est d'ordre un ce qui indique que le processus de saturation est correctement pris en compte.

P_m ainsi que le rapport entre la puissance dissipée par effet Joule et par viscosité [14].

c- Mécanisme de renversement du champ

Près du seuil d'une instabilité usuelle, on s'attend à ce que la dynamique du champ résulte de la compétition entre un petit nombre de modes instables ou faiblement amortis. Si cela a été largement vérifié pour les instabilités engendrées dans un milieu temporellement périodique ou ne dépendant pas du temps, une des observations les plus intéressantes de l'expérience VKS est que, bien que l'écoulement soit très turbulent, la dynamique du champ magnétique est de basse dimensionalité. Cela est probablement aussi une conséquence de la faible valeur de P_m : les temps caractéristiques du champ magnétique sont très longs devant ceux du champ de vitesse. Dit autrement, le champ magnétique ne peut pas suivre les échelles de temps rapides des fluctuations turbulentes dont les effets lui apparaissent en quelque sorte moyennés temporellement et donc de faible amplitude.

Nous allons brièvement montrer que toutes les observations expérimentales résultent de la compétition entre deux modes. Le modèle s'adapte très aisément à la dynamo terrestre et ce cas est présenté en parallèle.

Nous supposons donc que le champ magnétique peut être décrit par deux modes :

$$\mathbf{B}(r, t) = D(t) \mathbf{D}(\mathbf{r}) + Q(t) \mathbf{Q}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

où $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ représentent la dépendance spatiale des modes et $D(t)$ et $Q(t)$ leur amplitude. Nous allons écrire des équations régissant l'évolution des amplitudes. En principe, il devrait être possible d'obtenir ces équations à partir des équations de la MHD. En pratique, dans la limite pertinente où le nombre de Reynolds cinétique est très grand, l'écoulement est très turbulent et il n'y a pas de technique rigoureuse qui permette de réduire la dynamique à un petit nombre d'équations. Si nous oublions les fluctuations, l'interaction entre quelques modes près de leur seuil est décrite par des équations différentielles ordinaires couplant leurs amplitudes. Nous ferons par la suite l'hypothèse que les fluctuations turbulentes se traduisent dans les équations d'amplitude par des termes de bruit. Puisque ces termes dérivent du terme $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dans l'équation d'induction, ces bruits seront supposés multiplicatifs et apparaîtront multipliés par les amplitudes.

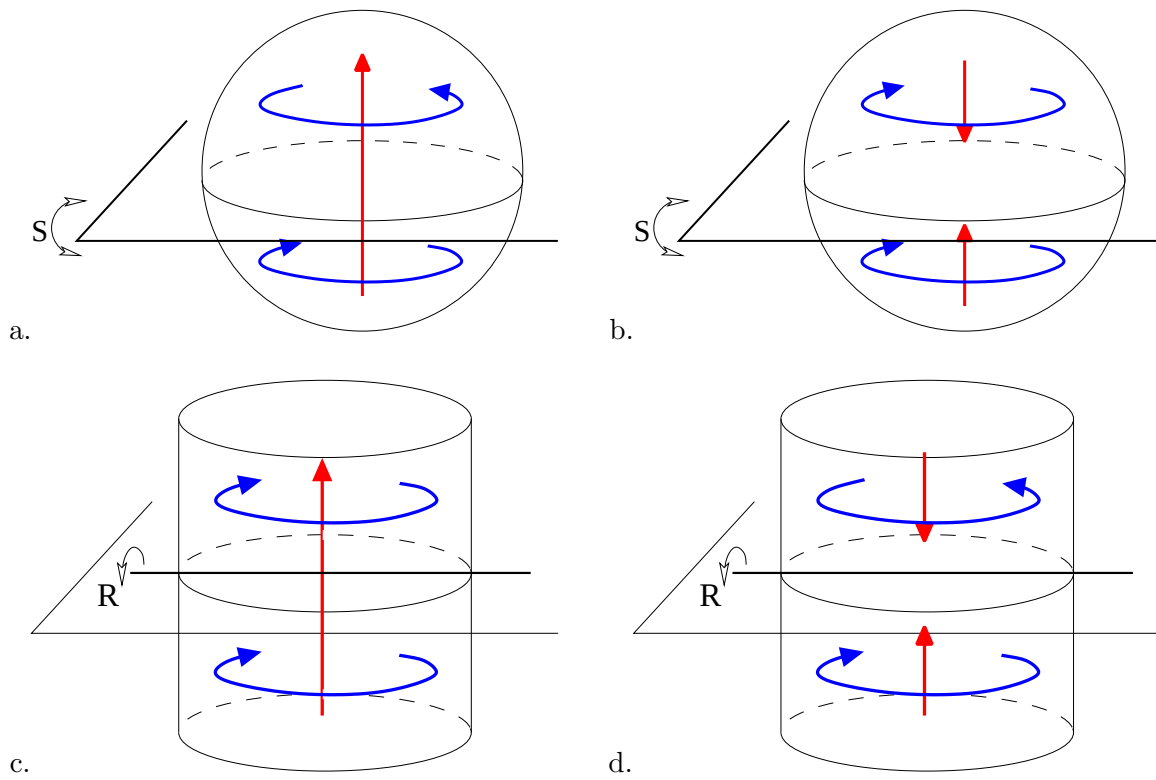


FIGURE 7 – Modes de champ magnétique de symétrie (a & c) dipolaire et (b & d) quadrupolaire dans la géométrie de la Terre (a & b) et de l'expérience VKS (c & d). L'allure de la composante poloïdale (respectivement toroïdale) est tracée en rouge (resp. en bleu).

Modes et symétries

Nous pouvons dans certains cas deviner des caractéristiques des modes entrant en jeu. Si le problème est invariant par une symétrie discrète (ici une réflexion ou une rotation d'angle π autour d'un axe), les modes du problème linéaire peuvent être de deux types : symétriques ou antisymétriques vis-à-vis de cette transformation.

Dans l'expérience VKS, lorsque les deux disques tournent en contrarotation à la même vitesse, le problème est invariant par rotation d'angle π par rapport à tout axe contenu dans le plan médian entre les disques. Nous nous attendons alors à ce que les modes instables soient symétriques ou antisymétriques par rapport à cette rotation. Des schémas de ces deux modes sont représentés en fig. 7. Nous remarquons que ces modes ont les mêmes symétries qu'un dipôle ou un quadrupôle. Nous nommerons ces modes "dipôle" et "quadrupôle" bien qu'ils n'en aient à priori que la symétrie et qu'ils soient évidemment plus structurés spatialement, notamment dans l'écoulement. Dans le cas de la Terre, le forçage est à priori invariant par symétrie plane S par rapport à l'équateur. Les modes pairs et impairs par rapport à cette symétrie et de structures spatiales les plus simples sont aussi représentés en fig. 7. Nous les qualifierons eux-aussi abusivement de dipoles et quadrupoles.

Equations couplant un dipôle et un quadrupôle

Nous supposons ainsi que le champ magnétique est la somme d'une composante dipolaire d'amplitude D et d'une composante quadrupolaire Q . Nous notons $A = D + iQ$ l'amplitude complexe du champ magnétique. Nous cherchons une équation pour les deux modes proches du seuil et supposons pouvoir faire un développement en puissances de A et de $\bar{A}$. En tenant compte de l'invariance $B \rightarrow -B$, soit $A \rightarrow -A$, nous obtenons l'équation suivante

$$\dot{A} = \mu A + \nu \bar{A} + \beta_1 A^3 + \beta_2 A^2 \bar{A} + \beta_3 A \bar{A}^2 + \beta_4 \bar{A}^3, \quad (8)$$

où nous avons tenu compte des nonlinéarités à l'ordre le plus bas. Les différents coefficients sont à priori complexes et dépendent des caractéristiques de l'écoulement.

Lorsque le forçage est symétrique par rapport à une transformation, nous obtenons des contraintes sur les coefficients. Dans le cas de VKS, en contrarotation exacte, l'expérience est invariante par rotation de π par rapport à tout axe du plan médian. Par cette transformation on transforme D en $-D$ et Q en Q soit $A \rightarrow -\bar{A}$. Nous déduisons donc qu'en contrarotation exacte les coefficients sont réels. Dans le cas de la Terre, nous trouvons le même résultat quand l'écoulement respecte la symétrie équatoriale. Lorsque la symétrie est brisée, les parties imaginaires des coefficients augmentent.

Pour illustrer le comportement possible, nous considérons une forme simplifiée de l'équation 8 obtenue quand le module de A est éliminé adiabatiquement et que la phase θ de $A = re^{i\theta}$ contrôle la dynamique. En faisant quelques hypothèses sur les valeurs des coefficients, nous obtenons

$$\dot{\theta} = \mu_i - \nu_r \sin 2\theta. \quad (9)$$

L'espace des phases des solutions est présenté en fig. 8. Lorsque la symétrie est peu brisée, donc pour une faible valeur de μ_i , le système a une paire de points fixes stables et une paire de points fixes instables. En augmentant, μ_i les points fixes se rapprochent et collisionnent pour $\mu_i = \nu_r$. Pour μ_i plus grand que ν_r , il n'y a pas de point fixe, le système décrit une oscillation non linéaire. Il s'agit donc d'une double bifurcation noeud-col qui transforme une solution stationnaire en cycle limite. Notons que le problème est équivalent à celui d'une particule ayant une dynamique suramortie dans le potentiel représenté en fig. 9. La bifurcation noeud-col correspond au passage du potentiel de gauche, non monotone, au potentiel de droite qui est strictement décroissant.

A première vue, ce type de bifurcation semble peu générique et diffère des cas classiques [8, 15]. En fait, ce scénario est contraint par la symétrie du problème et nous pouvons montrer le résultat suivant.

Généricité

Soit un système planaire invariant par symétrie centrale (ici $B \rightarrow -B$) et qui possède deux modes stationnaires distincts non nuls. Un des deux modes est instable tandis que l'autre est stable. La collision des deux modes engendre un cycle hétérocline qui connecte le point collisionné avec son opposé. Ce cycle évolue vers une solution périodique qui varie lentement près des points où a eu lieu la collision.

La justification de ce résultat est la suivante. La solution $B = 0$ (qui existe puisque le système est impair) a bifurqué vers deux modes distincts (et leurs opposés). Elle est donc localement un point instable tandis qu'une des deux solutions est un point fixe stable et l'autre un point col. Lorsque le point fixe stable et le point col collisionnent (en B_c), que deviennent les conditions initiales proches de ces points? Elles ne peuvent aller vers $B = 0$ qui est instable et ne peuvent aller vers un point fixe puisqu'il n'en existe pas d'autre (B_c et $-B_c$ viennent de disparaître). Elles décrivent donc un cycle. Ce cycle entoure nécessairement $B = 0$ puisque pour un problème plan, dans tout cycle il y a un point fixe (ici un noeud instable). Supposons que le cycle créé par B_c soit différent de celui créé par $-B_c$. Comme les deux cycles sont images par $B \rightarrow -B$, ils doivent se couper ce qui n'est pas possible pour un problème plan. Il n'y a donc qu'un seul cycle qui connecte B_c et $-B_c$.

Notons que ce scénario n'est basé en rien sur la structure spatiale des modes magnétiques. La transition noeud-col peut impliquer des modes de même symétrie comme un dipole et un octupole. Dans ce cas, briser la symétrie n'est pas nécessaire pour observer la bifurcation. Dans l'expérience VKS, il semblait initialement plus naturel que les deux modes impliqués soient ceux de plus grande échelle spatiale : le dipole et le quadrupole. Cette hypothèse expliquait la nécessité de briser la symétrie du forçage pour observer des régimes dynamiques. Comme discuté ultérieurement, cela a été confirmé par les mesures récentes.

Transition vers l'oscillation non linéaire

De ce scénario, nous déduisons l'existence de deux régimes. Une fois que les deux points ont collisionné, un cycle limite est formé, la solution est périodique et passe beaucoup de temps proche des anciens points

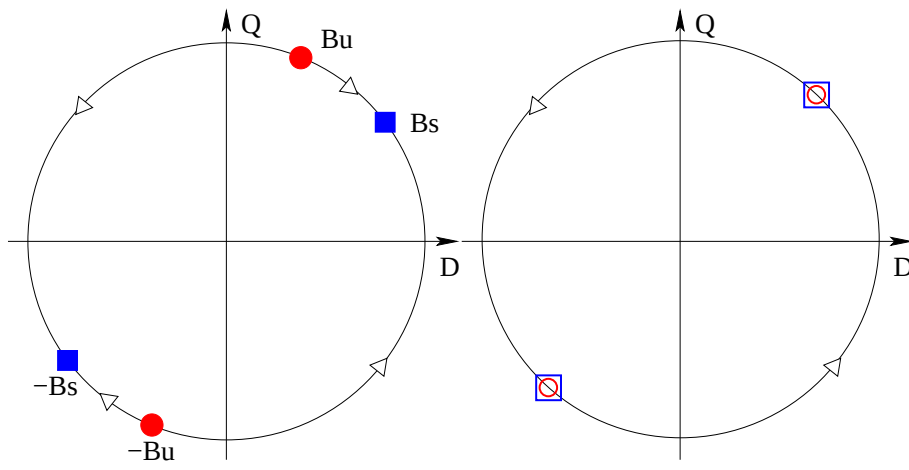


FIGURE 8 – Espace des phases obtenu lorsque deux modes stationnaires sont en compétition. A gauche, en dessous du seuil, à droite, au dessus du seuil de la bifurcation noeud-col. Les carrés sont les solutions stables, les ronds sont les solutions instables. En dessous du seuil, des fluctuations peuvent initier un renversement (évolution $B_s \rightarrow B_u$) qui se poursuit par une phase rapide $B_u \rightarrow -B_s$ et termine par un overshoot.

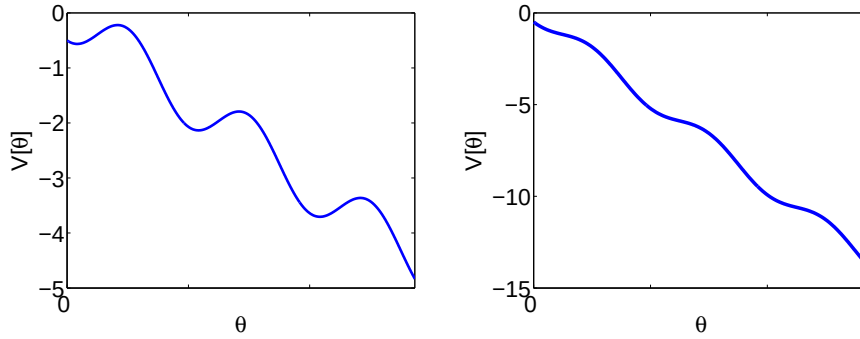


FIGURE 9 – Potentiel pour la variable θ . A gauche, en dessous du seuil, à droite, au dessus du seuil de la bifurcation noeud-col.

fixes. Nous pouvons prédire le comportement de la période qui évolue comme la distance à la bifurcation à la puissance $-1/2$ soit $T \propto \epsilon^{-1/2}$ où ϵ est l'écart à la bifurcation.

L'équation 8 présente cette bifurcation quand les coefficients ne sont pas réels purs donc quand la symétrie de l'écoulement est brisée. En variant les valeurs des coefficients, la solution présente une transition de stationnaire vers des oscillations non linéaires. Ces oscillations sont représentées en fig. 10 superposées à une mesure de l'expérience VKS. Même si un certain nombre de paramètres sont libres, ces courbes mettent en lumière de façon assez claire que le nombre de modes impliqués dans la dynamique du champ magnétique, ici deux, est extrêmement petit comparé au nombre de modes impliqués dans la dynamique du champ de vitesse : une estimation à la Kolmogorov indiquerait en effet $Re^{9/4}$ modes soit plus de 10^{13} modes....

Renversements aléatoires

En dessous du seuil de la bifurcation noeud-col, le système évolue vers un des deux points fixes qui est stable localement B_s , voir fig. 8. Cependant, très près de ce point fixe stable est situé le point fixe instable B_u : des fluctuations peuvent permettre au système d'atteindre le point fixe instable et ensuite d'évoluer vers le point fixe stable de signe opposé $-B_s$. Le système reste alors près de $-B_s$ jusqu'à ce que des fluctuations excitent le système à nouveau vers B_s . Il s'agit d'un mécanisme d'excitabilité qui en présence de la symétrie $B \rightarrow -B$ engendre un comportement de type "renversement".

Plusieurs prédictions peuvent être faites. Le renversement se décompose en deux phases : de B_s à

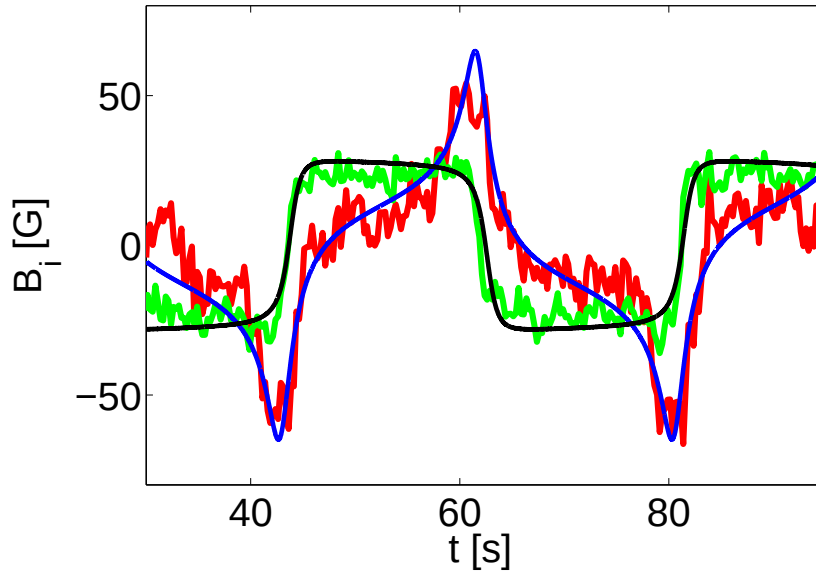


FIGURE 10 – Oscillation non linéaire du champ magnétique mesuré dans l’expérience VKS et solution du modèle à deux modes donné par l’équation 8. Les courbes expérimentales sont une mesure de la composante dipolaire (rouge) et quadrupolaire (vert). Les composantes correspondantes dans le modèle sont les parties réelles et imaginaires de A .

B_u , ce sont les fluctuations qui permettent la dynamique. De B_u à $-B_s$ la partie déterministe suffit pour faire évoluer le système. La seconde phase est donc plus rapide que la première.

A la fin de la première phase, si les fluctuations sont insuffisantes, on peut revenir vers B_s , il s’agit d’un renversement raté et nous identifions ainsi un mécanisme pour les excursions.

A la fin d’un renversement, le comportement du système quand il s’approche de B_s dépend du flot local dans l’espace des phases et donc de la position relative de B_s et B_u (qui est la direction lente). Si pour une des composantes, B_u est inférieur à B_s , le système évolue vers la phase stationnaire en réalisant un over-shoot. Le même raisonnement prédit que cela ne sera pas le cas pour les excursions.

Dans le cadre de l’équation (9), la dynamique est associée à un potentiel qui présente une alternance de minima et maxima locaux comme représenté en fig. 9. Les renversements correspondent aux sorties de ces puits de potentiel. Nous en déduisons que la durée des renversements est aléatoire et, comme pour le problème de sortie de puits, est distribuée exponentiellement soit $P(T) \propto \exp(-T/\langle T \rangle)$, pour T pas trop petit [16] avec un temps caractéristique d’activation $\langle T \rangle$ qui dépend de l’amplitude des fluctuations et de l’écart à la bifurcation.

Application à la géodynamo

En collaboration avec E. Dormy et J-P Valet, nous proposons ce mécanisme comme explication des renversements du champ magnétique de la Terre. Nous montrons en fig. 11 et 12 une comparaison entre les données paléomagnétiques, les mesures de VKS et les résultats d’une simulation numérique de l’équation (9) en y introduisant un terme de bruit. Les similarités entre les séries temporelles (à l’échelle de plusieurs renversements mais aussi si l’on se focalise sur un renversement ou une excursion) laissent à penser que le même mécanisme est à l’oeuvre pour tous ces renversements. Notons par ailleurs que les propriétés relatives à la forme des renversements et des excursions présentées précédemment sont bien vérifiées.

D’autres prédictions peuvent être faites, notamment concernant les durées caractéristiques et la statistique de ces événements et nous pouvons les comparer avec ce qui est connu des renversements du champ magnétique de la Terre. On sait par exemple que la fréquence des renversements du champ terrestre n’est pas constante au cours des âges. Elle est de 5 par million d’années actuellement mais a été

nulle entre -110 et -80 millions d'années durant ce qui est appelé un superchron (très longue période sans renversement). Dans la communauté géophysique, ce changement de comportement de la dynamo Terrestre est un problème important. Pour certains, il s'agit d'une évolution continue des caractéristiques des renversements tandis que d'autres pensent que la nature même du phénomène change. Le mécanisme présenté ici, donne une explication simple : puisque la durée entre renversements est déterminée par un phénomène de sortie de puits, la fréquence moyenne des renversements est l'inverse d'un temps de Kramers de sortie de puits [16] et nous nous attendons à une loi de la forme $F \propto \exp(-\Delta V/D)$ où ΔV représente la barrière d'énergie qu'il faut franchir pour sortir d'un puits et D l'effet des fluctuations. La dépendance de F étant exponentielle, elle présentera une très forte variation pour un changement même petit de D ou de ΔV . En s'approchant ou en s'éloignant de la bifurcation noeud-col, la fréquence des renversements peut ainsi varier de plusieurs ordres de grandeurs. Nous avons donc une explication simple de la variabilité des caractéristiques du champ terrestre, explication qui ne nécessite pas de changement important du mécanisme de la dynamo Terrestre.

Nous terminons cette comparaison avec la géodynamo par une remarque sur le type de modélisation que nous avons faite. Un lecteur peu familier avec l'approche en terme d'équations d'amplitude pourrait considérer que l'équation (8) est un modèle ad hoc dont les solutions sont rendues similaires aux mesures du champ terrestre (ou de l'expérience VKS) par un choix judicieux des coefficients (et ce d'autant plus si ce lecteur se sent concerné par le problème de la géodynamo). Ce n'est pas le cas. Quels que soient les détails de la dynamo considérée, la compétition entre deux modes stationnaires près de leur seuil d'instabilité sera décrite par l'équation (8). Il s'agit donc à la fois d'un modèle minimal (car il implique le plus petit nombre de degrés de liberté compatible avec la dynamique observée) et d'un modèle très général (car il nécessite seulement l'existence d'un couplage entre deux modes au voisinage de leur seuil d'instabilité). C'est ce caractère générique qui explique que de nombreux systèmes sont décrits par ce modèle.

Autres régimes prédits

Plus généralement, nous avons montré que tous les régimes dynamiques observés dans l'expérience VKS résultent de la compétition entre deux modes stationnaires [20]. Nous illustrons quelques régimes obtenus quand deux paires de bifurcations noeud-col se produisent simultanément. Nous traçons en fig. 13 des régimes de renversements, de bursts symétriques et de bursts asymétriques obtenus par des modifications minimales des coefficients de l'équation (8). Les comportements simulés numériquement sont très similaires à ceux observés dans l'expérience VKS et représentés en fig. 3 et 5.

Au cours de sa thèse, B. Gallet a montré que le régime de bistabilité présenté en section (I-e) est aussi capturé par l'équation (8) près d'un point de codimension-2 [9]. Il a par ailleurs étudié des modèles d'écoulements en géométrie sphérique pour lesquels l'instabilité dynamo peut être décrite analytiquement. Outre l'identification du mécanisme de renversement, un nouveau type de comportement a été prédit : l'existence de dynamos hémisphériques où le mode instable est stationnaire et son énergie est localisée dans un des hémisphères [21]. Ces résultats et leurs implications potentielles pour les dynamos astrophysiques et expérimentales seront présentés en détail dans sa thèse.

Tests du modèle dans l'expérience VKS

Des scénarios différents pouvaient être envisagés pour décrire certains régimes observés dans l'expérience VKS. Il est connu que les écoulements entre disques contrarotatifs voient leur topologie évoluer quand on change les vitesses relatives des disques [22]. Ces transitions pouvaient être mises en avant comme déclencheurs de la dynamique du champ magnétique et des renversements. Notre modélisation prédit que de telles transitions hydrodynamiques ne sont pas nécessaires pour observer des régimes dynamiques : c'est la proximité à la bifurcation noeud-col des deux modes de champ magnétique en compétition qui détermine l'état du système.

Par ailleurs, les premières mesures de champ magnétique étaient réalisées en un point de l'espace ce qui ne permettait que d'intuiter la forme spatiale du champ. La structure géométrique des deux modes était à préciser et on pouvait imaginer que notre mécanisme impliquait des modes ayant d'autres structures

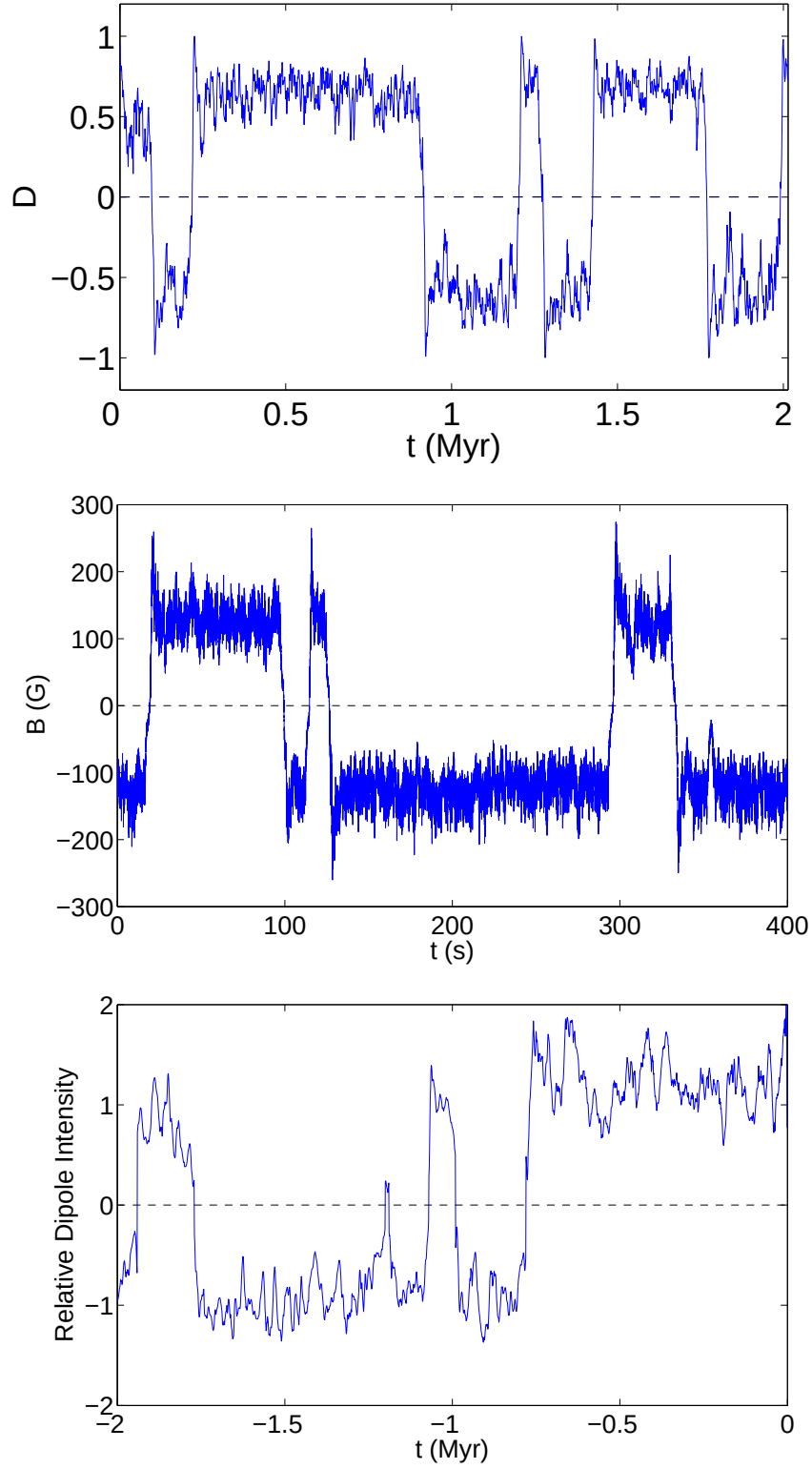


FIGURE 11 – Comparaison entre les séries temporelles (du haut vers le bas) d'un modèle de basse dimension du champ magnétique (il s'agit de l'équation 9 avec un terme de bruit), des mesures de l'expérience VKS, des mesures paléomagnétiques (il s'agit donc de la composante dipolaire du champ terrestre au cours des deux derniers millions d'années). Dans la figure du haut, l'échelle de temps est un paramètre ajustable qui a été choisi pour être comparable à l'échelle de temps de la géodynamo.

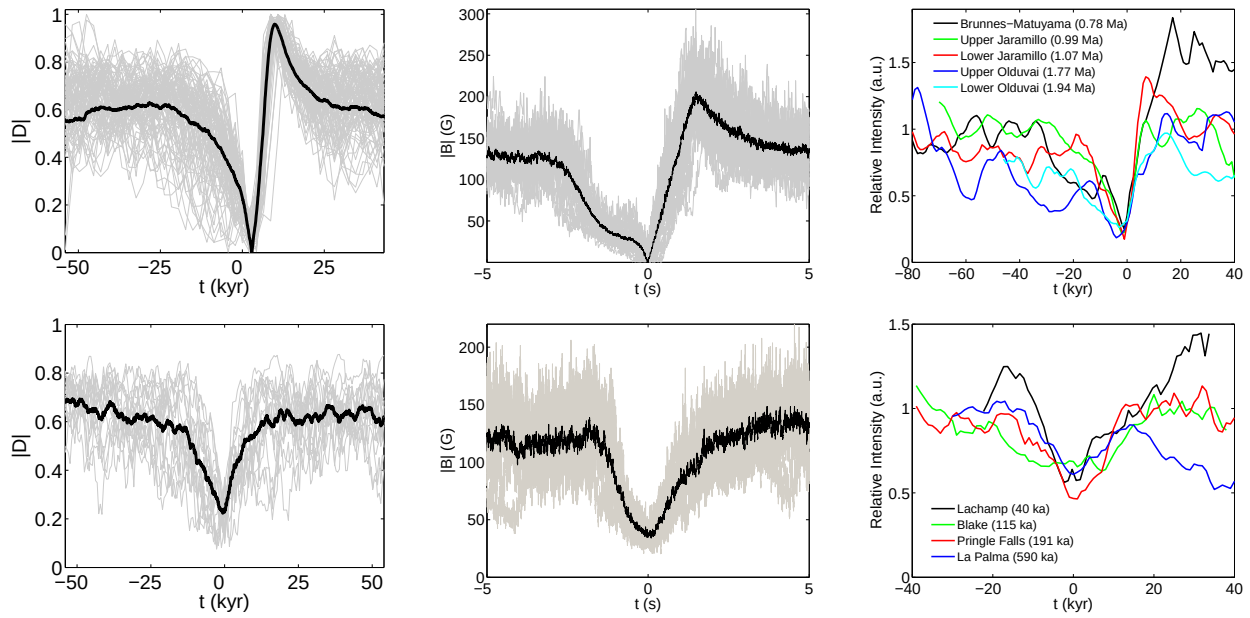


FIGURE 12 – Comparaison des renversements et des excursions pour les solutions de l'équation (9) avec terme de bruit (gauche), pour l'expérience VKS (centre) (données de [6]), et pour les données paléomagnétiques (droite) (données de [19]). Les réalisations sont en gris et leur moyenne en noir.

spatiales.

Au cours des dernières campagnes d'expériences nous avons étudié les variations de la période des différents régimes dynamiques, la structure géométrique du champ et les caractéristiques de certaines grandeurs hydrodynamiques. La divergence de la période en inverse de la racine de l'écart au seuil comme prédite par le modèle est bien vérifiée expérimentalement [23]. Par ailleurs, il a été mis en évidence que les modes en compétition sont bien de structure dipolaire et quadrupolaire [24]. Enfin, des régimes dynamiques ont été observés alors que les mesures de champ de vitesse et de couple exercé par les moteurs ne montrent aucune transition dans les comportements hydrodynamiques. Ces observations ainsi que l'ensemble des prédictions du modèle qui ont été vérifiées confirment le mécanisme impliqué dans la dynamique du champ magnétique.

Perspectives

Expérience VKS :

Le succès de l'expérience VKS a déjà permis de nombreux progrès dans la compréhension de l'instabilité dynamo d'un écoulement turbulent et de nouveaux résultats sont espérés.

A court terme, une question que nous pourrions aborder est celle du transport du champ localisé près du seuil d'instabilité dynamo. En appliquant un champ localisé et en mesurant loin du point d'application, on détermine le transport turbulent du champ magnétique. Près du seuil d'instabilité dynamo, on s'attend à ce que ce transport soit modifié : à grande échelle, la présence d'un mode peu amorti (le mode instable) peut amplifier le transport. En outre, un champ fort appliqué peut exciter le mode instable sous son seuil d'instabilité et cela permettra d'évaluer dans un système turbulent la "susceptibilité" du champ magnétique et son éventuelle divergence au seuil.

A moyen terme, le rôle précis des disques en fer doit être déterminé. Nous distinguons trois types d'effets qui peuvent être associés aux disques en fer.

Les disques peuvent être aimantés. Même sans écoulement, un champ est alors appliqué au fluide. Cet effet correspond à l'ajout d'un terme source additif dans l'équation d'induction et cela peut rendre la

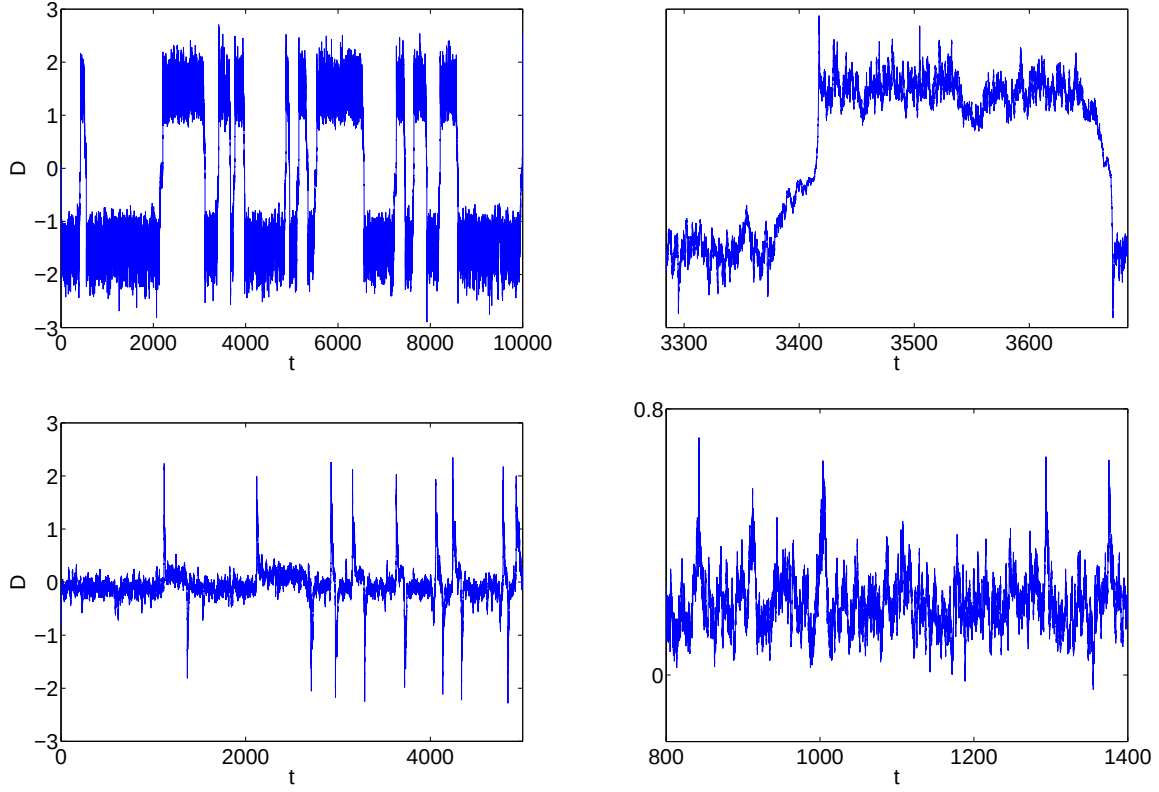


FIGURE 13 – Séries temporelles de solutions de l'équation (8) avec un terme de bruit pour des paramètres à proximité de deux paires de bifurcations noeud-col. Les dynamiques simulées sont identiques à celles observées dans l'expérience VKS : renversements, bursts symétriques et bursts asymétriques. Notons les similarités entre ces séries temporelles et celles observées dans l'expérience VKS et représentées en fig. 3 et 5.

bifurcation imparfaite. Dans certaines mesures nous avons observé un léger hystérésis de la courbe de bifurcation. Cela se manifeste par un décalage de l'ordre de 5% de la valeur du nombre de Reynolds magnétique critique [17, 18]. Cet effet, que nous attribuons à l'aimantation des disques en fer, reste donc assez limité.

Les parois ferromagnétiques changent les conditions aux limites du champ magnétique. Il est bien connu que changer les conditions aux limites dans un problème d'instabilité peut changer le seuil. En convection de Rayleigh-Bénard en cellule infinie avec température fixée aux parois, le nombre de Rayleigh critique change d'un facteur environ 2.6 en passant des conditions aux limites de non glissement à celles de cisaillement nul pour la vitesse aux parois. Dans la limite de perméabilité infinie, les conditions aux limites pour le champ magnétique imposent un champ purement normal aux parois. Il a été montré numériquement par C. Gissinger que le seuil est abaissé dans ce cas [25].

Une variation spatiale de perméabilité magnétique peut amplifier certaines composantes du champ et être à l'origine d'un des processus d'induction impliqués dans l'instabilité. Il est connu qu'une variation spatiale de conductivité électrique, accompagnée d'un cisaillement engendre une instabilité dynamo [26]. Il est probable qu'un effet similaire existe pour une modulation de perméabilité magnétique. La pertinence et l'importance d'un tel effet dans l'expérience VKS est encore à déterminer.

A plus long terme, il reste une étape importante à franchir : l'obtention d'une dynamo sans utiliser de disques ferromagnétiques. Le comportement près du seuil d'instabilité est susceptible d'être influencé par l'aimantation rémanente des disques. S'affranchir de cet effet est crucial pour déterminer l'évolution de l'amplitude du paramètre d'ordre (le champ magnétique) très près de la transition. Nous pourrions ainsi observer un phénomène critique hors équilibre et éventuellement déterminer les exposants critiques de ce système. Une piste possible consiste à augmenter l'efficacité des processus d'induction en maximisant l'hélicité de l'écoulement entre les disques.

Dynamique des champs géo et astrophysiques

Dans le cadre de la géodynamo, nous pouvons tester différentes prédictions issues de notre modélisation des renversements du champ magnétique. On peut envisager d'étudier les statistiques des renversements à des époques très anciennes et tenter de relier ces propriétés à la structure de la Terre.

D'autres approches semblent intéressantes : à partir des mesures en plusieurs points à la surface de la Terre, on peut estimer la différence de simultanéité du renversement du champ local. Cela est relié à la structure des modes entrant en jeu et nous avons espoir d'en déduire des contraintes sur ces modes. Ce dernier point pourrait être testé avec d'autres objets astrophysiques (planètes proches ou étoiles pour lesquelles le champ varie sur des échelles de temps "rapides", la dizaine d'années).

Dynamique des grandes échelles en écoulement turbulent

Avec B. Gallet, J. Hérault, C. Laroche et S. Fauve, nous étudions plusieurs systèmes turbulents qui sont connus pour engendrer un écoulement à grande échelle. Ces écoulements brisent en général une symétrie du problème initial, par exemple en choisissant un sens d'écoulement ou le sens opposé. On se demande dans quelle mesure l'évolution rétablit à temps long les symétries du problème. Si les fluctuations sont suffisantes, il est possible que le système évolue successivement dans les deux états (les deux sens de l'écoulement grande échelle). On observerait alors des renversements dans un écoulement turbulent.

Nous étudions en particulier deux systèmes. Le premier est la convection de Rayleigh Bénard dans le régime très loin du seuil. Le second est un écoulement cellulaire quasi bidimensionnel. Une couche de métal liquide plongée dans un champ magnétique vertical (ce qui bidimensionnalise l'écoulement) est forcé spatialement par des courants électriques injectés par un réseau d'électrodes. L'écoulement de base est à l'échelle du forçage mais il se déstabilise pour engendrer une circulation grande échelle. Il a été mis en évidence que cette circulation se renverse de façon apparemment aléatoire [27]. Dans ces systèmes nous étudierons la dynamique des grandes échelles, les éventuels régimes de renversements et comment ces renversements sont reliés aux propriétés statistiques de la turbulence petite échelle.

Enfin, un problème connecté bien que n'impliquant pas un écoulement turbulent concerne la transition de dérive d'une structure périodique formée par instabilité. L'idée étudiée expérimentalement par N. Cor-

nuault et théoriquement par B. Gallet, consiste à engendrer une instabilité formant un motif périodique stationnaire. En favorisant une direction, le motif est susceptible de se propager. Cette situation est aussi un exemple de renversement car chaque fois que le motif s'est déplacé d'une demi longueur d'onde, le champ s'est en fait renversé.

Dans tous ces systèmes, une question intéressante est de savoir quels mécanismes sont responsables des renversements et de comparer leurs propriétés à celles des renversements du champ magnétique terrestre ou de l'expérience VKS.

II- Effets d'un bruit multiplicatif sur des instabilités

Je présente maintenant des résultats concernant les effets des fluctuations sur des instabilités.

Dans le cas de l'instabilité dynamo, les fluctuations turbulentes agissent multiplicativement sur le champ magnétique, c'est-à-dire que leur effet est proportionnel à l'amplitude du champ. On parle d'un bruit multiplicatif. Un tel bruit peut intervenir dans d'autres contextes. Près du seuil d'une instabilité, des fluctuations de l'écart au seuil vont moduler le taux de croissance du mode instable et cet effet apparaît dans l'équation d'amplitude comme un terme multiplicatif. Dans certaines réactions chimiques impliquant deux espèces ou plus généralement quand un processus requiert la présence de deux populations, la vitesse de réaction fait intervenir le produit des concentrations. Si une des concentrations est maintenue à peu près constante par l'opérateur, les fluctuations près de la valeur moyenne peuvent être décrites comme un bruit qui aura alors un effet multiplicatif.

Il existe de nombreux travaux liés à l'effet d'un bruit additif sur une instabilité. Notons par exemple que l'équation de Landau pour le paramètre d'ordre d'une transition de phase à l'équilibre peut être vue comme l'équation d'amplitude pour le mode instable d'une bifurcation. Les études des phénomènes critiques à l'équilibre peuvent ainsi être transposées au problème de fluctuations additives près d'une instabilité. En général, les effets d'un bruit additif sont différents de ceux d'un bruit multiplicatif. Nous nous limitons presque exclusivement à ce dernier cas dans ce qui suit et dont nous décrivons maintenant la problématique. Considérons un système susceptible de présenter une instabilité en l'absence de fluctuations. En présence de fluctuations, nous pouvons nous poser les questions suivantes :

- Comment le seuil d'instabilité est modifié par les fluctuations ?
- Qu'advient-il du comportement du mode instable au dessus du seuil d'instabilité ?
- D'éventuelles instabilités secondaires sont-elles affectées ?

La séparation avec la partie précédente est dans certains cas arbitraire. Il est clair que les résultats liés au mécanisme des renversements concernent aussi l'effet de fluctuations sur une instabilité et plus précisément l'effet de fluctuations près d'une bifurcation secondaire de type noeud-col.

1- Déplacement du seuil d'instabilité

Pour donner quelques éléments de réponse à la première question, nous considérons l'exemple canonique

$$\dot{x} = \mu x + \zeta(t)x - x^3, \quad (10)$$

où ζ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de corrélation $\langle \zeta(t)\zeta(0) \rangle = 2D\delta(t)$, en notant $\langle \rangle$ la moyenne sur les réalisations du bruit. Cette équation est interprétée au sens de Stratanovich [16]. En l'absence de bruit, la solution $x = 0$ perd sa stabilité pour $\mu = 0$ au profit de solutions $\pm\sqrt{\mu}$ via une bifurcation fourche supercritique. Qu'en est-il en présence de bruit ?

Il est tentant d'appliquer les méthodes utilisées pour l'étude d'instabilités usuelles et de commencer en linéarisant l'équation. La solution se calcule aisément $x(t) = x(0) \exp(\mu t + \int_0^t \zeta(t') dt')$. Les moments s'en déduisent en utilisant la propriété des variables aléatoires gaussiennes, $\langle \exp(\phi) \rangle = \exp(\langle \phi^2 \rangle / 2)$, ce

qui nous permet d'écrire

$$\langle x^n(t) \rangle = x^n(0) \exp(nt(\mu + Dn/2)). \quad (11)$$

Ce résultat indique que le seuil de croissance exponentielle dépend alors du moment considéré et le concept d'instabilité semble être mal défini. Il n'en est rien et il s'agit en fait d'une pathologie causée par la linéarisation abusive d'un problème avec bruit multiplicatif. En considérant la série temporelle d'une solution du problème linéarisé, nous observerions des événements très rares où le bruit favorise pendant longtemps la croissance de x qui atteint ainsi de grandes valeurs. Ces événements bien que très rares dominent la statistique des moments et les rendent instables pour des valeurs du paramètre de contrôle μ qui dépendent du moment considéré. Dans le problème complet, les effets non linéaires entrent en jeu et saturant la croissance de x qui ne peut atteindre ces valeurs très élevées : les événements rares qui polluaient les statistiques des moments disparaissent et la notion de seuil d'instabilité est à nouveau bien définie. Pour calculer le seuil d'instabilité d'un problème avec bruit multiplicatif, nous ne pouvons donc pas considérer brutalement l'évolution d'un moment calculé à partir de l'équation linéarisée.

Notons que des approches similaires sont parfois employées. Le modèle de Kazantsev [28] de dynamo turbulente calcule le seuil de croissance de l'énergie magnétique $\langle B^2 \rangle$ pour une équation d'induction avec champ de vitesse aléatoire. Il s'agit donc d'un problème linéaire et il serait intéressant de calculer le seuil de croissance des moments d'ordres plus élevés afin de contrôler la pertinence de ce modèle.

Le problème de détermination du seuil d'instabilité est donc compliqué mais plusieurs techniques existent. Dans certains cas, nous pouvons résoudre l'équation de Fokker-Planck associée à l'équation de Langevin. En général, nous trouvons des solutions se comportant comme des lois de puissance près de $x = 0$, soit $P(x) \propto x^\lambda$. Ces solutions correspondent à des distributions normalisables quand λ est plus grand que -1 . Dans le cas contraire, la probabilité à temps long converge en général vers une solution singulière de la forme $P(x) \propto \delta(x)$. Celle-ci n'est plus attractive quand l'exposant λ devient plus grand que -1 ce qui définit le seuil d'instabilité.

Cette méthode tient explicitement compte des nonlinéarités et est restreinte aux équations de Langevin les plus simples afin que l'équation de Fokker-Planck puisse être résolue. A partir de l'équation linéarisée nous pouvons calculer le seuil d'instabilité du problème complet à condition de considérer un "moment" particulier. Il a été montré que le seuil d'instabilité correspond à l'annulation de l'exposant de Lyapunov du problème linéarisé [29] qui est défini par

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{d\langle \log(x^2) \rangle}{dt}. \quad (12)$$

En guise de remarques, notons d'une part qu'en langage de physique statistique, l'exposant de Lyapunov peut être obtenu en considérant la limite quand n tend vers zéro de $d\langle x^n \rangle / dn$ ce qui peut faciliter les calculs. D'autre part, notons l'analogie au niveau de la méthode avec les techniques de physique statistique à l'équilibre pour des systèmes désordonnés. Dans ces problèmes, le bruit apparaît typiquement dans la fonction de partition via des termes exponentiels puisque $Z = \sum \exp(-\beta H)$ où H contient des coefficients aléatoires. Les propriétés du système ne se déterminent pas en moyennant Z sur les réalisations du désordre mais en moyennant le logarithme qui n'est autre que l'énergie libre!

Le calcul du seuil d'instabilité en utilisant l'exposant de Lyapunov a été mené dans plusieurs systèmes [30]. Avec A. Alexakis, nous avons étudié des instabilités impliquant plusieurs modes proches de leur seuil en présence de bruit multiplicatif [31]. A partir de l'équation de Fokker-Planck du problème linéarisé, nous avons déterminé la loi de puissance avec laquelle varie l'amplitude des modes instables près de zéro. Cette méthode, différente du point de vue technique, présente des similarités avec la détermination de l'exposant de Lyapunov puisque l'exposant de la loi de puissance est relié à celui de Lyapunov.

Une troisième façon de déterminer le seuil d'instabilité consiste à calculer perturbativement les effets du bruit. Le paramètre de contrôle déterministe et l'amplitude du mode instable sont développés en une série de puissances de l'amplitude du bruit. En écrivant les équations aux différents ordres, la condition de solvabilité permet de calculer la valeur du seuil d'instabilité [32]. Avec S. Aumaître, nous avons adapté cette technique pour calculer l'effet d'un bruit multiplicatif sur l'instabilité de Rosensweig [33]. Du point de vue expérimental, nous avons étudié une couche de ferrofluide soumise à un champ magnétique vertical. A fort champ, des pics se forment, c'est l'instabilité de Rosensweig, voir fig. 14 gauche. En vibrant le

liquide verticalement et de façon aléatoire, la surface plane est stabilisée. Il s'agit de la stabilisation paramétrique stochastique de cet état. La technique de calcul perturbative décrite précédemment donne une prédiction en bon accord avec les mesures expérimentales, comme nous pouvons le voir en fig. 14 droite.

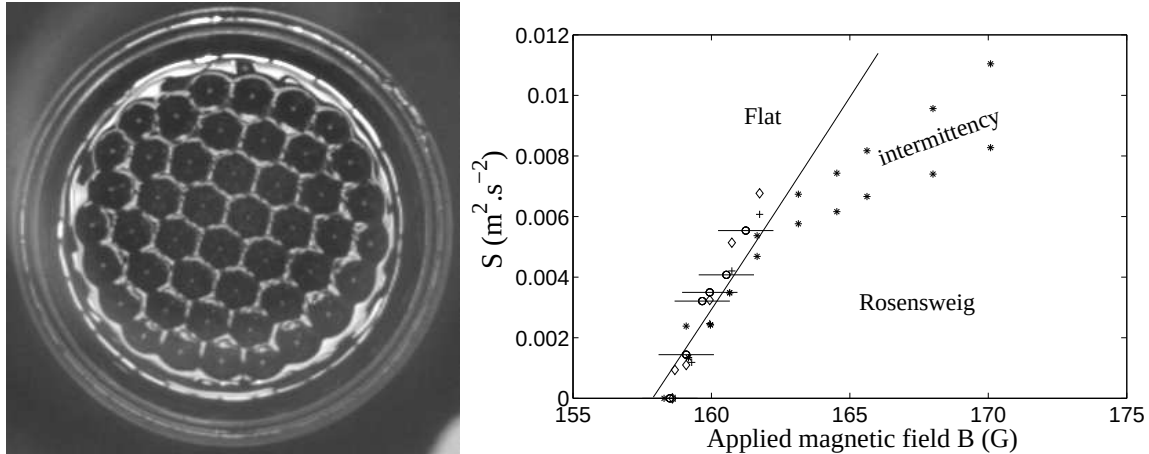


FIGURE 14 – Gauche : Photo d'une couche de ferrofluide soumise à un champ vertical. L'instabilité de Rosensweig engendre un réseau hexagonal de pics. Droite : Espace des paramètres décrivant l'effet d'un bruit multiplicatif sur le seuil d'instabilité de Rosensweig. En augmentant le champ magnétique B la surface plane devient instable et des pics se forment. Le paramètre S est relié à l'amplitude du bruit. Plus S est grand, plus le seuil d'instabilité est repoussé à de plus hautes valeurs du champ magnétique. Les symboles sont les déterminations expérimentales du seuil d'instabilité pour des bruits de spectres différents. Le trait continu est la prédiction théorique basée sur un développement perturbatif.

Si les différentes techniques donnent le même résultat pour le seuil d'instabilité, les résultats obtenus pour l'amplitude du mode instable diffèrent. En fait, le résultat obtenu perturbativement diverge aux ordres supérieurs si le spectre à fréquence nulle du bruit est non nul. Nous allons détailler ci-dessous ce qui est à l'origine de ce phénomène et qui est aussi la cause de la pathologie des moments calculés à partir du problème linéarisé.

2- L'intermittence on-off

Le bruit peut non seulement déplacer le seuil d'une instabilité mais aussi engendrer un mode instable intermittent. Le principe est que le taux de croissance instantané ($\mu + \zeta(t)$ dans l'équation 10) étant aléatoire, il peut prendre des valeurs négatives pendant de longues durées et faire décroître vers zéro l'amplitude du mode instable avant que cette amplitude ne croisse à nouveau. Les séries temporelles alternent entre des phases d'amplitude très faible et des phases de forte amplitude : c'est l'intermittence on-off.

Ce phénomène a été initialement identifié par une équipe qui étudiait la dynamique de deux systèmes chaotiques couplés. A couplage fort les systèmes suivent la même trajectoire et la "distance" entre solutions est nulle. A couplage nul, les systèmes sont indépendants et la distance fluctue autour d'une valeur dépendant de la structure des attracteurs chaotiques considérés. A couplage intermédiaire, on observe une alternance entre phases où les trajectoires sont identiques et la distance est nulle et des phases de bursts dans l'état désynchronisé où la distance est grande. Près du seuil d'apparition de ce comportement intermittent, l'équation d'évolution de la distance entre solutions a la même partie linéaire que l'équation (10) [34]. Dans ces articles est présentée la plupart des résultats que je résume ci-dessous. De façon indépendante, huit ans plus tard, une autre équipe a mis en évidence que la dynamique près d'un seuil d'instabilité en présence de fluctuations multiplicatives doit être similaire à celle des solutions de l'équation (10). C'est alors qu'apparaît le nom "intermittence on-off" [35]. Plusieurs propriétés caractérisent ce

régime. Elles sont en général contrôlées par les phases off où la variable est de petite amplitude. Elles sont ainsi génériques en ce sens qu'elles ne dépendent pas des termes non linéaires.

Près d'une bifurcation en présence de bruit multiplicatif, nous nous attendons à ce que l'amplitude du mode instable suive une loi de la forme de l'eq. (10). Durant les phases off, x est très petit et le terme non linéaire peut être négligé. Les trajectoires vérifient alors

$$\log(x(t)) = \log(x(0)) + \mu t + \int_0^t \zeta(t') dt'. \quad (13)$$

Nous allons voir que le mécanisme d'intermittence on-off et plusieurs de ses propriétés trouvent une explication simple à la lumière de cette formule. En moyennant sur les réalisations, le terme stochastique disparaît et nous observons que $\langle \log(x) \rangle$ tend vers $-\infty$ si μ est négatif et vers $+\infty$ si μ est positif. La valeur $\mu = 0$ correspond donc au seuil d'instabilité de la solution $x = 0$ en présence de bruit. Pour μ faiblement positif, $\log(x)$ décrit une marche aléatoire avec un biais vers les valeurs positives. Evidemment, cela n'est vrai que pour les faibles valeurs de x et si x devient trop grand, les effets non linéaires vont empêcher la marche aléatoire d'explorer les valeurs positives trop grandes. En fig. 15, nous représentons une série temporelle de la solution de (10) en régime d'intermittence on-off. La figure du haut permet d'identifier la marche aléatoire faiblement biaisée que suit $\log(x)$ pour les valeurs négatives. L'allure des séries temporelles présentant de l'intermittence on-off se comprend simplement en notant que toutes les valeurs inférieures au trait horizontal (ici un seuil arbitraire correspondant à $\log(x) = -2$) apparaissent comme presque nulle dans la figure du bas où est représentée la variable x . Outre cette explication qui ressort de l'analogie avec un mouvement brownien biaisé, nous pouvons faire les prédictions suivantes dans la limite où le biais tend vers zéro.

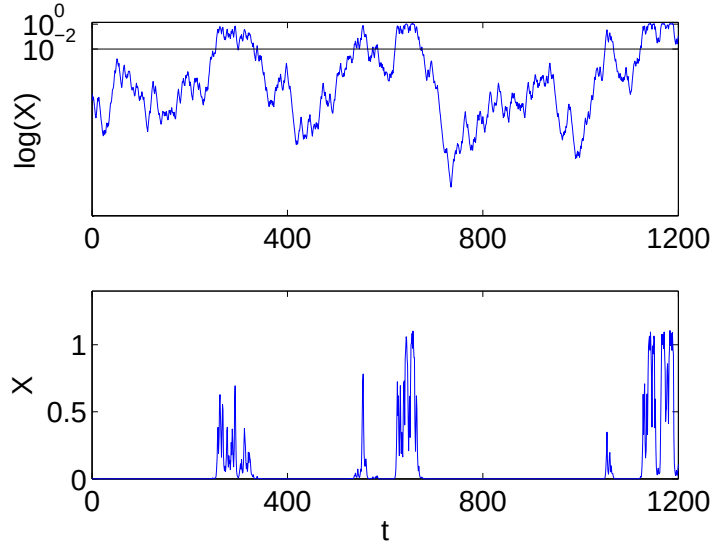


FIGURE 15 – Série temporelle de $x(t)$ solution de l'équation (10). Dans la figure du haut, on identifie que $\log(x)$ décrit une marche aléatoire avec un faible biais vers les valeurs positives et une saturation par les effets non linéaires pour des valeurs proches de l'unité. Les parties de la trajectoires situées en dessous du seuil matérialisé par un trait horizontal dans la figure en semilog du haut, apparaissent comme valant quasiment zéro dans la figure du bas.

Pour μ strictement nul et x petit, la distribution de $\log(x)$ devrait être uniforme puisqu'il n'y a pas de direction privilégiée pour l'évolution dans la phase off. La distribution de x doit alors être $P(x) \propto x^{-1}$ qui n'est pas normalisable. Cela signifie que cette solution n'est pas la solution d'équilibre : à temps long, x tend vers zéro et la distribution stationnaire est $P(x) \propto \delta(x)$. Pour μ positif, la distribution prend la forme $P(x) \propto x^{\mu/D-1}$ pour x petit. Pour x grand, ce qui correspond aux phases on, les nonlinéarités

entrent en jeu et nous nous attendons à ce que la distribution présente une coupure. La divergence de la distribution en $x = 0$ est la trace des longues phases off durant lesquelles la variable x prend des valeurs très proches de zéro.

Les durées des phases off sont distribuées suivant une loi particulière [36]. Supposons dans l'équation (13) que la valeur x_0 détermine l'entrée dans la phase off. Celle-ci se prolonge jusqu'à ce que x soit strictement supérieur à x_0 . En utilisant l'analogie avec la marche aléatoire biaisée, la durée de la phase off T_{off} correspond à celle du temps de retour d'un mouvement brownien biaisé. La distribution est un classique de ce genre de problème et prend la forme $P(T_{\text{off}}) \propto T_{\text{off}}^{-3/2}$ avec une coupure pour les grandes valeurs de T_{off} de la forme $\exp(-\mu^2 T_{\text{off}}/D)$.

Les statistiques des moments ont une dépendance particulière en l'écart au seuil : $\langle X^n \rangle \propto \mu$ ce qui est très différent du scaling normal (en l'absence de fluctuations) qui prédirait $\mu^{n/2}$. Ce résultat se comprend soit en utilisant la distribution d'équilibre soit à l'aide de la distribution des durées des phases off.

Le premier argument utilise $P(x) \propto x^{\mu/D-1}$ avec une coupure pour une valeur x_m que nous considérerons comme une valeur maximale en notant que le résultat n'est pas modifié si la coupure est de la forme $\exp(-(x/x_m)^n)$. En utilisant la condition de normalisation de la distribution nous écrivons $\langle x^n \rangle = I_n/I_0$ où $I_n = \int_0^\infty x^n P(x) dx = \int_0^{x_m} x^n P(x) dx$. En introduisant l'expression de $P(x)$, nous obtenons $I_n = x^{n+\mu/D} \big|_0^{x_m} / (n + \mu/D)$. I_n tend vers une constante non nulle quand μ tend vers zéro sauf dans le cas $n = 0$ où nous obtenons $I_0 \propto D/\mu$. La linéarité des moments en fonction de l'écart au seuil μ en découle.

Le second argument repose sur la durée des phases off. Au seuil, pour $\mu = 0$ la durée moyenne du temps de retour d'un mouvement brownien sans biais, $\langle T_{\text{off}} \rangle$, diverge. Pour une faible valeur du biais, nous obtenons $\langle T_{\text{off}} \rangle \propto \mu^{-1}$. En observant une série temporelle comme présentée en fig. 15, il est clair que les phases off ne contribuent pas aux moments et que seules les phases on y contribuent. Notons que les phases on correspondent à un mouvement brownien biaisé assujéti à rester localisé à des valeurs inférieures ou égales à celles pour lesquelles les nonlinéarités entrent en jeu. Quelques instants de réflexion permettent de se convaincre que la durée moyenne des phases on et la valeur que les moments y prennent sont indépendantes du biais μ dans la limite où le biais tend vers zéro. Nous pouvons alors estimer les moments avec $\langle x^n \rangle \simeq \langle T_{\text{on}} \rangle x_{\text{on}}^n / (\langle T_{\text{on}} \rangle + \langle T_{\text{off}} \rangle)$. Puisque le seul terme ayant un comportement singulier dans cette expression est $\langle T_{\text{off}} \rangle$ qui diverge en μ^{-1} , nous obtenons à nouveau la linéarité des moments en l'écart au seuil.

Le spectre de x , noté $S_x(f)$ a aussi un comportement particulier [34]. Deux régimes sont possibles. Loin du seuil d'instabilité, le spectre est une lorentzienne : il est plat à basse fréquence et présente une coupure à haute fréquence en f^{-2} . Dans ce régime, x fluctue autour d'une valeur moyenne non nulle. En notant X cette valeur, une partie de l'équation (10) s'écrit $\dot{x} = X\zeta(t) + \dots$ et le terme de bruit se comporte comme un bruit additif. Il s'en déduit aisément qu'à haute fréquence, le spectre de x est égal au spectre du bruit divisé par f^2 et donc pour un bruit blanc $S_x(f) \propto f^{-2}$.

Le comportement près du seuil est plus riche. Comme représenté en fig. 16, il présente trois régimes. A très hautes fréquences, pour $f \gg D$, nous trouvons une coupure en f^{-2} similaire au cas précédent. A très basses fréquences, pour $f \ll \mu^2/D$, le spectre est plat. A fréquences intermédiaires, il suit une loi de puissance en $f^{-1/2}$. A nouveau ces régimes peuvent être expliqués à l'aide de l'analogie avec le mouvement brownien biaisé et en utilisant la loi de distribution des durées des phases off qui en découle $P(T_{\text{off}}) \propto T_{\text{off}}^{-3/2}$. L'argument présenté maintenant est adapté de celui utilisé près du seuil d'intermittence de Pomeau-Manneville [37]. Considérons μ presque nul et estimons pendant une durée T la moyenne des durées des phases off notée $\langle T_{\text{off}} \rangle_T$. Pour ce type de variables distribuées suivant une loi large, cette grandeur est estimée en se limitant aux phases off de durées inférieures à T et nous écrivons $\langle T_{\text{off}} \rangle_T \simeq \int^T T_{\text{off}} P(T_{\text{off}}) dT_{\text{off}} \propto T^{1/2}$. Le nombre de phase off pendant T est alors $N(T) = T/\langle T_{\text{off}} \rangle_T \propto T^{1/2}$. Par construction, c'est aussi le nombre de phases on et puisque les phases on ont une durée moyenne qui ne diverge pas, nous en déduisons que le temps moyen passé dans une

phase on est proportionnel à $T^{1/2}$. La fraction du temps passée en phase on est donc proportionnelle à $T^{1/2}/T = T^{-1/2}$. Nous estimons alors le comportement de la fonction d'autocorrélation $C(t) = \langle x(t)x(0) \rangle$ en remarquant que les réalisations qui ont une contribution non nulle sont celles pour lesquelles $x(t)$ est dans une phase on, événements dont nous venons de montrer que l'occurrence décroît comme $t^{-1/2}$. Nous obtenons donc $C(t) \propto t^{-1/2}$. Le spectre se déduit à l'aide du théorème de Wiener-Khintchin : $S_x(f) = \int C(t) \exp(ift) dt \propto f^{-1/2}$. La loi de puissance du spectre est donc reliée à la loi de puissance de la distribution des durées des phases off et est donc reliée au caractère autosimilaire des trajectoires, plus précisément à la répartition des arrivées des phases on. Si μ est fini, la distribution de T_{off} a une coupure exponentielle pour des durées plus grandes que $T_c = D/\mu^2$. Pour des fréquences inférieures à T_c^{-1} , l'arrivée des phases on est un processus sans corrélation dont la loi n'est pas une loi large. Le spectre de x est alors plat.

La divergence de l'histogramme de x (en x^λ avec $\lambda + 1 \propto \mu$), la distribution des durées des phases off (en $T^{-3/2}$), le comportement des moments (linéarité en μ) et la forme du spectre (loi de puissance en $f^{-1/2}$) sont quatre propriétés caractéristiques de l'intermittence on-off.

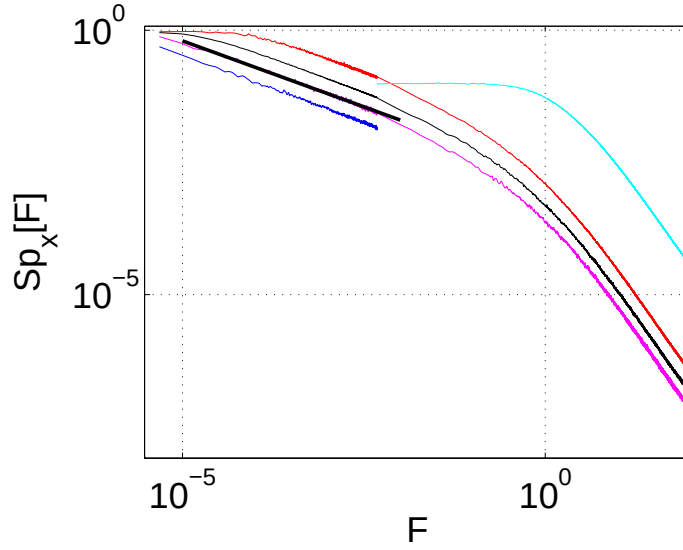


FIGURE 16 – Spectres de x solution de l'équation (10) pour différentes valeurs de μ . En cyan, pour $\mu = 1$, le spectre est une lorentzienne. En rouge $\mu = 0.01$; en noir, $\mu = 0.004$; en magenta $\mu = 0.002$ et en bleu $\mu = 0.001$. Le spectre à hautes fréquences est à peu près en f^{-2} , il est plat à basses fréquences et en diminuant μ il acquiert une zone en $f^{-1/2}$ comme indiqué par la droite en trait noir épais. Pour les plus petites valeurs de μ le changement de comportement à basse fréquence a lieu pour des fréquences plus petites que celles représentées.

3- Caractérisation spectrale de l'effet d'un bruit sur divers processus

Avec S. Aumaître et K. Mallick, nous nous sommes demandés quelles sont les caractéristiques des fluctuations qui sont importantes pour l'intermittence on-off. Pour un bruit quelconque dans le cadre de l'équation (10), nous avons effectué le développement de Van Kampen [38]. Cela permet d'obtenir une équation de Fokker-Planck effective qui est valide dans la limite où le produit du temps de corrélation du bruit par le carré de son amplitude reste petit. La résolution de cette équation montre que la distribution de probabilité de la variable x a la forme $P(x) \propto x^\lambda$ pour x petit avec $\lambda = \mu/S - 1$ où $S = \int_0^\infty \langle \zeta(t)\zeta(0) \rangle dt$. Nous observerons donc de l'intermittence on-off si S est plus grand que μ . Dit autrement en utilisant le théorème de Wiener-Khintchin, l'intermittence on-off apparaît si le spectre à fréquence nulle du bruit est plus grand que deux fois l'écart au seuil. Pour tester cette prédiction, nous utilisons des bruits différents

dont les spectres sont représentés en fig. 17. Dans cette même figure est représenté l'espace des paramètres dans la plan (S, μ) obtenu en résolvant numériquement l'équation (10). Le seuil d'intermittence prédit théoriquement est bien en accord avec ce qui est obtenu numériquement. Nous avons donc montré que l'amplitude du bruit n'est pas le paramètre important (rappelons que l'intégrale du spectre est le carré de la déviation standard) ; c'est la composante du spectre du bruit à fréquence nulle qui entre en jeu. De nombreuses expériences étant réalisées en filtrant les basses fréquences du bruit, il n'est pas surprenant que cet effet d'intermittence n'ait été que peu observé [39, 40].

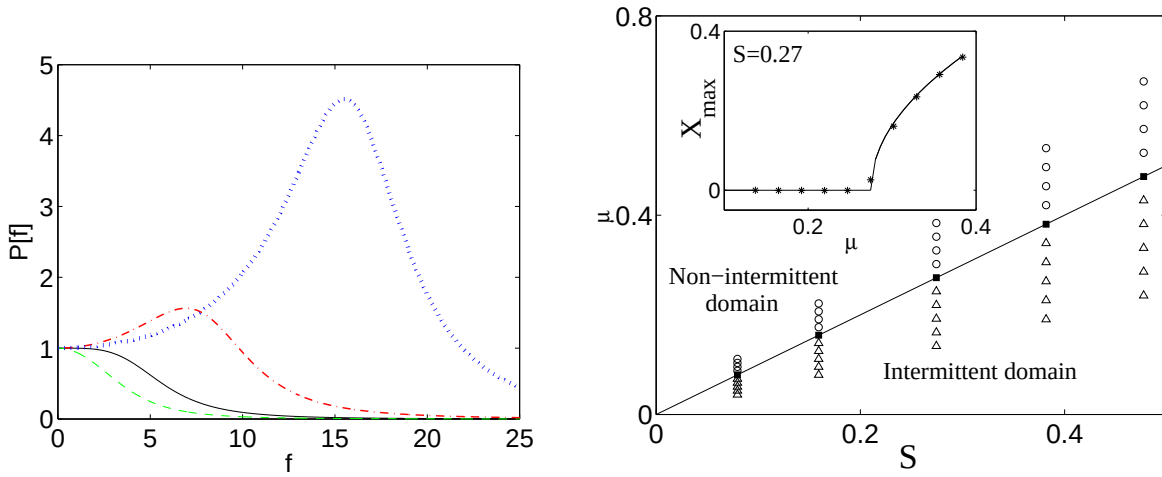


FIGURE 17 – Gauche : Spectres de bruits ayant la même valeur à fréquence nulle mais des composantes à hautes fréquences différentes. Droite : dans le plan (S, μ) solutions de l'équation (10) pour divers bruits. Les signaux intermittents sont ($\triangle$) et les signaux non-intermittents sont ($\circ$). L'insert représente la valeur la plus probable pour un spectre de bruit fixé. Les lignes continues sont les prédictions théoriques issues du développement de Van Kampen.

La plupart des travaux s'intéressant à des bruits colorés abordent le cas d'un bruit d'Orstein-Uhlenbeck donc un bruit dont le spectre est plat en dessous d'une fréquence caractéristique. Nos travaux précédents montrent que c'est le comportement du spectre pour des fréquences nulles qui est important lorsque la dynamique est contrôlée par l'évolution cohérente sur un temps long des fluctuations. Ce type de comportements cohérent du bruit à temps long et plus précisément, le fait que $\int^T \zeta(t') dt'$ soit de signe constant pour T grand est important dans de nombreux phénomènes physiques. Dans ce cas, c'est encore le spectre du bruit à fréquence nulle qui contrôle l'évolution du système. Nous avons mis cela en évidence pour le problème de sortie d'un puits de potentiel et pour celui de la résonance stochastique [41]. Dans ces deux problèmes, c'est le spectre à fréquence nulle qui régit l'évolution du système (lorsque le temps de la dynamique fluctuante et le temps de l'évolution cohérente sont bien séparés). A titre d'illustration, en fig. 18 est tracée la valeur de la moyenne du temps de sortie pour une particule de dynamique suramortie évoluant dans un potentiel. Nous résolvons donc numériquement $\dot{x} = -\partial_x V + \zeta(t)$ où $V(x) = -\cos(x)$ et ζ est un bruit dont nous pouvons faire varier le spectre comme représenté en fig. 17. T_e est défini comme le temps pris par la particule pour se déplacer de $x = 0$ à $x = \pm\pi$. Nos résultats montrent que ce n'est pas la déviation standard du bruit qui est importante mais son spectre à fréquence nulle.

Cette propriété peut être discutée dans le contexte des renversements du champ magnétique. Nous avons décrit en partie I-2, un mécanisme basé sur l'excitabilité près d'une bifurcation noeud-col. La durée entre renversements est déterminée par le temps de sortie du bassin d'attraction d'une solution stable. Il s'agit donc d'un problème de sortie de puits. Nous comprenons ainsi que ce ne sont pas les détails temporels des fluctuations turbulentes qui sont importants mais leur spectre à fréquence nulle.

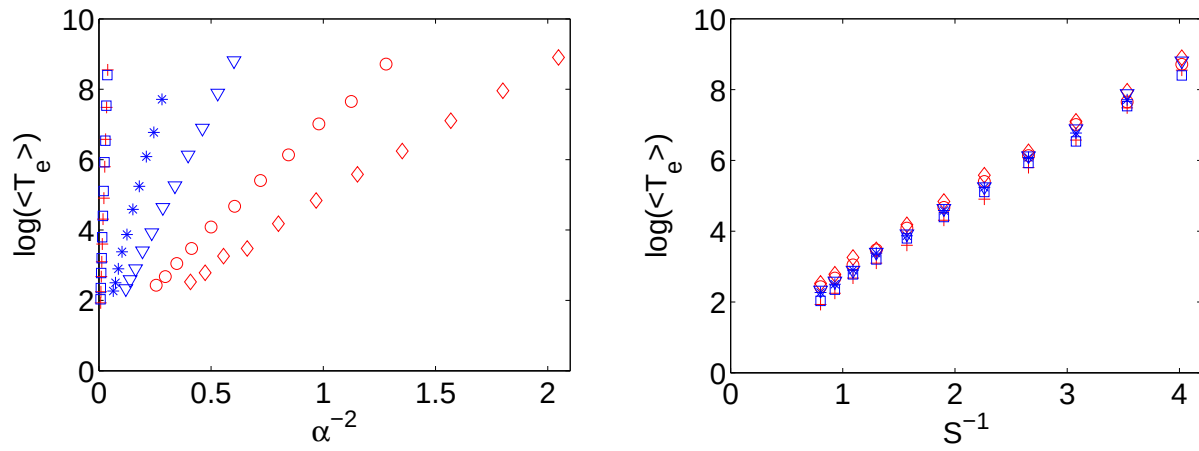


FIGURE 18 – Moyenne du temps de sortie d’un puits $\langle T_e \rangle$. Gauche : en fonction de l’inverse du carré de la déviation standard pour des bruits ayant différents spectres. Droite : en fonction de l’inverse du spectre à fréquence nulle.

4- Prédications concernant la modification d’instabilités sous l’effet d’un bruit multiplicatif

Avec S. Aumaître, nous avons étudié comment un bruit blanc multiplicatif modifie le comportement de différentes instabilités. Nous avons mis en évidence, avec deux exemples, que le bruit peut détruire des solutions stables du problème déterministe.

Dans le cas d’une bifurcation imparfaite, le bruit détruit la solution imparfaite et le régime d’intermittence on-off est réduit. Là encore cet effet peut expliquer pourquoi peu d’expériences, et notamment pas celles d’instabilité dynamo, ont observé l’intermittence on-off [42].

Avec S. Fauve, nous nous sommes intéressés à l’effet de certaines fluctuations turbulentes sur le seuil d’instabilité de l’effet dynamo. Dans le cas d’un écoulement cellulaire d’hélicité moyenne non nulle, l’écoulement engendre un champ magnétique par effet alpha. Nous avons considéré le cas d’un bruit de phase, c’est-à-dire d’un écoulement cellulaire qui n’est pas parfaitement périodique car la phase locale est bruitée. Il s’agit d’un modèle assez simple de fluctuations turbulentes et nous avons pu montrer que ces fluctuations de phase font toujours augmenter le seuil de l’instabilité dynamo. En raison de la complexité de ce type de problème, ce travail est l’un des très rares qui donnent un résultat de façon analytique [43].

5- Effet d’un bruit de phase sur une instabilité paramétrique

On appelle instabilité paramétrique une instabilité qui a lieu quand on module la fréquence propre d’un oscillateur. Nous nous sommes intéressés à l’effet d’un bruit de phase sur ce type d’instabilité. Plus précisément, une expérience a été développée dans laquelle une couche liquide est soumise à une vibration verticale. Si la vibration est périodique et d’amplitude suffisante, des vagues sous-harmoniques se forment à la surface du liquide, voir fig. 19. Elles sont de période double de la période d’excitation : c’est l’instabilité de Faraday. Dans ce travail, la vibration est sinusoïdale mais sa phase est bruitée. Le liquide utilisé est du mercure car l’amplitude des vagues peut être mesurée à l’aide d’un capteur de position à courants de Foucault. Nous avons mesuré à la fois les temps de croissance des vagues et leurs amplitudes à saturation. L’ajout d’un bruit de phase retarde dramatiquement le seuil d’instabilité. Au dessus du seuil d’instabilité l’amplitude des vagues sature à une valeur stationnaire. Cela se comprend si l’on considère que l’effet du bruit est de diminuer l’intensité de la vibration à la fréquence d’excitation. Un calcul d’équation d’amplitude montre que c’est la transformée de Fourier de l’accélération à la fréquence d’excitation qui contrôle l’instabilité, et ce pour ce qui concerne la croissance cinématique ainsi que la

saturation. Cela est très bien vérifié expérimentalement. Si le forçage est soumis à un bruit de fréquence, les effets sont différents : le seuil d'instabilité est aussi augmenté mais l'amplitude des vagues devient intermittente. En effet dans ce cas la phase du forçage explore pendant de longues durées des valeurs éloignées de la résonance paramétrique [44].

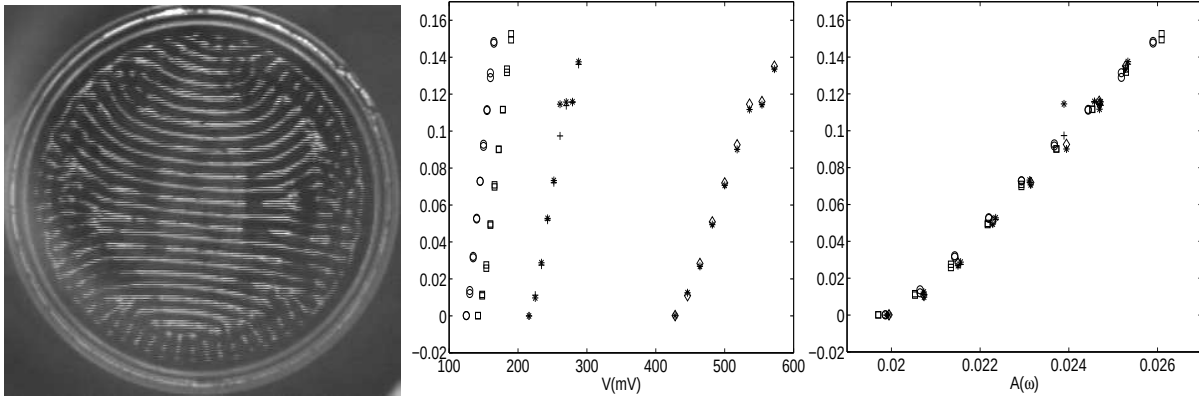


FIGURE 19 – Gauche : Vue de dessus d’une couche fluide vibrée verticalement. Des vagues sous harmoniques sont engendrées par instabilité de Faraday. Milieu : pour une vibration sinusoïdale avec bruit de phase, nous représentons les taux de croissance de l’instabilité de Faraday (en s^{-1}) en fonction de l’amplitude de la vibration. Les symboles correspondent à différentes amplitudes du bruit de phase. Les courbes s’ordonnent de gauche à droite en augmentant l’amplitude du bruit. Droite : taux de croissance en fonction de la composante de Fourier de l’accélération à fréquence d’excitation, A mesurée en g .

Perspectives

Comme mentionné précédemment, il est possible que le champ magnétique mesuré dans l’expérience VKS varie près du seuil comme une loi de puissance dont l’exposant n’est pas celui attendu si l’on néglige les fluctuations (le "champ moyen"). L’instabilité dynamo dans un écoulement turbulent serait donc un phénomène critique hors équilibre. Une autre observation est que la dynamique du champ n’est pas intermittente on-off alors que les fluctuations turbulentes sont importantes ce qui devrait favoriser ce type de dynamique.

La compréhension de ces phénomènes et la prédiction du comportement du champ près du seuil sont des problèmes ouverts. Les travaux actuels, dans le contexte MHD, sont basés sur l’étude de formes normales bruitées multiplicativement. Il s’agit donc d’une description avec un petit nombre de degrés de liberté pour le champ magnétique (souvent un seul degré de liberté est pris en compte : l’amplitude du mode instable). Augmenter le nombre de degrés de liberté est probablement nécessaire pour décrire correctement le comportement critique. Cela revient à prendre en compte les variations spatiales du champ et ainsi à augmenter la dimension spatiale du modèle considéré. Le problème devient donc celui de décrire l’effet d’un désordre spatial et temporel sur une instabilité. Une voie qui semble intéressante sera d’obtenir une caractérisation spectrale de l’effet du bruit. Lorsque la dimension d’espace est absente, nous avons montré que certains effets d’un bruit multiplicatif sont contrôlés par son spectre (temporel) à fréquence nulle. Dans le cas d’un bruit multiplicatif spatial et temporel, on peut se demander si un résultat similaire existe et si c’est le spectre spatial et temporel à fréquence et vecteur d’onde nuls qui contrôle l’effet du bruit. Si c’est le cas, cela donnerait un certain caractère "d’universalité" aux résultats puisque ceux-ci ne dépendraient pas du détail des propriétés statistiques des fluctuations mais seulement de leurs propriétés à grandes échelles spatiales et temporelles. Ce type d’approche pourra peut-être à long terme donner un éclairage nouveau à d’autres phénomènes critiques, en particulier ceux à l’équilibre.

Un autre problème potentiellement intéressant et peu étudié concerne les propriétés des taux de croissance et de décroissance près du seuil d’une instabilité en présence de bruit. Ces grandeurs deviennent

aléatoires et leur distribution est certainement une grandeur intéressante à étudier car elle pourrait donner des informations sur la proximité au seuil d'instabilité. De telles informations auraient un intérêt vis-à-vis des expériences de dynamos pour lesquelles la détermination du seuil d'instabilité est un problème plus que crucial (surtout tant qu'il n'a pas été franchi...).

III- Système de grains en interaction

Dans la plupart des expériences granulaires, les interactions entre grains sont des interactions de contact : soit lors de collisions pour les milieux peu denses soit par frottement dans les milieux plus denses. Il existe quelques situations où les grains interagissent même sans être au contact. Dans un fluide, un écoulement peut induire une interaction entre les grains. Il en va de même si les grains portent des charges électriques [45]. Nous avons développé plusieurs expériences qui étudient le comportement d'un ensemble de sphères ferromagnétiques qui interagissent quand elles sont placées dans un champ magnétique.

Ce système est intéressant à plusieurs titres.

Du point de vue des systèmes de particules, il s'agit du cas où elles interagissent via une interaction dipole-dipole d'amplitude réglable. En effet, chaque grain acquiert un moment magnétique proportionnel au champ magnétique appliqué et l'interaction entre grains est donc directement contrôlée par la valeur du champ magnétique appliqué.

Du point de vue des milieux granulaires, le champ sélectionne une direction et peut rendre ainsi anisotropes les propriétés du milieu.

Du point de vue des instabilités, on peut jouer sur l'amplitude des fluctuations en jouant sur la taille des grains. Pour une instabilité qui apparaît à longueur d'onde finie, les fluctuations relatives seront plus importantes si l'on augmente la taille des grains puisque le nombre de grains par unité de longueur est alors plus petit.

1- Instabilité de surface d'une couche de grains en interaction

Avec D. Lopez, nous avons étudié l'effet d'un champ magnétique vertical sur une couche dense de grains. Lorsque la couche est soumise à une vibration verticale, la surface subit une instabilité quand le champ appliqué est assez fort (voir figure 20) : des pics apparaissent qui grossissent puis s'organisent en réseau. Cette instabilité peut être vue comme l'analogue granulaire de l'instabilité de Rosensweig qui se produit à la surface d'un ferrofluide soumis à un champ magnétique. L'amplitude du mode instable augmente en suivant une loi de type champ moyen (proportionnellement à la racine carrée de l'écart au seuil) et est donc insensible aux fluctuations du système. Ce n'est pas le cas de l'organisation spatiale du réseau de pic qui n'apparaît pas au seuil d'instabilité mais à distance finie du seuil (voir fig. 21). Il semble donc que l'on observe un effet des fluctuations sur ce type d'instabilité : le retard à l'établissement de l'ordre spatial [46].

2- Instabilité de Hopf dans un écoulement turbulent

Avec B. Gallet, nous avons étudié le comportement d'un ensemble de grains en interaction plongés dans un écoulement turbulent. L'écoulement est engendré par une hélice qui brasse le fluide et permet d'atteindre des nombres de Reynolds élevés. La densité de billes est mesurée par une paire de bobines couplées. Les variations de la mutuelle entre les deux bobines, mesurées par détection synchrone, permettent de déterminer la densité de bille dans le plan de la bobine de mesure. Nous avons mis en évidence une instabilité qui fait s'aggréger périodiquement le gaz granulaire lorsque l'interaction entre grains est

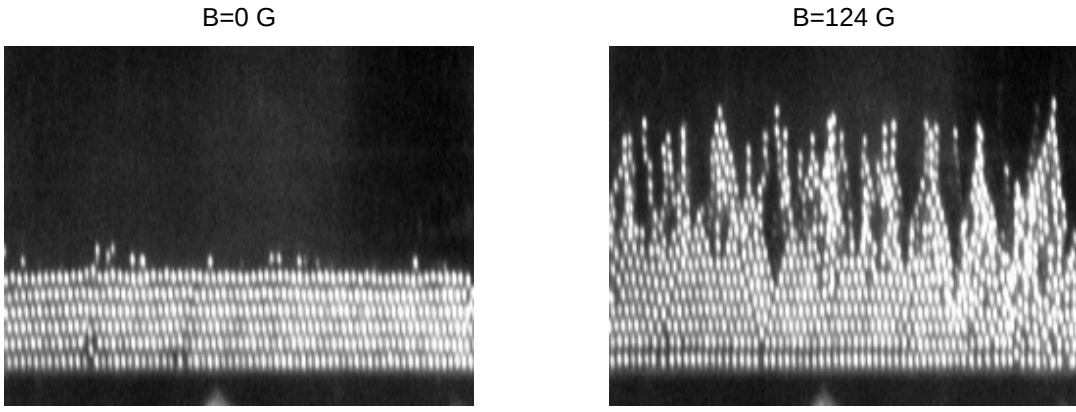


FIGURE 20 – Photos de la couche de grains soumis à un champ magnétique vertical pour une vibration verticale suffisante. A gauche, la surface est horizontale, à droite, l'instabilité déforme la surface et des pics apparaissent.

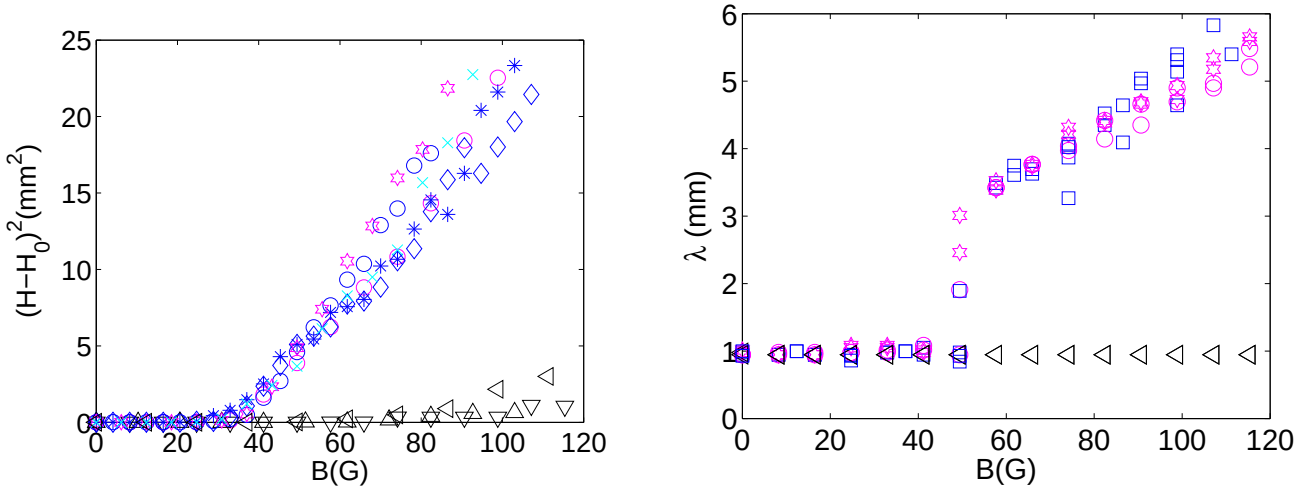


FIGURE 21 – Gauche : carré de l'amplitude des pics $(H - H_0)^2$ en fonction du champ magnétique B . Droite : longueur d'onde du réseau. La valeur 1 mm correspond à la distance entre grains et est obtenue dans le cas où la longueur d'onde du réseau de pics n'est pas déterminée. On note ainsi que la longueur d'onde du réseau n'est déterminée que pour des valeurs supérieures à 50 G tandis que le seuil d'apparition des pics est inférieur à 40 G . Les symboles correspondent à différentes épaisseurs, différentes fréquences de vibration et différentes amplitudes.

assez forte. Cette instabilité se traduit par une modulation périodique de la densité de billes. Il s'agit donc de la mise en évidence d'une bifurcation de Hopf dans un milieu turbulent. Nous avons étudié en détail les propriétés statistiques du signal obtenu dont un exemple est présenté en fig. 22. Nous avons mis en évidence, à l'aide de mesures situées à différentes positions, que malgré les fluctuations turbulentes un mode cohérent spatialement est engendré [47].

3- Effondrement d'un gaz de particules en interaction

Avec C. Laroche, nous avons étudié un milieu granulaire soumis à la vibration verticale d'un piston dans un tube cylindrique. Le piston injecte de l'énergie cinétique dans les grains et ceux-ci forment un

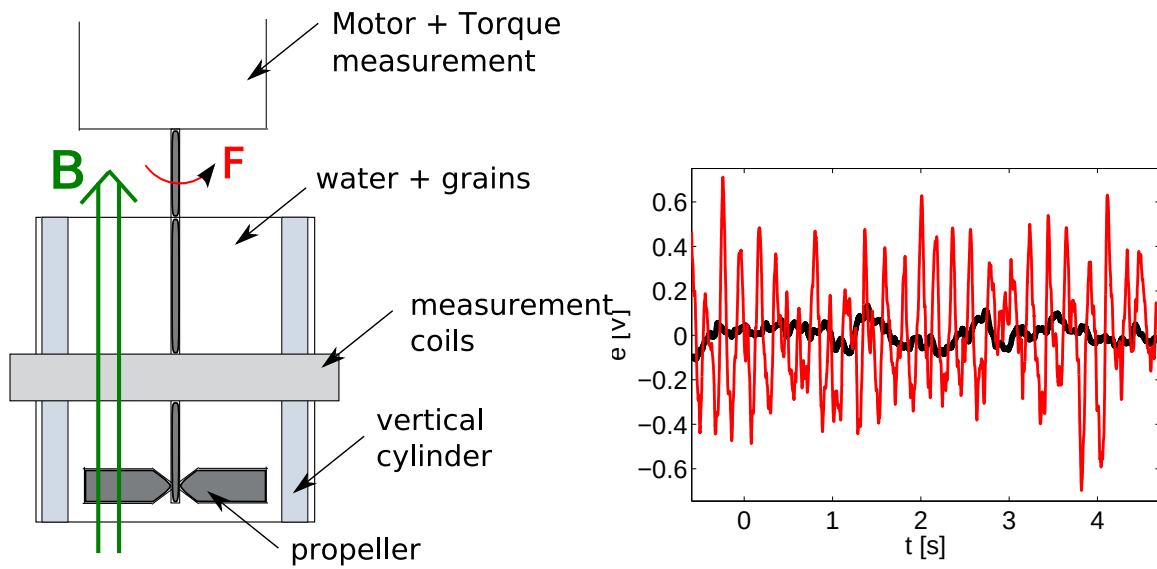


FIGURE 22 – Gauche : Schéma du montage expérimental. Un cylindre de rayon 96 mm et de hauteur 85 mm est rempli d’eau et d’un ensemble de billes de rayon 1 mm. Ces billes peuvent être aimantées par l’application d’un champ magnétique vertical. Le fluide est mis en mouvement par la rotation d’une hélice. Les fluctuations de la densité de billes dans un plan horizontal sont mesurées à l’aide de deux bobines couplées. Droite : Séries temporelles de la densité de billes mesurée dans le plan médian de l’expérience. A faible champ magnétique (en noir) la densité fluctue faiblement en raison du passage individuel des billes. A fort champ (en rouge) la densité présente une oscillation bruitée associée à une modulation périodique de densité. Notons le fort taux de fluctuations du signal causé par l’écoulement turbulent.

milieu peu dense semblable à un gaz, voir fig. 23 gauche. Certaines propriétés d’un tel gaz granulaire avait été étudiées [48] et une transition vers un milieu plus dense avait été mise en évidence pour des billes interagissant uniquement par collisions inélastiques. Nous avons étudié l’effet d’un champ magnétique sur le gaz constitué de billes magnétisables. Une transition vers un état dense est observé, voir fig. 23 droite. A l’aide d’un piston de position variable constituant le couvercle supérieur de l’expérience, nous avons pu déterminer l’équation d’état de ce système dissipatif de particules en interaction. Comme représenté en fig. 24, l’espace des paramètres est qualitativement similaire à celui d’un fluide usuel près du point critique de la transition liquide-gaz : à faible champ magnétique, on passe continument de la phase dense à la phase peu dense tandis que la transition est discontinue lorsque le champ est fort [49].

Perspectives

L’influence des interactions sur un milieu granulaire peut être testée dans plusieurs configurations. Quelques questions qui viennent à l’esprit sont les suivantes. Comment sont modifiées les instabilités granulaires usuelles ainsi que les écoulements de grains ? Dans un milieu dense, comment sont modifiés les réseaux des contacts et des forces ? Est ce que le transport d’une perturbation locale est affectée ? Plus généralement est ce que les propriétés globales du milieu (coefficients de transport, compacité, vitesse et atténuation du son) sont modifiées ?

Dans cet état d’esprit, nous étudions avec C. Laroche une couche dense de billes magnétiques soumises à un champ magnétique horizontal. Si l’interaction entre billes est grande, on s’attend à ce qu’une perturbation de la couche dirigée perpendiculairement au champ appliqué puisse se transmettre à la couche le long du champ. Le système permettrait ainsi à des ondes transverses de se propager. Il s’agirait en quelque sorte de l’analogue dans un milieu granulaire des ondes d’Alfvén existant dans un fluide conducteur de l’électricité. Comme le milieu est un granulaire, on étudiera l’influence du caractère corpusculaire (de la taille du grain) sur la propagation de ces ondes. La mesure de la relation de dispersion, de l’atténuation voire de la diffusion d’une onde sur des défauts permettra de caractériser ces ondes et de déterminer



FIGURE 23 – Photos de l'expérience quand le piston supérieur est absent. A gauche, la phase de basse densité apparaît pour un faible champ magnétique. A droite, pour un fort champ magnétique, une phase dense est formée.

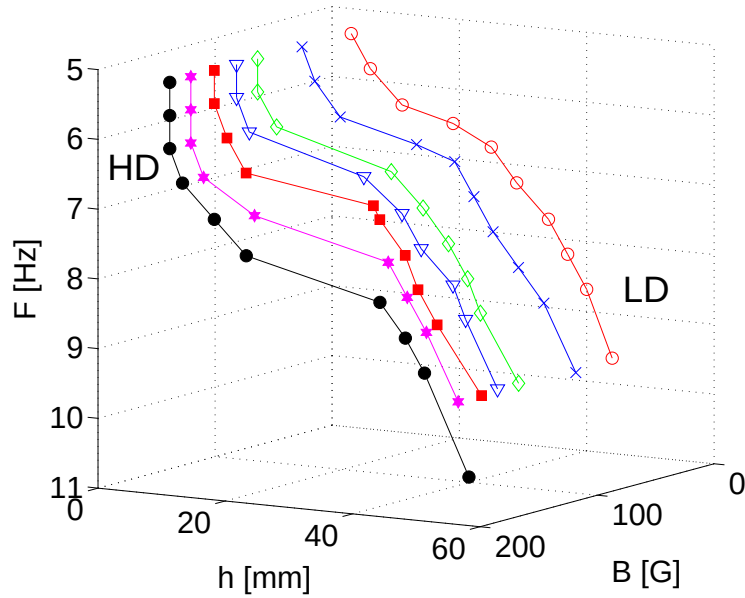


FIGURE 24 – Equation d'état dans l'espace des paramètres B, F, h (champ magnétique, fréquence de vibration du piston, hauteur du système). Le champ magnétique B vaut 0, 42, 80, 98, 117, 137 et 155 G. La transition entre la phase de basse densité (LD) et la phase de haute densité (HD) est continue à faible champ magnétique et devient discontinue lorsque le champ est plus fort.

les régimes où le milieu se comporte comme un milieu homogène et ceux où les fluctuations locales sont importantes.

Un autre projet consiste à étudier un ensemble linéaire de billes ferromagnétiques, en d'autres termes un polymère, dont les monomères sont des sphères susceptibles d'être aimantées. En appliquant un champ magnétique, on contrôle l'interaction entre les monomères. Quand le polymère est maintenu dans un plan et quand le champ magnétique est normal au plan, l'interaction est répulsive. On peut modéliser ce polymère comme une marche aléatoire qui, dans la limite de très forte répulsion entre monomères, devient

une marche aléatoire auto-évitante. Dans ce système macroscopique, les fluctuations peuvent être introduites en vibrant le système et donc en injectant de l'énergie par collisions avec le bord du système. Observe-t-on un changement de régime en fonction du champ magnétique lorsqu'on mesure la taille du polymère ? La dynamique est-elle modifiée ? Si oui, est-elle modifiée à l'échelle de quelques monomères ou y-a-t-il des effets à longue distance ? Comment cela est-il sensible à l'injection d'énergie et à la dissipation ?

IV- Propagation d'ondes en milieu complexe

Deux systèmes dans lesquels des ondes se propagent et interagissent avec l'environnement ont été considérés.

Il est bien connu qu'une onde se propageant dans un milieu inhomogène va être en partie diffusée. En hydrodynamique la diffusion d'ultrasons est utilisée par exemple pour mesurer la vorticité de l'écoulement [50]. Avec F. Lund, lors de deux visites à l'Université du Chili   Santiago, nous avons étudié l'influence d'un champ magnétique sur une onde acoustique se propageant dans un fluide conducteur de l'électricité. L'onde acoustique interagit avec le champ magnétique et crée des courants par induction. La force de Laplace qui en résulte met en mouvement le fluide. Ce mouvement émet des ondes acoustiques et nous sommes donc en présence d'un phénomène de diffusion d'une onde acoustique par un champ magnétique localisé. En première approximation de Born, nous avons calculé l'amplitude diffusée en fonction du vecteur de diffusion et déterminé le nombre sans dimension qui contrôle l'énergie diffusée. Nous avons montré la possibilité de réaliser ainsi une mesure non intrusive du champ magnétique [51].

Lors d'un séjour postdoctoral à l'Université de Californie   San Diego aux Etats-Unis, j'ai travaillé avec W.R. Young et S. Llewellyn Smith, sur la génération d'ondes internes par un écoulement de marée qui interagit avec la topographie sous-marine. Cette conversion de l'énergie de marée en ondes internes est une source importante de la perte d'énergie du système Terre-Lune et est en partie responsable de l'éloignement de la Lune. J'ai étudié l'effet de divers modèles de topographie sous-marine. Le problème de diffusion est transformé en un problème d'équation intégrale qu'on peut résoudre parfois analytiquement ou sinon numériquement. J'ai ainsi pu calculer l'énergie dissipée et mis en évidence l'existence de topographie non dissipatives pour lesquelles la puissance dissipée est nulle [52].

V- Bornes sur la dissipation d'énergie dans des écoulements turbulents

Dans un écoulement turbulent, on ne peut pas calculer le champ de vitesse de façon analytique et la prédiction de grandeurs caractéristiques du système est très difficile. Des tentatives ont été menées pour calculer des bornes sur la dissipation visqueuse à partir de l'équation de Navier-Stokes : dans certains cas, on peut montrer que la dissipation totale moyenn e en temps est inférieure à une valeur (la borne supérieure) qui dépend des paramètres du système. Ce type d'analyse est intéressant pour deux raisons : ce sont des résultats exacts qui concernent une grandeur cruciale puisque la dissipation d'énergie est égale en moyenne temporelle à la puissance injectée. L'autre raison est une conjecture : il semble que l'écoulement qui maximise la dissipation est proche de l'écoulement moyen tel qu'il est mesuré expérimentalement ou numériquement. L'existence possible d'un principe général permettant de calculer l'écoulement moyen est très attirante. Du point de vue technique, deux méthodes existent. La méthode dite de Malkus, Howard et Busse [54] cherche à maximiser la dissipation en utilisant une formulation variationnelle du problème et en y ajoutant des contraintes sur le type de champs considérés. Plus récemment, une méthode a été développée par Doering et Constantin [53], la "background method", qui permet de calculer plus facilement les bornes sur la dissipation.

Lors d'un séjour au Woods Hole Oceanographic Institute aux Etats-Unis, j'ai travaillé avec A. Alexakis, C. Doering et P. Morisson. Nous avons appliqué ces techniques à des écoulements MHD. Nous avons p 

obtenir une borne sur la dissipation totale d'énergie (Joule et visqueuse). Dans certains cas, les résultats ont pu être comparés à des mesures expérimentales existantes et les comportements asymptotiques à haut nombre de Reynolds sont similaires. Dans une autre configuration, nous avons pu montrer que la dissipation tend vers zéro quand les coefficients de diffusivité moléculaire s'annulent. En ce sens nous avons prouvé qu'il s'agit de systèmes non turbulents puisqu'ils n'assurent pas une dissipation d'énergie finie dans la limite de nombre de Reynolds infini [55, 56].

J'ai poursuivi ce type d'étude avec N. Pétrélis. Nous avons considéré un des modèles les plus simples pour lequel on puisse tester ces techniques de bornes. Nous avons ainsi adapté ces calculs au cas du modèle de Lorenz. Cela a plusieurs intérêts : on obtient des résultats exacts sur ce modèle et les étapes du calcul de la borne sont analytiquement bien contrôlées. En outre, on peut aisément simuler numériquement le système et comparer les solutions avec la prédiction obtenue par la borne. En fig. 25, la borne théorique et la dissipation mesurée dans la simulation numérique sont présentées. Cette figure montre qu'à haut nombre de Rayleigh (un des coefficients du système de Lorenz), la borne prédite pour la dissipation correspond à quelques pourcents près à ce qui est réalisé par la solution [57].

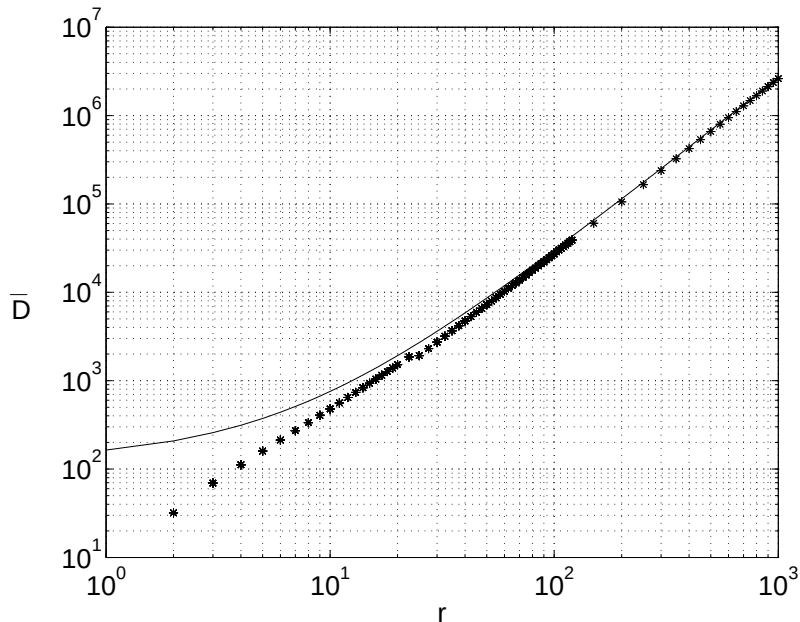


FIGURE 25 – (*) Dissipation moyenne pour les solutions du système de Lorenz. Le trait continu est la borne supérieure calculée analytiquement.

Perspectives

Certains problèmes connectés peuvent être envisagés. Dans le contexte de la MHD, plutôt que de trouver une borne sur la dissipation d'énergie totale, il serait intéressant de trouver des bornes séparées sur la dissipation Joule ou la dissipation visqueuse pour un écoulement engendrant une dynamo.

Par ailleurs, dans l'idée de ce qui a été fait sur le système de Lorenz, il semble intéressant de tester si ces techniques de bornes ont un pouvoir prédictif sur la structure spatiale du champ qui est effectivement engendré par le système turbulent. Une étape est de considérer un modèle en couches de turbulence hydrodynamique pour lequel la borne sur la dissipation pourrait être calculée et comparée à la solution numérique. Le champ qui réalise la borne est-il proche du champ moyen calculé numériquement ? Est-ce que ces champs sont plus proches si le nombre de couches est augmenté donc en augmentant le nombre de degrés de liberté du système ? En considérant un modèle en couche MHD, c'est-à-dire deux modèles en couche judicieusement couplés, une étape intermédiaire au calcul de bornes pour le problème MHD pourrait aussi être réalisée.

Références

- [1] C. Kittel *Physique de l'Etat Solide*, Dunod, Paris, 2005.
- [2] Stieglitz, R. and Müller, U., "Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo", *Phys. Fluids* **13**, 561-564 (2001).
- [3] Gaillitis, A., Lielausis, O., Platacis, E., Dement'ev, S., Cifersons, A., Gerbeth, G., Gundrum, T., Stefani, F., Christen M. and Will, G., "Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment", *Physical Review Letters* **86**, 3024-3027 (2001).
- [4] S. Fauve et F. Pétrélis, "The dynamo effect", dans "Peyresq Lectures on Nonlinear Phenomena, Vol. II", Ed. J-A Sepulchre, pp. 1-64, World Scientific (2003).
- [5] Monchaux R., Berhanu M., Bourgoin M., Moulin M., Odier Ph ., Pinton J. -F., Volk R., Fauve S., Mordant N., Pétrélis F, Chiffaudel A. , Daviaud F., Dubrulle B., Gasquet C., Marie L., Ravelet F., "Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium" *Physical Review Letters* 98 (4) 044502 (2007).
- [6] Berhanu M, Monchaux R, Fauve S, Mordant N, Pétrélis F, Chiffaudel A, Daviaud F, Dubrulle B, Marié L, Ravelet F, Bourgoin M, Odier P, Pinton JF, Volk R, "Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo", *Europhysics Letters* 77, 59001 (2007).
- [7] Ravelet F, Berhanu M, Monchaux R, Aumaitre S, Chiffaudel A, Daviaud F, Dubrulle B, Bourgoin M, Odier P, Pinton J-F, Volk R, Fauve S, Mordant N, Pétrélis F, "Chaotic dynamos generated by a turbulent flow of sodium liquid", *Physical Review Letters* 101, 074502 (2008)
- [8] Guckenheimer J. et Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1986.
- [9] Berhanu M., Gallet B., Monchaux R., Bourgoin M., Odier Ph ., Pinton J. -F., Plihon N., Volk R., Fauve S., Mordant N., Pétrélis F, Aumaitre S., Chiffaudel A. , Daviaud F., Dubrulle B., "Bistability between a stationary and an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium", *Journal of Fluid Mechanics* (641), 217-226 (2009).
- [10] Volk R, Ravelet F, Monchaux R, Berhanu M, Chiffaudel A, Daviaud F, Odier P, Pinton JF, Fauve S, Mordant N, Pétrélis F, "Transport of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium", *Physical Review Letters* 97 (7) 074501 (2006).
- [11] Pétrélis F, Mordant N, Fauve S., "On the magnetic field generated by experimental dynamos", *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 101 :3, 289-323 (2007).
- [12] Pétrélis F, Fauve S, "Saturation of the magnetic field above the dynamo threshold", *European Physical Journal B* 22 (3), 273-276 (2001).
- [13] S. Fauve et F. Pétrélis, "Saturation of the dynamo instability" dans "Mathematical Aspects of Natural Dynamos", Ed. E. Dormy et A. Soward, pp 59-79, CRC Press (2007).
- [14] Fauve S, Pétrélis F, "Scaling laws of turbulent dynamos", *Comptes Rendus de Physique* 8, 87-92 (2007).
- [15] Arnold V., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982.
- [16] N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [17] Monchaux R, Berhanu M., Aumaitre S, Chiffaudel A, Daviaud F, Dubrulle B, Fauve S, Mordant N, Pétrélis F Bourgoin M, Odier P, Pinton J-F, Volk R., "The VKS experiment : Turbulent Dynamical Dynamos", *Physics of Fluids* (21), 035108 (2009).
- [18] Aumaitre S, Berhanu M, Bourgoin M, Chiffaudel A, Daviaud F, Dubrulle B, Fauve S, Marie L, Monchaux R, Mordant N, Odier P, Pétrélis F, Pinton JF, Plihon N, Ravelet F, Volk R, *Comptes Rendus de Physique* 9, 689-701 (2008)
- [19] J.-P. Valet, L. Meynadier and Y. Guyodo, "Geomagnetic field strength and reversal rate over the past 2 Million years", *Nature* **435**, 802 (2005).

- [20] Pétrélis F et Fauve S, "Chaotic dynamics of the magnetic field generated by dynamo action in a turbulent flow", J. Phys. : Condens. Matter (20) 494203 (2008).
- [21] Gallet B et Pétrélis F, "From Reversing to Hemispherical Dynamos", Physical Review E (80) 035302 (2009).
- [22] R. Labbé, J.-F. Pinton et S. Fauve, "Study of the von Kármán flow between coaxial corotating disks", Physics of Fluids 8, 914 (1996). F. Ravelet, L. Marié, A. Chiffaudel et F. Daviaud, "Multistability and Memory Effect in a Highly Turbulent Flow : Experimental Evidence for a Global Bifurcation", Physical Review Letters (93) 164501 (2004).
- [23] M. Berhanu, G. Verhille, J. Boisson, B. Gallet, C. Gissinger, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, M. Bourgoin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, and C. Pirat, "Dynamo regimes and transitions in the VKS experiment" accepté à European Physical Journal B (2010).
- [24] C. Gissinger, "Dipole-quadrupole dynamics during magnetic field reversals", Physical Review E (82), 056302 (2010).
- [25] C. Gissinger, A. Iskakov, S. Fauve et E. Dormy, "Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows", EPL (82), 29001 (2008).
- [26] F. H. Busse et J. Wicht, "A simple dynamo caused by conductivity variations", Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics (64), 135-144 (1991).
- [27] J. Sommeria, "Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box", J. Fluid Mech. (170), 139-169 (1986).
- [28] A. P. Kazantsev, "Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid", Sov. Phys. JETP 26, 1031 (1968).
- [29] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1998.
- [30] K. Mallick et P. Marcq, "Stability analysis of a noise-induced Hopf bifurcation", European Physical Journal B, 36, 119–128 (2003). Leprovost N, Aumaitre S, Mallick K, "Stability of a nonlinear oscillator with random damping", European Physical Journal B, 49, 453-458 (2006).
- [31] Alexakis A, Pétrélis F, "Planar bifurcation subject to multiplicative noise : Role of symmetry" Physical Review E (80) 041134 (2009).
- [32] M. Lucke et F. Schank, "Response to Parametric Modulation near an Instability", Physical Review Letters (54), 1465 (1985).
- [33] Pétrélis F, Aumaître S, "Intermittency at the edge of stochastically inhibited pattern-forming instability", European Physical Journal B, 34 (3) 281-284 (2003).
- [34] H. Fujisaka et T. Yamada, "A new intermittency in coupled dynamical systems", Prog. Theor. Phys. (74) 918-921 (1985). T. Yamada et H. Fujisaka, "Intermittency caused by chaotic modulation. I", Prog. Theor. Phys. (76) 582-591 (1986).
- [35] Platt N., Spiegel E. et Tresser C., "On-off intermittency : a mechanism for bursting", Physical Review Letters (70) 279 (1993).
- [36] J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel, "Characterization of on-off intermittency", Physical Review E (49), 1140 (1994).
- [37] P. Manneville, "Intermittency, self-similarity and $1/f$ spectrum in dissipative dynamical systems", J. Physique (41) 1235-1243 (1980).
- [38] N.G. van Kampen, Physics Reports **24** (3), 173-228 (1976).
- [39] S. Aumaître, F. Pétrélis and K. Mallick, "Low-frequency noise controls on-off intermittency of bifurcating systems", Physical Review Letters **95**, 064101 (2005).
- [40] S. Aumaître, K. Mallick and F. Pétrélis, "Effects of the low frequencies of noise on on-off intermittency", J. Stat. Phys. **123** (4), 909-927 (2006).

- [41] Pétrélis F, Aumaitre S, Mallick K, "Escape from a potential well, stochastic resonance and zero frequency component of the noise", Europhysics Letters 79, 40004 (2007).
- [42] Pétrélis F, Aumaitre S, "Modification of instability processes by multiplicative noises", European Physical Journal B 51 (3) 357-362 (2006).
- [43] Pétrélis F, Fauve S, "Inhibition of dynamo action by phase fluctuations", Europhysics Letters 76 (4), 602-608 (2006).
- [44] Pétrélis F, Aumaitre S, Fauve S, "Effect of phase noise on parametric instabilities", Physical Review Letters 94 (7) 070603 (2005).
- [45] M. Saint Jean, C. Even, and C. Guthmann, "Macroscopic 2D Wigner islands", Europhysics Letters 55, 45 (2001).
- [46] Lopez D, Pétrélis F, "Surface instability driven by dipole-dipole interactions in a granular layer", Physical Review Letters, (104) 158001 (2010).
- [47] Gallet B et Pétrélis F, "Oscillatory instability of interacting grains in a turbulent flow", Europhysics Letters (87) 54004(2009).
- [48] E. Falcon, S. Fauve, C. Laroche, "Cluster formation, pressure and density measurements in a granular medium fluidized by vibrations", European Physical Journal B, 9, 183 (1999). Falcon E, Wunenburger R, Evesque P, Fauve S, Chabot C, Garrabos Y, Beysens D, "Cluster formation in a granular medium fluidized by vibrations in low gravity", Physical Review Letters, (83), 440 (1999).
- [49] C. Laroche, F. Pétrélis, "Observation of the condensation of a gas of interacting grains", accepté à European Physical Journal B (2010).
- [50] F. Lund et C. Rojas, "Ultrasound as a probe of turbulence", Physica D, (27), 508-514 (1991).
- [51] Pétrélis F, Lund F, "On the scattering of sound by a magnetic field in a MHD fluid", European Physical Journal B 35 (3) 291-294 (2003).
- [52] Pétrélis F, Llewellyn Smith SL, Young WR, "Tidal conversion at a submarine ridge", Journal of Physical Oceanography 36 (6) 1053-1071 (2006).
- [53] C. R. Doering and P. Constantin, Phys. Rev. E **49**, 4087-4099 (1994), Physical Review E **53**, 5957-5981 (1996). P. Constantin and C. R. Doering Physical Review E **51**, 3192-3198 (1995).
- [54] W. V. R. Malkus, Proc. Roy. Soc. London A **225**, 196-212 (1954). L. N. Howard, J. Fluid Mech. **17**, 405 (1963). F. H. Busse, J. Fluid Mech. **41**, 219 (1970).
- [55] Alexakis A, Pétrélis F, Morrison PJ, Doering CR, "Bounds on dissipation in magnetohydrodynamic Couette and Hartmann shear flows", Physics of Plasmas 10 (11) 4324-4334 (2003).
- [56] Pétrélis F, Alexakis A, Doering CR, Morrison PJ, "Bounds in the dissipation in magnetohydrodynamic problem in plane shear geometry", Physics of Plasmas 10 (11) 4314-4323 (2003).
- [57] Pétrélis F, Pétrélis N, "Bounds on the dissipation in the Lorenz system ", Physics Letters A 326 (1-2) 85-92 (2004).