PHY 563 : Petites classes 3 et 4

TRANSITION RUGUEUSE

1) question préliminaire : rappel sur l'intégrale gaussienne
soit M_{ij} une matrice $N \times N$ symétrique strictement positive, montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dh_i \ \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} h_i M_{ij} h_j + \sum_i h_i g_i\right) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det M}} \ \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j} g_i (M^{-1})_{ij} g_j\right)$$

2) On étudie la physique d'une surface soumise à des fluctuations thermiques avec le hamiltonien :

$$H = \int d^D x \ \left[\frac{\gamma}{2}(\nabla h(x))^2 - V\cos(\frac{2\pi}{a}h(x))\right],$$

où a est une longueur microscopique et $V, \gamma > 0$. On utilise une méthode variationnelle qui consiste à approcher le hamiltonien H par un hamiltonien libre H_0. On note $\langle \ldots \rangle$ les valeurs moyennes avec le poids de Boltzmann associé à H et $\langle \ldots \rangle_0$ les valeurs moyennes avec le poids de Boltzmann associé à H_0. Montrer que :

$$Z = Z_0 \langle \mathrm{e}^{-\beta(H-H_0)} \rangle_0.$$

En déduire que, quel que soit H_0, on a :

$$F = -kT \log Z \leq F_{var} = \langle H - H_0 \rangle_0 - kT \log Z_0$$

3) On choisit un Hamiltonien d'essai libre :

$$H_0 = \frac{1}{2}\int d^D x \int d^D y \, h(x) \, G^{-1}(x,y) \, h(y),$$

où G est une fonction d'essai. Calculer F_{var} et minimiser par rapport à la fonction G. Montrer l'existence de deux phases thermodynamiques.