Théorie Statistique des Champs

Corrigé succinct de l'examen du 28 mars 2008

1a. Soit $\Delta h = h - i\,H_B$. Alors $dm(T,h)/dh \simeq (\Delta h)^{1/\delta-1}$ d'après (5). Puis $dm/dh = \beta \int dr G(r)$ (fluctuation-dissipation) donc, en utilisant (7) puis (6), $dm/dh \simeq \xi^{(2-\eta)} \simeq (\Delta h)^{-\nu(2-\eta)}$.

1b. On pose $m_B = m(T, i\,H_B)$. On a, en valeur moyenne, $\langle \Delta M \rangle = (\Delta h)^{1/\delta - \nu\, d}$. Puis $\langle (\Delta M)^2 \rangle = \xi^d \times \left(\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 + (\langle m \rangle - \langle m_B \rangle)^2 \right)$ et $\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \simeq \int^\xi dr\, r^{d-1} G(r) = \xi^{2-\eta}$ donc $\langle (\Delta M)^2 \rangle - \langle \Delta M \rangle^2 \simeq (\Delta h)^{-\nu(d+2-\eta)}$. On trouve la relation (9), qui ne peut être valide qu'en dimension inférieure à la dimension critique supérieure. Lorsque les exposants de champ moyen sont exacts, on a bien sûr $\langle (\Delta M)^2 \rangle \leq \langle \Delta M \rangle^2$.

1c. On écrit

$$Z_N(T,h) = \sum_{k=0,1,2,\ldots,N} e^{\beta h(N-2k)}\, Z_{N,k}(T) \tag{1}$$

où $Z_{N,k}(T)$ est la fonction de partition du modèle d'Ising en champ $h = 0$ et ayant k spins égaux à -1 et $N-k$ égaux à $+1$. Donc $Z_N(T,h) \times e^{-N\beta h}$ est un polynôme en $z = e^{-2\beta h}$ de degré N. On en déduit (10) avec un facteur multiplicatif $C(T) = Z_{N,N}(T)$ indépendant de h. Puis

$$m(T,h) = \frac{T}{N}\frac{d \ln Z_N}{dh} = 1 - \frac{2}{N}\sum_j \frac{e^{-2\beta h}}{e^{-2\beta h} - e^{-2\beta i H_j}} = \frac{1}{N}\sum_j \frac{1}{\tanh[\beta(h - iH_j)]} \tag{2}$$

et on passe à la limite $N \to \infty$ en introduisant la densité de zéros pour obtenir (11). Pour obtenir (12), on pose $h = iH_B + \Delta h, H = y \times \Delta h$:

$$\frac{1}{\tanh[\beta(h - iH)]} - \frac{1}{\tanh[\beta(iH_B - iH)]} = \frac{T}{\Delta h}\frac{y - i}{y(1+y^2)} + O(\Delta h) \tag{3}$$

Le terme imaginaire dans l'expression ci-dessus donne une contribution nulle par parité de la distribution ρ. Finalement on trouve

$$\Delta m \simeq (\Delta h)^\sigma \times \int_o^\infty dy\, \frac{2T\, y^\sigma}{y^2+1}\ . \tag{4}$$

L'intégrale définissant la constante multiplicative converge si σ est dans l'intervalle $]-1;1[$.

1d. on a $\sigma = 1/\delta$ à partir de 1c. Les formules (13) et (14) se trouvent immédiatement à partir de (8) et (9).

2a. Nous avons vu en PC4 que la fonction de partition est égale à la trace de M à la puissance N (nombre de spins) où M est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x/y & 1/x \\ 1/x & x\,y \end{pmatrix} \tag{5}$$

et que les valeurs propres de cette matrice sont λ_+ et λ_-.

2b. $Z_N = 0$ est équivalent à $\lambda_+ = \lambda_- \times e^{i\phi_j}$, pour $j = 1, 2, \ldots, N$. On pose $A = x(y + \frac{1}{y})$, $B =$ la racine carrée dans l'expression des valeurs propres. Alors $(A+B)/(A-B) = e^{i\phi_j}$ c'est-à-dire $B^2 = A^2 \times (1 - e^{i\phi_j})/(1 + e^{i\phi_j})^2$, ou encore $B^2 + A^2 \tan(\phi_j/2)^2 = 0$. D'où (18).

2c. Pour $N \to \infty$ ϕ_j varie entre 0 et 2π. Pour $\phi \to \pi$, $\tanh(\phi/2) \to \infty$ donc $y + \frac{1}{y} \to 0$ et $h \to \frac{i\pi T}{2}$. Pour $\phi \to 0$ (ou 2π) on obtient $y - \frac{1}{y} = \pm \frac{2i}{x^2}$ d'où la formule (19).

2d. On considère ϕ petit et $y = y_B(1 + \epsilon)$ avec ϵ petit. En développant (18) on trouve $(y_B - \frac{1}{y_B})\epsilon = \frac{1}{2}(y_B + \frac{1}{y_B})\phi^2$ à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire $\epsilon = -\frac{i}{2}\phi^2 / \tanh \beta H_B$. Puis on a $\epsilon = -i\beta(H - H_B)$ à l'ordre le plus bas. Donc $H - H_B = C\,\phi^2$ où C est une constante positive. Or ϕ est uniformément distribué sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ avec la mesure $p(\phi) = \frac{1}{2\pi}$. La densité de zéros satisfait $\rho(H)\,dH = p(\phi)\,d\phi$, donc $\rho(H)$ est proportionnelle à $d\phi/dH \sim (H - H_B)^{1/2}$.

2e. On peut calculer $\eta = -1$ d'après (13) puis $\nu = \frac{1}{2}$ d'après (14). On peut aussi faire le calcul direct en utilisant la relation vue en PC4 :

$$\exp(-1/\xi) = \lambda_-/\lambda_+ = \frac{A - B}{A + B} = \frac{1 - i\tan(\phi/2)}{1 + i\tan(\phi/2)} \ . \tag{6}$$

Pour $\phi \to 0$ on trouve que ξ diverge comme $1/\phi$ donc $\nu = \frac{1}{2}$ en utilisant la relation entre ϕ et $H - H_B$.

3a. On écrit $E = -\sum_a S_a h_a^{tot}$ où le champ total s'exerçant sur le spin a vaut

$$h_a^{tot} = h_a + J \sum_b \Delta_{ab} S_b \ . \tag{7}$$

L'approximation de champ moyen consiste à remplacer ce champ total par sa valeur moyenne. Les spins sont alors indépendants et on a $\langle S_a \rangle = \tanh(\beta \langle h_a^{tot} \rangle)$ et donc (24). Pour calculer la susceptibilité on dérive (24) par rapport à h_b pour trouver que la matrice $\chi_{ab} = dm_a/dh_b$ est l'inverse de la matrice $(\frac{T}{1-m^2} Id - J\Delta)_{ab}$. Puis $dm/dh = \sum_b \chi_{ab} = \tilde{\chi}(0)$ permet de trouver (25). La température critique s'obtient lorsque la susceptibilité en champ nul diverge et vaut donc $T_c = J\tilde{\Delta}(0)$.

3b. (26) est obtenue immédiatement à partir de (24) et de la définition de m_B. Pour obtenir (27) on utilise le fait que m n'est pas dérivable en $h = iH_B$ donc la susceptibilité (25) doit diverger. On pose ensuite $t = T/T_c - 1 \ll 1$, alors $m_B^2 = -t$ d'après (27). Puis on développe (26) au premier ordre en H_B et au troisième ordre en m_B pour trouver $i\,H_B = \frac{4}{3} m_B\, t$ donc $\Omega = \frac{3}{2}$.

3c. Pour calculer δ on part de $m = \tanh(\frac{T_c}{T} m + h)$ et on développe avec $\Delta m = m - M_B$ et $\Delta h = h - iH_B$ petits. On trouve $\Delta h = m_B(\frac{T_c}{T}\Delta m + \Delta h)^2$ et donc $\Delta m \simeq (\Delta h)^{1/2}$. D'où $\delta = 2$.

D'après le corrigé de la question 3a, pour k petit, $\tilde{G}(k) \propto \frac{1}{\tilde{\chi}(k)} = k^2 + \xi^{-2}$ avec $\xi^{-2} \propto \frac{T}{1-m^2} - J\tilde{\Delta}(0) \simeq 2T_c \frac{m_B}{1-m_B^2} \Delta m \simeq (\Delta h)^{1/2}$. Donc $\nu = \frac{1}{4}$.

3d. On cherche la dimension d telle que (13) et (14) sont vraies avec les exposants en champ moyen. On trouve $\eta = 0$ comme attendu en champ moyen et $d = 6$. Donc on s'attend à ce que les exposants aient des valeurs différentes de celles du champ moyen en dimension inférieure à 6.

4a. Soit $F(m) = \frac{t}{2}m^2 + \frac{a}{4}m^4 - hm$ (avec $a > 0$) l'énergie libre de Landau (on peut aussi partir de l'expression de F en champ moyen). Le point critique de Lee et Yang correspond à $F'(m_B) = F''(m_B) = 0$. La théorie des champs associée est donnée par le hamiltonien des fluctuations autour du champ moyen, $H[\{\varphi(x)\}] = \int dx[(\nabla\varphi)^2 + F(m_B + \varphi(x))]$. On trouve (28) en développant F avec $g = \frac{1}{6}F'''(m_B) = ia\sqrt{t}$ imaginaire pur. Dès que $t > 0$, g est non nul est la constante de couplage, par le flot du groupe de renormalisation, évoluera vers le point fixe $g^* \neq 0$ indépendant de t. En revanche, si $t = 0$, il faut développer F au quatrième ordre et on retombe sur la théorie en φ^4 habituelle pour la transition para-ferro avec des exposants différents (en particulier δ) de ceux associés au point critique de Lee et Yang.

4b. Voir la figure 1 de l'article de M. Fisher, Physical Review Letters, volume 40, page 1610 (1978).

5a. On a

$$m(T,h) = \int_0^\infty dH\ \rho(H) \left\{ \frac{1}{\tanh[\beta\,(h - i\,H)]} + \frac{1}{\tanh[\beta\,(h + i\,H)]} \right\} . \qquad (8)$$

Lorsque $h \to 0$ on voit que l'argument entre $\{\ldots\}$ est nul, donc la seule contribution à l'intégrale provient du voisinage de $H = 0$. On peut alors linéariser la tangeante pour trouver

$$m_s = \lim_{h\to 0} \int_0^\infty dH\ \rho(H) \left\{ \frac{T}{h - i\,H} + \frac{T}{h + i\,H} \right\} = \lim_{h\to 0} \int_0^\infty dH\ \rho(H)\ \frac{2T\,h}{h^2 + H^2} . \qquad (9)$$

En faisant le changement de variable $H = h\,u$, on a

$$m(T,0) = \lim_{h\to 0} \int_0^\infty du\ \rho(h\,u) \frac{2T}{u^2+1} = \rho(0) \int_0^\infty du \frac{2T}{u^2+1} = \rho(0) \times T\,\pi\ . \qquad (10)$$