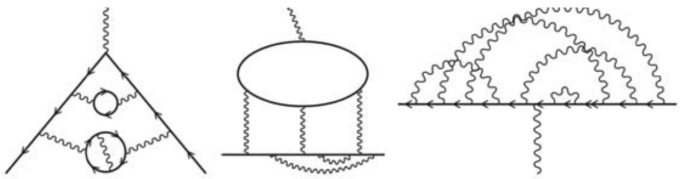
Peut-on faire des prédictions physiques précises à partir d'une série qui diverge fortement?

Félix Werner (LKB) et Kris Van Houcke (LPS)

Considérons la série $1-z+z^2-z^3+...$ Comme on l'apprend au lycée, elle vaut $1/(1+z)$, à condition que z soit assez petit, $|z|<1$. Lorsque $|z|>1$, cette série diverge: par exemple, pour $z=2$ on obtient la série $1-2+4-8+16-...$, qui semble à première vue n'avoir aucun sens, mais en réalité il est toujours possible d'obtenir le résultat $1/(1+z)$ en appliquant une méthode de resommation - par exemple la méthode introduite par Lindelöf en 1903, qui évalue la série divergente $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ par l'expression convergente $\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n e^{-\epsilon n \ln n}$.

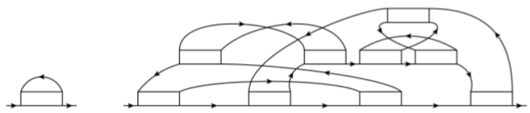
Les diagrammes de Feynman permettent de représenter et manipuler certaines quantités mathématiques de façon plus compacte et lisible qu'en utilisant des équations. Par exemple, la valeur du moment magnétique de l'électron est calculée à partir de diagrammes tels que



Lignes ondulées: photons, lignes normales: électrons ou positrons.

La somme des diagrammes d'ordre n (c'est-à-dire avec n vertex) vaut $a_n\,\alpha^n$, où $\alpha\approx 1/137$ est la constante de structure fine. La série $\sum_n a_n\alpha^n$ diverge, car a_n croît plus vite qu'exponentiellement avec n (cela découle d'un célèbre argument heuristique de Dyson sur l'instabilité du vide pour $\alpha<0$ [1], confirmé par la conjecture $|a_n|\sim(n/2)!$ de Balian-Itzykson-Zuber-Parisi [2]). Néanmoins cette divergence est un problème purement académique tant que l'on n'atteint pas des ordres n très élevés, compte tenu de la faible valeur de α: la série se comporte en pratique comme une série convergente, le résultat coïncidant avec l'expérience à 12 chiffres significatifs, la valeur de α étant tirée des mesures de l'équipe de F. Biraben au LKB [3,4].

Mais dans beaucoup d'autres situations en physique, il n'y a pas de petit paramètre de développement: on est confronté à une série diagrammatique $\sum_n a_n$ avec a_n augmentant dès les premières valeurs de n. Il est alors vital de resommer cette série divergente. C'est ce que nous avons fait pour la première fois pour un système de fermions interagissant fortement entre eux et se déplaçant dans l'espace continu (et non pas sur un réseau discret). Le modèle étudié, appelé "gaz de Fermi unitaire", décrit précisément les gaz d'atomes ultrafroids étudiés expérimentalement notamment au LKB et au MIT. Il décrit également qualitativement les neutrons dans la croûte des étoiles à neutrons, et est aussi pertinent en physique des solides dans le contexte de la supraconductivité à haute temprature critique. Les diagrammes de Feynman sont dans ce cas



Lignes: fermions, rectangles: paires de fermions (ces paires sont des bosons).

Un premier résultat central obtenu par Riccardo Rossi pendant son doctorat est que $|a_n|\sim(n/5)!$. Pour une divergence aussi forte, on ne peut pas appliquer les méthodes de resommation simples comme celle de Lindelöf, et il n'était même pas clair a priori que la série puisse être resommée de façon unique. R. Rossi a pu montrer que cela est bien le cas, en s'appuyant notamment sur un théorème publié en 1919. La rigueur mathématique de ce nouveau travail va au delà de l'article déjà mentionné de Balian et collaborateurs, mais comme souvent en physique, certaines étapes ne sont toujours pas démontrées mathématiquement, ce qui renforce l'intérêt des confrontations précises avec les expériences. Pour l'équation d'état (la relation entre pression, température et densité) les résultats calculés sont en accord avec les mesures existantes [5]. Le calcul d'une autre quantité, liée à la probabilité d'avoir deux fermions très proches, a également été publiée dans un second article [6], et est actuellement confrontée à des mesures expérimentales en cours. A plus long terme la méthode pourrait s'appliquer à d'autres systèmes: gaz unitaire superfluide, neutrons, ou électrons.

<u>Références</u>:

[1] F. Dyson, *Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics*, Physical Review **85**, 631 (1952).

[2] R. Balian, C. Itzykson, J.-B. Zuber, and G. Parisi, *Asymptotic estimates in quantum electrodynamics. II*, Phys. Rev. D **17**, 1041 (1978).

[3] G. Gabrielse, *The standard model's greatest triumph*, Physics Today, December 2013, p. 64.

[4] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, and F. Biraben, *New Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics*, Physical Review Letters **106**, 080801 (2011).

[5] R. Rossi, T. Ohgoe, K. Van Houcke, F. Werner, *Resummation of diagrammatic series with zero convergence radius for strongly correlated fermions*, Physical Review Letters **121**, 130405 (2018) [prépublication]

[6] R. Rossi, T. Ohgoe, E. Kozik, N. Prokof'ev, B. Svistunov, K. Van Houcke, F. Werner, *Contact and Momentum Distribution of the Unitary Fermi Gas*, Physical Review Letters **121**, 130406 (2018) [prépublication]