Problèmes quantiques

Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard

Table des matières

Ava	ant-propos	5
Co	nstantes physiques	7
Aic	de-mémoire	9
Α.	Particules élémentaires, noyaux et atomes 2	21
1	Oscillations des neutrinos	23
2	Interférométrie de neutrons	35
3	Anomalie de moment magnétique de l'électron	43
4	Désintégration d'un atome de tritium	47
5	Les horloges atomiques	51
6	L'atome d'hélium et la molécule He_2	59
В.	Intrication quantique et mesure 6	55
7	Paradoxe EPR et inégalité de Bell	67
8	Le chat de Schrödinger	77
9	La cryptographie quantique	89
10	La gomme quantique	99
11	Mesure quantique idéale	11
12	Un thermomètre quantique	17
C.	Systèmes complexes 13	31
13	Le problème à trois corps	33

14 Étude d'un condensat de Bose-Einstein	141
15 lons moléculaires colorés	151
16 Etude d'une boîte quantique	157
17 La manipulation d'atomes par laser	173
18 Excitons magnétiques	183
19 Preuve de la quantification du champ	193

Avant-propos

La mécanique quantique est une source inépuisable de questions et d'observations expérimentales fascinantes. On en trouve des exemples en physique fondamentale comme en physique appliquée, dans des questions mathématiques tout comme dans les débats animés sur son interprétation et ses implications philosophiques.

Un enseignement de mécanique quantique repose avant tout sur un cours théorique, illustré par des exercices simples, souvent formels. Mais réduire la physique quantique à ce type d'activité est frustrant, pour l'élève et pour le maître, car il y a peu d'éléments que l'on puisse comparer à la réalité expérimentale. Pendant longtemps, des années 1950 aux années 1970, les seules applications concrètes de l'enseignement de base de physique quantique semblaient réduites à des exemples liés à la physique atomique et nucléaire, que l'on savait transformer en des problèmes exactement solubles reliés à telle ou telle catégorie de fonctions spéciales.

Dans les vingt dernières années, les choses se sont transformées radicalement. Le développement des hautes technologies en donne de multiples illustrations. Le puits carré à une dimension était longtemps resté un problème académique pour débutants. L'essor des nanotechnologies, des boîtes quantiques et des super-réseaux en physique des semi-conducteurs a considérablement élevé son statut social comme celui de l'oscillateur harmonique. Par voie de conséquence, on a pu donner de plus en plus d'importance à l'aspect physique des phénomènes plutôt qu'à l'habileté technique à manipuler les recueils de fonctions spéciales.

Depuis 1980, de nombreuses questions de fond soulevées dès la naissance de la mécanique quantique ont trouvé des réponses expérimentales. Les expériences d'interférences de neutrons et le problème de la mesurabilité de la phase de la fonction d'onde en sont un exemple. La percée la plus fondamentale dans ce domaine est la violation des inégalités de Bell et la démonstration des propriétés des états intriqués. Plus récemment, les expériences effectuées sur la décohérence et le célèbre paradoxe du chat de Schrödinger ont ravivé de façon quantitative, et pas seulement rhétorique, l'intérêt que l'on pouvait porter sur les fondements et l'interprétation de la mécanique quantique.

Ce livre contient une série de problèmes sur les aspects contemporains de la physique quantique, qu'ils soient théoriques ou expérimentaux. Tous reposent sur des cas concrets, même si nous avons délibérément allégé certains aspects mathématiques ou expérimentaux afin d'aboutir le plus vite possible à une appréhension de la physique elle-même.

6 Avant-propos

La plupart de ces problèmes ont été posés lors d'examens à l'École polytechnique. Le fait que ces examens comptent pour un concours d'accès à la Fonction publique nous a contraints à trouver chaque année un sujet original. La meilleure façon a été de rechercher les thèmes dans la littérature scientifique récente, puis de les adapter à ce que savaient nos élèves. Ce travail, que nous avons mené avec plusieurs de nos collègues, s'est révélé une passionnante source de discussion pour nous-mêmes. Nous y avons appris beaucoup de choses, les uns et les autres, en mêlant les connaissances de nos spécialités respectives.

Une première version de ce livre, dont le contenu diffère de celui-ci pour environ 50%, a été publiée en anglais en 2000 chez Springer-Verlag sous le titre *The Quantum Mechanics Solver*. L'intérêt qu'il a suscité chez nos collègues étrangers nous a poussé à en faire une version, nécessairement modernisée, pour le public de langue française. Pour nos élèves de l'École polytechnique, premiers destinataires de ce texte, cette version remplace le traditionnel « poly » publié chaque année. Nous espérons que le changement de format ne sera pas trop gênant.

Dans cette version française, nous avons inclus un aide-mémoire sur les éléments et formules utiles de mécanique quantique. Nous avons également indiqué dans un tableau les chapitres de notre livre $M\'{e}canique$ Quantique (Editions de l'École polytechnique, 2003) auquel chaque problème fait appel. Enfin, nous avons regroupé ces problèmes en trois grands thèmes : A) Particules élémentaires, noyaux et atomes ; B) Intrication quantique et mesure ; C) Systèmes complexes.

Nous remercions tous les collègues qui nous ont aidés, soit en suggérant des thèmes de problèmes, soit en les rédigeant avec nous. Nous saluons la mémoire de Gilbert Grynberg qui avait écrit une première version du problème sur le paradoxe EPR et les inégalités de Bell. Nous sommes particulièrement redevable à Philippe Grangier, auteur d'un grand nombre d'idées ou de problèmes : chat de Schrödinger, mesure quantique idéale, thermomètre quantique. Nous remercions François Jacquet, James Rich et André Rougé pour le problème sur les oscillations des neutrinos, et Gérald Bastard pour celui portant sur les boîtes quantiques.

Palaiseau, Janvier 2004

Jean-Louis Basdevant Jean Dalibard

Constantes physiques

Unit'es:

 $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} (\sim \text{taille d'un atome})$ Angström Fermi $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} (\sim \text{taille d'un noyau})$

 $1 \text{ eV} = 1.60218 \ 10^{-19} \text{ J}$ Electron-volt

$Constantes\ fondamentales:$

 $h = 6,6261 \ 10^{-34} \ \mathrm{J s}$ Constante de Planck

 $\hbar = h/2\pi = 1,05457\ 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$ $= 6,5821\ 10^{-22}\ \mathrm{MeV\,s}$

 $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$ Vitesse de la lumière

 $\hbar c = 197,327~{\rm MeV}~{\rm fm} \simeq 1973~{\rm eV}~{\rm \AA}$

 $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ Perméabilité du vide

 $k_B = 1.38066 \ 10^{-23} \ \mathrm{J \, K^{-1}} = 8.6174 \ 10^{-5} \ \mathrm{eV \, K^{-1}}$ Constante de Boltzmann

 $N_A = 6,0221 \ 10^{23}$ Nombre d'Avogadro

 $\begin{array}{l} q_e=-q=-1,60218\ 10^{-19}\ {\rm C\ et}\ e^2=q^2/(4\pi\epsilon_0)\\ m_e=9,1094\ 10^{-31}\ {\rm kg},\quad m_ec^2=0,51100\ {\rm MeV} \end{array}$ Charge de l'électron Masse de l'électron $m_p = 1,67262 \ 10^{-27} \ \text{kg}, \quad m_p c^2 = 938,27 \ \text{MeV}$ Masse du proton

 $m_p/m_e = 1836, 15$

 $m_n = 1,67493 \ 10^{-27} \text{ kg}, \quad m_n c^2 = 939,57 \text{ MeV}$ Masse du neutron

Constante de structure fine (sans dimension) $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137,036$

Rayon classique de l'électron $r_e = e^2/(m_e c^2) = 2,818 \ 10^{-15} \ \mathrm{m}$

Longueur d'onde de Compton de l'électron $\lambda_c = h/(m_e c) = 2,426 \ 10^{-12} \ \mathrm{m}$

Rayon de Bohr $a_1 = \hbar^2/(m_e e^2) = 0,52918 \ 10^{-10} \text{ m}$

Energie d'ionisation de l'hydrogène $E_I = m_e e^4/(2\hbar^2) = \alpha^2 m_e c^2/2 = 13,6057 \text{ eV}$

Constante de Rydberg $R_{\infty} = E_I/(hc) = 1,09737 \ 10^7 \ \mathrm{m}^{-1}$

Magnéton de Bohr $\mu_B = q_e \hbar/(2m_e) = -9,2740 \ 10^{-24} \ \mathrm{J T^{-1}}$

 $= -5,7884 \ 10^{-5} \ eV T^{-1}$

Magnéton nucléaire $\mu_N = q\hbar/(2m_p) = 5,0508 \; 10^{-27} \; \mathrm{J} \, \mathrm{T}^{-1}$

 $= 3.1525 \ 10^{-8} \ eV T^{-1}$

Les valeurs mises à jour peuvent être consultées sur http://wulff.mit.edu/constants.html

Liens avec le cours de mécanique quantique de l'École polytechnique Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard. Éditions de l'École polytechnique et Ellipses (2003)

Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard, Editions de l'École polytechnique et Ellipses (2003)	Jean Dalibard	, Edi	tion	g de	L Eco	le po	lyte	chnic	ane e	E E	lipse	S (2	003)	
	Problèmes (partie A)	e A)		Problèmes (partie B)	nes (p	artie	B)		Pro	oblèm	ies (p	Problèmes (partie C)	C)	
Chapitre du cours	1 2 3 4	5 6	~	8	10	9 10 11 12	12	13	14	15	16	14 15 16 17 18	18	19
1. Phénomène quantiques	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2. La fonction d'onde	•	•		•			•	•	•	•	•	•	•	
3. Grandeurs physiques	•	•		•			•	•		•	•	•	•	
4. Systèmes simples						•		•		•	•			
5. Principes de la M.Q.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
6. Systèmes à deux états	•		•	•	•									
7. Commutation des observables			•	•	•	•	•	•			•			•
8. Expérience de Stern et Gerlach	•		•		•									
9. Méthodes d'approximation		•						•	•	•	•		•	
10. Le moment cinétique	•	•	•				•				•		•	
11. Description des atomes	•	•												
12. Spin $1/2$ et RMN	•		•	•	•								•	•
13. Addition des J				•										
14. États intriqués, EPR			•	•	•	•	•							•
15. Lagrangien et Hamiltonien	•						•				•			
16. Particules identiques		•							•					
17. Évolution des systèmes												•		

Nous avons regroupé dans les quelques pages qui suivent les résultats essentiels du cours de mécanique quantique. Il va de soi que la lecture de cet aide-mémoire ne saurait remplacer l'étude approfondie du cours lui-même.

1 Principes

1.1. L'espace de Hilbert

La première étape dans le traitement d'un problème physique par la mécanique quantique consiste à identifier l'espace de Hilbert approprié au problème. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes, muni d'un produit scalaire. Les vecteurs de l'espace sont appelés kets et notés $|\psi\rangle$. Le produit scalaire est entre le ket $|\psi_1\rangle$ et le ket $|\psi_2\rangle$ est noté $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$. Il est linéaire en $|\psi_1\rangle$ et antilinéaire en $|\psi_2\rangle$ et on a :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = (\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle)^*$$
.

1.2. Définition de l'état d'un système : cas pur

L'état d'un système physique est entièrement défini à tout instant t par un vecteur de l'espace de Hilbert de norme 1, noté $|\psi(t)\rangle$. Le principe de superposition entraı̂ne que si $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont deux états possibles pour un système physique donné, alors toute combinaison linéaire

$$|\psi\rangle \propto c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle$$

est également un état possible du système. Le coefficient de proportionnalité doit être choisi pour que $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

1.3. Mesure

À toute grandeur physique A est associé un opérateur \hat{A} auto-adjoint (ou hermitien) de l'espace de Hilbert. Dans une mesure de la quantité physique A, les seuls résultats possibles sont les valeurs propres a_{α} de \hat{A} .

Considérons un système initialement (juste avant la mesure de A) dans l'état $|\psi\rangle$. La probabilité $\mathcal{P}(a_{\alpha})$ de trouver le résultat a_{α} est

$$\mathcal{P}(a_{\alpha}) = \left\| \hat{P}_{\alpha} | \psi \rangle \right\|^2 ,$$

où \hat{P}_{α} est le projecteur sur le sous-espace propre \mathcal{E}_{α} associé à la valeur propre a_{α} .

Après la mesure de \hat{A} ayant donné le résultat a_{α} , l'état du système est proportionnel à $\hat{P}_{\alpha}|\psi\rangle$ (projection du paquet d'ondes).

Une mesure unique donne essentiellement un renseignement sur l'état du système après la mesure. Le renseignement qu'on obtient sur l'état avant mesure est très « pauvre » : si la mesure a donné le résultat a_{α} , l'état $|\psi\rangle$ n'était pas auparavant dans le sous-espace orthogonal à \mathcal{E}_{α} .

Pour acquérir des informations précises sur l'état avant mesure, il faut disposer de N systèmes indépendants, tous préparés dans le même état $|\psi\rangle$ (avec $N\gg 1$). En effectuant sur N_1 systèmes la mesure d'une observable \hat{A}_1 (valeurs propres $\{a_{1,\alpha}\}$), sur N_2 systèmes la mesure de \hat{A}_2 (valeurs propres $\{a_{2,\alpha}\}$), et ainsi de suite (avec $\sum_{i=1}^p N_i = N$), on peut déterminer la loi de distribution des $a_{i,\alpha}$, et donc les $\|\hat{P}_{i,\alpha}|\psi\rangle\|^2$. Si les p opérateurs \hat{A}_i sont bien choisis, cela détermine de manière non ambiguë l'état de départ $|\psi\rangle$.

1.4. Évolution hamiltonienne

Quand le système n'est soumis à aucune observation, l'évolution de son vecteur d'état est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$
.

L'opérateur hermitien $\hat{H}(t)$ est l'hamiltonien (opérateur associé à l'énergie) du système à l'instant t.

Plaçons-nous dans le cas d'un système isolé, dont l'hamiltonien est indépendant du temps. Les états propres $|\phi_n\rangle$ de l'hamiltonien, solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\hat{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle ,$$

forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert particulièrement utile. En effet, une fois l'état initial $|\psi(0)\rangle$ décomposé sur cette base, on connaît immédiatement son expression à n'importe quel instant :

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n} \alpha_{n} |\phi_{n}\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \sum_{n} \alpha_{n} e^{-iE_{n}t/\hbar} |\phi_{n}\rangle .$$

Les coefficients α_n valent $\alpha_n = \langle \phi_n | \psi(0) \rangle$, soit

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n} e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi(0)\rangle.$$

1.5. Ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC)

Un ensemble $\{\hat{A}, \hat{B}, \dots, \hat{X}\}$ forme un ECOC si tous les opérateurs commutent deux à deux et si leur base propre commune $\{|\alpha, \beta, \dots, \xi\rangle\}$ est unique (à un facteur de phase près).

La mesure de l'ensemble des quantités physiques $\{A, B, ..., X\}$ sur un système donné permet de préparer ce système de manière certaine : si ces mesures ont donné les résultats α pour A, β pour B, ..., ξ pour \hat{X} , alors l'état du système est avec certitude $|\alpha, \beta, ..., \xi\rangle$.

1.6. États intriqués

Considérons un système quantique \mathcal{S} formé de deux sous-systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . L'espace de Hilbert dans lequel on décrit \mathcal{S} est le produit tensoriel des espaces de Hilbert \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 associés respectivement à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . Si l'on note $\{|\alpha_m\rangle\}$ une base de \mathcal{S}_1 et $\{|\beta_n\rangle\}$ une base de \mathcal{S}_2 , une base possible de l'espace de Hilbert du système total est $\{|\alpha_m\rangle\otimes|\beta_n\rangle\}$.

Tout vecteur d'état possible du système total s'écrit :

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} C_{m,n} |\alpha_m\rangle \otimes |\beta_n\rangle$$
.

Si ce vecteur peut s'écrire $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$, où $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ sont des vecteurs de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 respectivement, on dit qu'on a un état factorisé.

Un vecteur d'état $|\Psi\rangle$ quelconque n'est généralement pas factorisé : il y a alors des corrélations quantiques entre les deux sous-systèmes, et $|\Psi\rangle$ est appelé état intriqué.

1.7. Mélange statistique et opérateur densité

Quand on a une connaissance imparfaite du système, du fait d'une mesure incomplète par exemple, on ne connaît pas exactement son vecteur d'état. On le décrit alors par un opérateur densité $\hat{\rho}$ dont les propriétés sont les suivantes :

- L'opérateur densité est hermitien et sa trace vaut 1.
- Toutes les valeurs propres Π_n de l'opérateur densité sont positives ou nulles. L'opérateur densité peut donc s'écrire

$$\hat{\rho} = \sum_{n} \Pi_{n} |\phi_{n}\rangle \langle \phi_{n}| ,$$

où les $|\phi_n\rangle$ sont les états propres de $\hat{\rho}$ et où les Π_n s'interprètent comme une distribution de probabilité. Pour un cas pur, toutes les valeurs propres Π_n sont nulles sauf une qui vaut 1.

– La probabilité de trouver le résultat a_{α} lors de la mesure de la grandeur physique A est donnée par

$$\mathcal{P}(a_{\alpha}) = \operatorname{Tr}\left(\hat{P}_{\alpha}\hat{\rho}\right) = \sum_{n} \Pi_{n} \langle \phi_{n} | \hat{A} | \phi_{n} \rangle .$$

L'état du système après mesure est $\hat{\rho}' \propto \hat{P}_{\alpha} \hat{\rho} \hat{P}_{\alpha}$.

- Tant que le système n'est soumis à aucune observation, l'évolution de son opérateur densité est donnée par

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t) , \hat{\rho}(t)] .$$

2 Résultats généraux

2.1. Relations d'incertitude

Considérons 2N systèmes physiques identiques et indépendants, tous préparés dans le même état $|\psi\rangle$ (on prend $N\gg 1$). Pour N d'entre eux, on effectue la mesure d'une grandeur physique A; pour les N autres, on mesure une autre grandeur physique B. Les écarts-type Δa et Δb des deux séries de mesures vérifient l'inégalité

$$\Delta a \ \Delta b \ge \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right| \ .$$

2.2. Théorème d'Ehrenfest

On considère un système évoluant sous l'effet de l'hamiltonien H(t) et une observable $\hat{A}(t)$. La valeur moyenne de cette observable évolue alors selon :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \psi|[\hat{A},\hat{H}]|\psi\rangle + \langle \psi|\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}|\psi\rangle \ .$$

En particulier, si \hat{A} est indépendante du temps et si elle commute avec \hat{H} , alors la valeur moyenne $\langle a \rangle$ est constante.

3 Le cas d'une particule ponctuelle : physique ondulatoire

3.1. Fonction d'onde

Pour une particule ponctuelle sans spin, l'espace de Hilbert est constitué par l'ensemble des fonctions de carré sommable. Le vecteur d'état $|\psi\rangle$ est une fonction d'onde $\psi(r)$. La quantité $|\psi(r)|^2$ représente la densité de probabilité de trouver la particule au point r. La transformée de Fourier $\varphi(p)$:

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} \psi(\boldsymbol{r}) \; d^3r$$

donne l'amplitude de probabilité pour trouver la particule avec l'impulsion p.

3.2. Opérateurs

Parmi les opérateurs associés aux quantités physiques usuelles, on trouve :

- L'opérateur position $\hat{r} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, qui consiste à multiplier par r la fonction d'onde $\psi(r)$.
- L'opérateur impulsion \hat{p} dont l'action sur la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ est l'opération $-i\hbar \nabla$.
- L'hamiltonien (ou opérateur énergie) pour une particule placée dans un potentiel $V(\boldsymbol{r})$:

$$\hat{H} = rac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{r}) \quad
ightarrow \quad \hat{H}\psi({m r}) = -rac{\hbar^2}{2M}
abla^2 \psi({m r}) + V({m r})\psi({m r}) \; ,$$

où M est la masse de la particule.

3.3. Continuité de la fonction d'onde

Si le potentiel V est continu, les états propres de l'hamiltonien $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ sont continus et de dérivée continue. Ceci reste vrai si on modélise le potentiel $V(\mathbf{r})$ par une fonction en escalier : ψ et ψ' restent continues même en un point où $V(\mathbf{r})$ est discontinu.

On considère également des sauts de potentiel infini (par exemple $V(x) = +\infty$ pour x < 0 et V(x) = 0 pour $x \ge 0$). En un tel point (x = 0 dans notre exemple), $\psi(x)$ reste continue et s'annule ($\psi(0) = 0$); la dérivée première $\psi'(x)$ est alors discontinue.

À une dimension, on utilise enfin des potentiels en distribution de Dirac, par exemple $V(x) = g \, \delta(x)$. La fonction d'onde est continue en ce point et la discontinuité de la dérivée s'obtient en intégrant l'équation de Schrödinger sur un voisinage du point où se trouve la distribution de Dirac $[\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = (2Mg/\hbar^2) \, \psi(0)$ dans notre exemple].

3.4. Relation d'incertitude position impulsion

En utilisant le résultat général indiqué ci-dessus, on trouve :

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad \to \quad \Delta x \; \Delta p_x \ge \hbar/2 \; ,$$

et de même pour les axes y et z.

4 Le moment cinétique et le spin

4.1. Observable de moment cinétique

On appelle observable de moment cinétique \hat{J} un ensemble de trois opérateurs $\{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ vérifiant les relations de commutation

$$[\hat{J}_x,\hat{J}_y] = i\hbar \, \hat{J}_z \ , \quad [\hat{J}_y,\hat{J}_z] = i\hbar \, \hat{J}_x \ , \quad [\hat{J}_z,\hat{J}_x] = i\hbar \, \hat{J}_y \ .$$

Le moment cinétique orbital par rapport à l'origine $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ est une observable de moment cinétique.

L'observable $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ commute avec chacune des trois composantes \hat{J}_i . On peut donc trouver une base propre commune à \hat{J}^2 et une de ces trois composantes \hat{J}_i . On choisit traditionnellement i=z.

4.2. Valeurs propres du moment cinétique

Les valeurs propres de \hat{J}^2 sont de la forme $\hbar^2 j(j+1)$ avec j entier ou demientier. Dans un sous-espace propre correspondant à une valeur de j donnée, les valeurs propres de \hat{J}_z sont de la forme

$$\hbar m$$
, avec $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ $(2j+1 \text{ valeurs})$.

Les états propres correspondants sont notés $|\alpha, j, m\rangle$, où α représente les autres nombres quantiques nécessaires pour définir complètement l'état. On

peut passer de $|\alpha,j,m\rangle$ à $|\alpha,j,m\pm 1\rangle$ grâce aux opérateurs $\hat{J}_{\pm}=\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y$:

$$\hat{J}_{\pm}|\alpha,j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |\alpha,j,m\pm 1\rangle .$$

4.3. Moment cinétique orbital d'une particule ponctuelle

Pour un moment cinétique orbital, seules les valeurs entières de j et m sont permises. On note traditionnellement $\ell=j$ dans ce cas. Les états propres $\psi(r)$ de \hat{L}^2 et \hat{L}_z s'écrivent en coordonnées sphériques R(r) $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$, où la fonction radiale R(r) est quelconque et où les fonctions $Y_{\ell,m}$ sont les harmoniques sphériques. Les premières d'entre elles sont :

$$\begin{split} Y_{0,0}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \ , \\ Y_{1,1}(\theta,\varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \, e^{i\varphi} \ , \quad Y_{1,-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \, e^{-i\varphi} \ . \end{split}$$

4.4. Le spin

En plus de son moment cinétique orbital, une particule peut avoir un moment cinétique intrinsèque appelé spin. Le spin, qu'on note traditionnellement i = s, peut prendre des valeurs demi-entières ou entières.

L'électron, le proton, le neutron sont des particules de spin s=1/2, pour lesquelles il y a donc deux valeurs de $m: m=\pm 1/2$. Dans la base |s=1/2|, $m=\pm 1/2$, les opérateurs \hat{S}_x , \hat{S}_y , \hat{S}_z ont pour matrices :

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

4.5. Addition de moments cinétiques

Considérons un système \mathcal{S} formé de deux sous-systèmes \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , de moment cinétique \hat{J}_1 et \hat{J}_2 . L'observable $\hat{J}=\hat{J}_1+\hat{J}_2$ est une observable de moment cinétique. Dans le sous espace correspondant à des valeurs données j_1 et j_2 (de dimension $(2j_1+1)\times(2j_2+1)$), les valeurs possibles pour le nombre quantique j associé au moment cinétique total \hat{J} sont :

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2,$$

avec, pour chaque valeur de j, les 2j+1 valeurs de $m: m=-j, -j+1, \cdots, j$. Par exemple, en additionnant deux spins 1/2, on peut obtenir un moment cinétique 0 (état singulet j=m=0) et trois états de moment cinétique 1 (états triplets $j=1, m=0,\pm 1$).

Le passage de la base découplée $|j_1,m_1\rangle\otimes|j_2,m_2\rangle$ à la base couplée $|j_1,j_2\;;\;j,m\rangle$ se fait par l'intermédiaire des coefficients de Clebsch-Gordan :

$$|j_1,j_2\;;\;j,m\rangle = \sum_{m_1m_2} C^{j,m}_{j_1,m_1;j_2,m_2} |j_1,m_1\rangle \otimes |j_2,m_2\rangle \;.$$

5 Problèmes exactement solubles

5.1. L'oscillateur harmonique

On se limite pour simplifier au cas à une dimension. Le potentiel harmonique s'écrit $V(x)=m\omega^2x^2/2$. Les échelles naturelles de longueur et d'impulsion sont

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} , \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega} .$$

En introduisant les opérateurs réduits $\hat{X} = \hat{x}/x_0$ et $\hat{P} = \hat{p}/p_0$, on trouve :

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\hat{P}^2 + \hat{X}^2 \right) , \text{ avec } [\hat{X}, \hat{P}] = i .$$

Il est utile d'introduire les opérateurs d'annihilation et de création \hat{a} et \hat{a}^{\dagger} :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + i \hat{P} \right) , \quad \hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} - i \hat{P} \right) , \quad [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1 .$$

On a alors

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + 1/2 \right) .$$

Les énergies propres de \hat{H} sont $(n+1/2)\hbar\omega$, avec n entier positif ou nul. Ces valeurs propres sont non dégénérées et les états propres correspondants sont notés $|n\rangle$. On a :

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

et

$$\begin{array}{rcl} \hat{a}|n\rangle & = & \sqrt{n}\,|n-1\rangle & \mathrm{si}\ n>0\ , \\ & = & 0 & \mathrm{si}\ n=0\ . \end{array}$$

Les fonctions d'onde correspondant à ces états propres sont les fonctions de Hermite. En particulier, l'état fondamental $|n=0\rangle$ est donné par :

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{x_0}} \exp(-x^2 / 2x_0^2) .$$

Les problèmes d'oscillateurs harmoniques à un nombre quelconque de dimensions se déduisent de ces résultats.

5.2. Le potentiel coulombien (états liés)

On s'intéresse au mouvement d'un électron dans le champ électrostatique créé par le noyau. On note μ la masse réduite $(\mu=m_em_p/(m_e+m_p)\simeq m_e)$ et on pose $e^2=q^2/(4\pi\epsilon_0)$. Comme le potentiel coulombien est invariant par rotation, on peut chercher une base propre commune à l'hamiltonien \hat{H} et à \hat{L}^2 et \hat{L}_z . Les états liés sont caractérisés par les 3 nombres quantiques n,ℓ,m avec :

$$\psi_{n,\ell,m}(\mathbf{r}) = R_{n,\ell}(r) Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) ,$$

où les $Y_{\ell,m}$ sont les harmoniques sphériques. Les énergies propres correspondantes sont de la forme

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2}$$
 avec $E_I = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \simeq 13.6 \text{ eV}$.

Le nombre quantique principal n est un entier strictement positif et ℓ peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à n-1. La dégénérescence totale (en m et en ℓ) d'un niveau d'énergie est n^2 (sans tenir compte de la dégénérescence de spin). La fonction d'onde radiale $R_{n,\ell}$ est de la forme :

$$R_{n,\ell}(r) = r^{\ell} P_{n,\ell}(r) \exp(-r/(na_1))$$
, avec $a_1 = \frac{\hbar^2}{ue^2} \simeq 0.53 \text{ Å}$.

 $P_{n,\ell}(r)$ est un polynôme de degré $n-\ell-1$ appelé polynôme de Laguerre. La longueur a_1 est le rayon de Bohr. L'état fondamental s'écrit en particulier $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = e^{-r/a_1}/\sqrt{\pi a_1^3}$.

6 Méthodes d'approximation

6.1. Les perturbations stationnaires

On considère un hamiltonien \hat{H} indépendant du temps, qui s'écrit sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$. On suppose connue la solution du problème aux valeurs propres de \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_0|n,r\rangle = E_n|n,r\rangle$$
 , $r = 1, 2, \dots, p_n$

où la dégénérescence de la valeur propre E_n est p_n . On suppose également que le terme $\lambda \hat{H}_1$ est suffisamment faible pour n'apporter que de petites perturbations au spectre de \hat{H}_0 .

Cas non dégénéré. Dans ce cas, $p_n=1$ et l'énergie propre de \hat{H} qui se raccorde à E_n quand $\lambda \to 0$ vaut :

$$\tilde{E}_n = E_n + \lambda \langle n|\hat{H}_1|n\rangle + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|\hat{H}_1|n\rangle|^2}{E_n - E_k} + O(\lambda^3) .$$

L'état propre correspondant est :

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \lambda \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|\hat{H}_1|n\rangle}{E_n - E_k} |k\rangle + O(\lambda^2)$$

Cas dégénéré. Pour obtenir les énergies propres de \hat{H} à l'ordre 1 en λ , et les états propres à l'ordre 0 en λ , il faut diagonaliser la restriction de $\lambda \hat{H}_1$ au sous-espace propre de \hat{H}_0 associé à la valeur propre E_n , c'est-à-dire rechercher

les p_n solutions de l'équation dite « séculaire » :

$$\begin{vmatrix} \langle n, 1 | \lambda \hat{H}_1 | n, 1 \rangle - \Delta E & \dots & \langle n, 1 | \lambda \hat{H}_1 | n, p_n \rangle \\ \vdots & \langle n, r | \lambda \hat{H}_1 | n, r \rangle - \Delta E & \vdots \\ \langle n, p_n | \lambda \hat{H}_1 | n, 1 \rangle & \dots & \langle n, p_n | \lambda \hat{H}_1 | n, p_n \rangle - \Delta E \end{vmatrix} = 0.$$

Les énergies perturbées sont $\tilde{E}_{n,r} = E_n + \Delta E_r$, $r = 1, \dots, p_n$. La dégénérescence est en général levée (au moins partiellement) par la perturbation.

6.2. Méthode variationnelle pour le niveau fondamental

Soit $|\psi\rangle$ un état normé quelconque; la valeur moyenne de l'énergie dans cet état est supérieure ou égale à l'énergie E_0 du niveau fondamental : $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq E_0$. Pour déterminer une borne supérieure de E_0 , on se donne donc une classe de fonctions d'essai, dépendant d'un ou plusieurs paramètres, et on cherche le minimum de $\langle E\rangle$ pour ces fonctions. Le minimum obtenu est toujours supérieur à l'énergie E_0 .

7 Particules identiques

Toutes les particules de la nature appartiennent à l'une ou l'autre des deux classes suivantes :

- Les bosons, qui sont des particules de spin entier. Le vecteur d'état d'un système de N bosons identiques est totalement symétrique par rapport à l'échange de deux quelconques de ces particules.
- Les fermions, qui sont de particules de spin demi-entier. Le vecteur d'état d'un système de N fermions identiques est totalement antisymétrique par rapport à l'échange de deux quelconques de ces particules.

Donnons nous une base $\{|n_i\rangle,\ i=1,2,\ldots\}$ de l'espace des états à une particule. Considérons un système à N particules identiques, que nous numérotons arbitrairement de 1 à N.

(a) Si les particules sont des bosons, le vecteur d'état décrivant l'état physique avec N_1 particules dans l'état $|n_1\rangle$, N_2 particules dans l'état $|n_2\rangle$, etc., vaut :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \frac{1}{\sqrt{N_1! N_2! \cdots}} \sum_{P} |1:n_{P(1)}; 2:n_{P(2)}; \dots; N:n_{P(N)}\rangle$$

où la somme porte sur les N! permutations d'un ensemble à N éléments.

(b) Si les particules sont des fermions, l'état correspondant à une particule dans l'état $|n_1\rangle$, une particule dans l'état $|n_2\rangle$, etc., est donné par le déterminant de Slater :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left| \begin{array}{cccc} |1:n_1\rangle & |1:n_2\rangle & \dots & |1:n_N\rangle \\ |2:n_1\rangle & |2:n_2\rangle & \dots & |2:n_N\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |N:n_1\rangle & |N:n_2\rangle & \dots & |N:n_N\rangle \end{array} \right|.$$

Comme le vecteur d'état est antisymétrique, on ne peut pas mettre deux fermions dans le même état quantique (principe d'exclusion de Pauli).

8 Évolution des systèmes

8.1. Oscillation de Rabi

On considère un système à deux niveaux $|\pm\rangle$, d'hamiltonien $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 |+\rangle\langle +|$. On couple ces deux niveaux par un hamiltonien \hat{H}_1 :

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\omega_1}{2} \left(e^{-i\omega t} |+\rangle \langle -| + e^{i\omega t} |-\rangle \langle +| \right) .$$

On suppose le système dans l'état $|-\rangle$ à l'instant 0. La probabilité de trouver le système dans l'état $|+\rangle$ à l'instant t vaut :

$$P(t) = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega T/2) \quad \text{avec} \quad \Omega^2 = (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2 .$$

8.2. Perturbations dépendant du temps

On considère un système d'hamiltonien $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$. On suppose connus les états propres $|n\rangle$ de \hat{H}_0 et les énergies propres correspondantes E_n . Le système est à l'instant t=0 dans l'état propre $|i\rangle$ de \hat{H}_0 . À l'ordre 1 en \hat{H}_1 , l'amplitude de probabilité de trouver le système dans un autre état propre $|f\rangle$ à l'instant t est :

$$a(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \langle f | \hat{H}_1(t') | i \rangle dt' .$$

Pour une perturbation H_1 indépendante du temps, la probabilité vaut :

$$P(t) = |a(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle f | \hat{H}_1 | i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2(\omega t/2)}{(\omega/2)^2} ,$$

où on a posé $\hbar\omega = E_f - E_i$.

8.3. Règle d'or de Fermi et décroissance exponentielle

On considère un système d'hamiltonien non perturbé \hat{H}_0 . Le système est initialement dans un état propre $|i\rangle$ d'énergie E_i . On suppose que cet état est couplé à un continuum $\{|f\rangle\}$ d'états propres de \hat{H}_0 par la perturbation indépendante du temps \hat{V} . On suppose pour simplifier que les éléments de matrice $\langle f|\hat{V}|i\rangle$ dépendent seulement de l'énergie E_f de l'état $|f\rangle$.

À l'ordre le plus bas non nul en \hat{V} , ce couplage confère une durée de vie finie τ au niveau $|i\rangle$: la probabilité de trouver le système dans l'état $|i\rangle$ à l'instant t>0 vaut $e^{-t/\tau}$ avec :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\hat{V}|i\rangle|^2 \rho(E_i) .$$

L'élément de matrice $\langle f|\hat{V}|i\rangle$ est évalué pour un état $|f\rangle$ d'énergie $E_f=E_i$. La fonction $\rho(E)$ représente la densité d'états finals et vaut respectivement pour des particules non relativistes de masse m $(E=p^2/2m)$ ou ultra-relativistes (E=cp, par exemple des photons):

$$\rho_{\rm non\ rel.}(E) = \frac{mL^3\sqrt{2mE}}{2\pi^2\hbar^3} \qquad \qquad \rho_{\rm ultra\ rel.}(E) = \frac{L^3E^2}{2\pi^2\hbar^3c^3} \ . \label{eq:rel.}$$

La quantité L^3 représente le volume de quantification. Considérons une transition atomique modélisée par un système à deux niveaux, un état excité $|e\rangle$ et un état fondamental $|g\rangle$, séparés par l'énergie $\hbar\omega$ et couplés par une transition dipolaire électrique. La durée de vie τ conférée au niveau excité par le processus d'émission spontanée est donnée par :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \left| \langle e | \hat{\boldsymbol{D}} | g \rangle \right|^2 ,$$

où \hat{D} est l'opérateur dipole électrique.

9 Processus de collision

9.1. Approximation de Born

On considère la diffusion élastique d'une particule de masse m non relativiste par un potentiel V(r). A l'ordre 2 en V, la section efficace de diffusion d'un état d'impulsion p vers un état d'impulsion p' vaut :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\tilde{V}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 , \quad \text{avec} \quad \tilde{V}(\boldsymbol{q}) = \int e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} V(\boldsymbol{r}) d^3r .$$

Exemple: potentiel de Yukawa. On prend

$$V(r) = g \; \frac{\hbar c}{r} \; e^{-r/a} \; ,$$

ce qui donne en posant $p = \hbar k$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2mgca^2}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{\left(1 + 4a^2k^2\sin^2(\theta/2)\right)^2}$$
 (Born)

où θ représente l'angle entre \boldsymbol{p} et \boldsymbol{p}' . La section efficace totale vaut alors :

$$\sigma(k) = \left(\frac{2 \, mgca}{\hbar}\right)^2 \, \frac{4\pi a^2}{1 + 4k^2 a^2} \qquad \text{(Born)} \ .$$

Dans le cas où la portée a tend vers l'infini, on retrouve le résultat du potentiel coulombien :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{g\hbar c}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \qquad \text{(exact)} ,$$

où $E = p^2/(2m)$.

9.2. Diffusion par un système composé

On considère une particule a de masse m subissant une diffusion élastique sur un système composé de n particules b_1, \ldots, b_n . Ces n particules forment un état lié de fonction d'onde $\psi_0(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$. La section efficace de diffusion à l'approximation de Born vaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\mathcal{V}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')|^2 \text{ avec } \mathcal{V}(\boldsymbol{q}) = \sum_j \tilde{V}_j(\boldsymbol{q}) F_j(\boldsymbol{q}) .$$

Le potentiel V_j représente l'interaction entre la particule a et la particule b_j . Le facteur de forme F_j est défini par :

$$F_j(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j/\hbar} |\psi_0(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_j,...,\mathbf{r}_n)|^2 d^3r_1...d^3r_j...d^3r_n.$$

Des phénomènes d'interférences sont généralement observables entre les différents \boldsymbol{q} contribuant à la somme définissant $\mathcal{V}(\boldsymbol{q})$. Dans le cas d'une distribution de charge, \tilde{V} est l'amplitude de diffusion Rutherford et le facteur de forme F est la transformée de Fourier de la densité de charge.

9.3. Théorie générale de la diffusion

Pour étudier le problème général de la diffusion d'une particule de masse m par un potentiel $V(\mathbf{r})$, il est utile de chercher les états propres de $\hat{H}=\hat{p}^2/(2m)+V(\mathbf{r})$ d'énergie $E=\hbar^2k^2/(2m)$ positive, et ayant pour forme asymptotique

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \underset{|\mathbf{r}| \to \infty}{\sim} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} ,$$

ce qui correspond à la superposition d'une onde plane incidente $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et d'une onde diffusée. Un tel état est appelé état stationnaire de diffusion. L'amplitude de diffusion f dépend de l'énergie, de la direction incidente $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$, et de la direction d'observation $\mathbf{u}' = \mathbf{r}/r$. La section efficace différentielle est :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')|^2 .$$

L'amplitude de diffusion est donnée par l'équation implicite

$$f(k,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} \; V(\boldsymbol{r}') \; \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}') \; d^3r' \; .$$

On retrouve l'approximation de Born en prenant $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

9.4. Diffusion à basse énergie

Quand la longueur d'onde de la particule incidente $\lambda \sim k^{-1}$ est grande devant la portée du potentiel, l'amplitude f ne dépend plus de \boldsymbol{u} et \boldsymbol{u}' , au moins si le potentiel décroît plus vite que r^{-3} à l'infini. La diffusion est isotrope. La limite réelle $a_s = -\lim_{k\to 0} f(k)$ est appelée longueur de diffusion.

A. Particules élémentaires, noyaux et atomes

1. Oscillations des neutrinos

En radioactivité bêta, ou plus généralement en physique des interactions faibles, l'électron est toujours associé à une particule neutre : le neutrino ν_e . Or, il existe dans la nature une particule, le lepton μ ou muon, dont les propriétés physiques paraissent analogues à celles de l'électron, mis à part sa masse $m_{\mu} \simeq 200~m_e$. Le muon a des interactions faibles identiques à celles de l'électron, à cela près qu'il apparaît en association avec un neutrino différent, le ν_{μ} .

Par exemple, un faisceau de neutrinos produit dans un accélérateur peut interagir avec un neutron (n) d'un noyau pour donner un proton (p) suivant les réactions

$$\nu_e + n \to p + e$$
 et $\nu_\mu + n \to p + \mu$, (1)

alors que les réactions $\nu_e + n \to p + \mu$ ou $\nu_\mu + n \to p + e$ ne s'observent jamais. Les réactions (1) sont utilisées en pratique pour détecter les neutrinos.

De même, un méson π^- peut se désintégrer suivant les modes

$$\pi^- \to \mu + \bar{\nu}_{\mu} \pmod{\text{mode dominant}} \text{ et } \pi^- \to e + \bar{\nu}_e ,$$
 (2)

alors que $\pi^- \to \mu + \bar{\nu}_e$ ou $\pi^- \to e + \bar{\nu}_\mu$ ne s'observent jamais. C'est ainsi que l'on produit abondamment des neutrinos (il est facile de produire des mésons π). Dans (2) nous avons fait apparaître les *antiparticules* $\bar{\nu}_\mu$ et $\bar{\nu}_e$. Il y a une symétrie (presque) parfaite entre particules et antiparticules, si bien que, de même que l'électron est associé au neutrino ν_e , de même l'antiélectron e^+ est associé à l'antineutrino $\bar{\nu}_e$. On observe les réactions dites conjuguées de charge de (1) et (2)

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+$$
, $\bar{\nu}_\mu + p \to n + \mu^+$ et $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. (3)

Dans tout ce qui suit, ce que nous faisons pour les neutrinos vaut, de façon symétrique, pour les antineutrinos.

En 1975, on a découvert un troisième lepton, le τ , beaucoup plus lourd, $m_{\mu} \simeq 3500 \ m_e$, lui aussi pourvu d'un neutrino ν_{τ} , et obéissant aux mêmes lois physiques que ses deux congénères plus légers aux effets de masse près. On sait depuis les années 1990 et les mesures faites au grand accélérateur du CERN, le LEP, que ces trois neutrinos $\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$ (et leurs antiparticules) sont les seuls de leur espèce (du moins pour des masses inférieures à 100 GeV/ c^2).

Pendant longtemps, on a pensé que les neutrinos étaient des particules de masse nulle. Les masses de ces particules (multipliées par c^2) sont, en tout état de cause, beaucoup plus faibles que les énergies mises en jeu dans

les expériences où elle apparaissent. Par conséquent, beaucoup de limites expérimentales directes sur ces masses sont compatibles avec des valeurs nulles. Cependant, plusieurs arguments théoriques et cosmologiques suggéraient qu'il pouvait en être autrement. Une grande découverte des dix années est d'avoir prouvé sans conteste que les masses des neutrinos ne sont pas toutes nulles.

Le thème de ce problème est de montrer comment on peut mesurer la différence de masse des neutrinos par un effet d'oscillation quantique. Cette théorie repose sur l'idée que les neutrinos « de saveur » ν_e , ν_μ et ν_τ , qui sont produits ou détectés expérimentalement, ne sont pas des états propres de la masse, mais sont des combinaisons linéaires d'états ν_1 , ν_2 , ν_3 qui, eux, sont états propres de la masse avec des masses m_1, m_2, m_3 .

Les neutrinos que l'on observe sur Terre ont des origines diverses. Ils peuvent être produits dans un accélérateur, dans un réacteur nucléaire, mais aussi dans l'atmosphère par les rayons cosmiques, dans les réactions thermonucléaires au cœur du soleil, ou encore dans des phénomènes astrophysiques comme les explosions de supernovae.

1 Mécanisme des oscillations : neutrinos des réacteurs

Dans cette première partie, nous considérons les oscillations de deux types de neutrinos, en l'occurrence le ν_e et le ν_μ . Ce cas simple nous permettra de comprendre la physique sous-jacente au cas général. Nous analyserons ici les données obtenues auprès de réacteurs nucléaires. L'énergie moyenne des (anti-)neutrinos produits dans ces réacteurs est $E=4~{\rm MeV}$, avec une dispersion du même ordre.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que si m est la masse au repos du neutrino considéré et p et E son impulsion et son énergie, cette masse est si faible que l'énergie d'un neutrino de masse m est

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \simeq pc + \frac{m^2c^4}{2pc}$$
 , (4)

et que le neutrino se propage en très bonne approximation à la vitesse de la lumière c.

Soit \hat{H} l'hamiltonien d'un neutrino libre d'impulsion p, que l'on suppose bien définie. On désigne par $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ les deux états propres de \hat{H} :

$$\hat{H}|\nu_{j}\rangle = E_{j}|\nu_{j}\rangle , \qquad E_{j} = pc + \frac{m_{j}^{2}c^{4}}{2pc} , \qquad j = 1, 2 .$$

 m_1 et m_2 sont les masses des deux états $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$, et on suppose $m_1 \neq m_2$. Les oscillations de neutrinos se propageant librement proviennent de l'effet quantique suivant. Supposons que les états physiques de neutrinos produits (réactions (2)) ou détectés (réactions (1)) ne sont pas $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$, mais des combinaisons linéaires :

$$|\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle \cos\theta + |\nu_2\rangle \sin\theta$$
, $|\nu_\mu\rangle = -|\nu_1\rangle \sin\theta + |\nu_2\rangle \cos\theta$ (5)

Oscillations des neutrinos

où θ est un angle de mélange à déterminer. Ces combinaisons linéaires d'états propres de l'énergie vont osciller en fonction du temps et mener à des phénomènes mesurables.

- **1.1.** A l'instant t = 0, on produit un neutrino d'impulsion p dans l'état $|\nu_e\rangle$. Calculer l'état $|\nu(t)\rangle$ à l'instant t en fonction de $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$.
- 1.2. Quelle est la probabilité P_e que ce neutrino soit détecté dans l'état $|\nu_e\rangle$ à l'instant t? On exprimera le résultat en fonction de l'angle de mélange θ et de la longueur d'oscillation L

$$L = \frac{4\pi\hbar p}{|\Delta m^2| c^2} , \qquad \Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2.$$
 (6)

25

- 1.3. Calculer la longueur d'oscillation L pour l'énergie $E\simeq pc=4$ MeV et une différence d'énergie de masse $\Delta m^2c^4=10^{-4}$ eV².
- **1.4.** On mesure les flux de neutrinos avec un détecteur situé à une distance ℓ du point de production. Exprimer la probabilité P_e en fonction de la distance parcourue $\ell=ct$.
- **1.5.** L'énergie de masse du muon est $m_{\mu}c^2 = 106$ MeV. En déduire que dans ce type d'expérience, on ne peut pas détecter les ν_{μ} par la réaction (1). On rappelle que $m_pc^2 = 938,27$ MeV et $m_nc^2 = 939,57$ MeV.
- **1.6.** Les détecteurs mesurent les flux de neutrinos avec une précision de $\sim 10\%.$
- (a) En prenant $\Delta m^2 c^4 = 10^{-4} \text{ eV}^2$, déterminer la distance minimale ℓ_{\min} à laquelle il faut se placer pour détecter un effet d'oscillation. On supposera que le mélange dans (5) est maximal, c'est-à-dire $\theta = \pi/4$.
- (b) Comment est changée ℓ_{\min} si le mélange n'est pas maximal?
- 1.7. Beaucoup d'expériences de détection de neutrinos issus de centrales nucléaires ont été réalisées, notamment auprès du réacteur franco-belge de Chooz dans les Ardennes et du réacteur du Bugey dans l'Ain. La plus récente provient de la collaboration KamLAND, au Japon. Les résultats sont donnés sur la figure 1.
- (a) Expliquer les résultats de la figure 1, hormis celui de KamLAND.
- (b) L'expérience KamLAND, réalisée en 2002, a consisté à recueillir les neutrinos issus de tous les (nombreux) réacteurs du Japon (et des pays voisins), ce qui revient à prendre une distance moyenne $\ell=180$ km. En rassemblant leurs résultats et les nombreuses données obtenues sur les neutrinos solaires, les physiciens de Kamland arrivent aux valeurs suivantes :

$$|\Delta m^2| c^4 = 7.1 (\pm 0.4) \times 10^{-5} \,\text{eV}^2$$
, $\tan^2 \theta = 0.45 (\pm 0.02)$. (7)

Montrer que ces valeurs sont compatibles avec le résultat $P_e=0.61~(\pm\,0.10)$ de la figure 1.

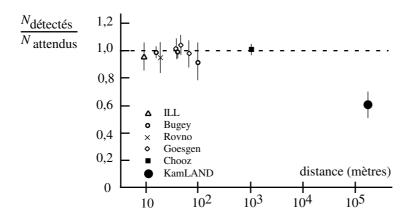


Fig. 1: Rapport entre les nombres de neutrinos électroniques détectés et attendus en l'absence d'oscillations, en fonction de la distance ℓ au réacteur.

2 Oscillations des trois espèces : neutrinos atmosphériques

Nous nous penchons maintenant sur la formalisation du problème général des trois espèces de neutrinos. Nous nommons $|\nu_{\alpha}\rangle$, $\alpha=e,\mu,\tau$ les neutrinos de « saveur » et $|\nu_{i}\rangle$, i=1,2,3 les états propres de la masse. Ces deux bases sont reliées entre elles par la matrice \hat{U} de Maki-Nagawaka-Sakata (MNS),

$$|\nu_{\alpha}\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} |\nu_{i}\rangle , \qquad \hat{U} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}$$
 (8)

Cette matrice est unitaire $(\sum_i U_{\beta i}^* U_{\alpha i} = \delta_{\alpha \beta})$ et peut s'écrire de la façon suivante :

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. La résolution expérimentale complète du problème des oscillations de neutrinos consiste à mesurer les trois angles « de mélange » $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$, la phase δ , et les trois masses m_1, m_2, m_3 . On opère dans des conditions où la relation (4) est toujours valable.

2.1. À l'instant t=0 on produit un neutrino d'impulsion p dans l'état $|\nu(0)\rangle = |\nu_{\alpha}\rangle$. Exprimer, en fonction des éléments de matrice $U_{\alpha i}$, son état à un instant t ultérieur. Écrire la probabilité $P_{\alpha \to \beta}(t)$ d'observer un neutrino de saveur β à l'instant t.

2.2. On définit les longueurs d'oscillations à l'énergie $E \simeq pc$ par :

$$L_{ij} = \frac{4\pi\hbar p}{|\Delta m_{ij}^2|c^2} , \qquad \Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 .$$
 (9)

27

On note qu'il n'y a que deux longueurs d'oscillation indépendantes puisque $\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2 + \Delta m_{31}^2 = 0$. Pour des neutrinos d'énergie E = 4 GeV, calculer les longueurs d'oscillation L_{12} et L_{23} . On prendra pour $|\Delta m_{12}^2|$ le résultat donné en (7), et on choisira $|\Delta m_{23}^2|$ $c^4 = 2.5 \times 10^{-3}$ eV², résultat qui sera justifié dans la suite.

- **2.3.** On dispose de compteurs de neutrinos ayant une précision de l'ordre de 10% et on travaille à l'énergie E=4 GeV. À partir de quelles distances ℓ_{12} et ℓ_{23} du point de production de neutrinos peut-on espérer détecter une oscillation résultant d'une superposition $1 \leftrightarrow 2$ ou $2 \leftrightarrow 3$?
- **2.4.** L'expérience Super-Kamiokande, réalisée en 1998, consiste à détecter les neutrinos « atmosphériques ». Ces neutrinos sont produits par collision de rayons cosmiques de grande énergie avec les noyaux de la haute atmosphère. Dans une série de réactions, des mésons π^{\pm} sont produits abondamment, et se désintègrent suivant la chaîne :

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_{\mu}$$
 suivi de $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}$, (10)

et une chaîne analogue pour les π^+ . Les flux de ces neutrinos sont mesurés par un détecteur souterrain grâce aux réactions (1) et (3).

On suppose pour simplifier que tous les muons se désintégrent avant d'atteindre la terre. En déduire qu'en l'absence d'oscillation de neutrinos, le rapport entre le nombre de neutrinos électroniques et muoniques

$$R_{\mu/e} = \frac{N(\nu_{\mu}) + N(\bar{\nu}_{\mu})}{N(\nu_{e}) + N(\bar{\nu}_{e})}$$

devrait être égal à 2.

2.5. Les corrections au rapport $R_{\mu/e}$ dues au fait qu'une partie des μ atteigne le sol sont calculées très précisément. Une fois cette correction faite, on trouve en comparant les valeurs mesurées et calculées pour $R_{\mu/e}$

$$\frac{(R_{\mu/e})_{\rm mesur\acute{e}}}{(R_{\mu/e})_{\rm calcul\acute{e}}} = 0.64 \; (\pm \, 0.05) \; . \label{eq:resolvent}$$

Pour expliquer cette baisse relative du nombre de ν_{μ} , on songe évidemment à un effet d'oscillation $\nu_{\mu} \rightleftharpoons \nu_{e}$ ou $\nu_{\mu} \rightleftharpoons \nu_{\tau}$. L'expérience de Super-Kamiokande consiste à faire varier la distance de vol des neutrinos en mesurant sélectivement la direction de leur provenance, comme indiqué sur la figure 2. Les neutrinos venant du haut ($\cos \alpha \sim 1$) ont parcouru une distance égale à l'épaisseur de l'atmosphère + la profondeur du détecteur, alors que ceux provenant du bas

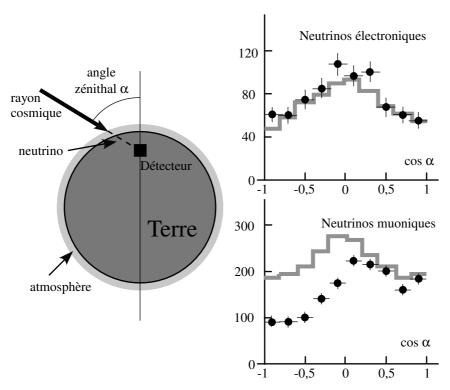


FIG. 2: À gauche : création des neutrinos atmosphériques par collision d'un rayon cosmique sur un noyau de l'atmosphère terrestre. Le détecteur souterrain mesure le flux de neutrinos électroniques et muoniques en fonction de l'angle zénithal α . À droite : nombre de neutrinos atmosphériques détectés dans l'expérience Super-Kamiokande en fonction de l'angle zénithal. La ligne grise représente les nombres attendus en l'absence d'oscillations (figure réalisée d'après K. Tanyaka, XXII Physics in Collisions Conference, Stanford 2002).

 $(\cos \alpha \sim -1)$ ont traversé le diamètre de la Terre (13 400 km). Étant donné la faiblesse des interactions de neutrinos avec la matière, tout se passe comme si les neutrinos voyagent librement sur une distance contrôlable comprise entre quelques dizaines de km et 13 400 km.

L'énergie des neutrinos étant typiquement de 4 GeV dans cette expérience, peut-on observer l'effet d'une oscillation $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$ du type étudié dans la première partie?

2.6. Les distributions angulaires des ν_e et des ν_μ sont représentées sur la figure 2, ainsi que les distributions que l'on attendrait en l'absence d'oscillations. Expliquer pourquoi ces données sont compatibles avec le fait que l'on observe une oscillation $\nu_\mu \rightleftharpoons \nu_\tau$, pas d'oscillation $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\tau$, et pas d'oscillation $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$.

Oscillations des neutrinos 29

2.7. En vertu des résultats précédents, on suppose que l'on a affaire à une oscillation à deux neutrinos : $\nu_{\mu} \rightleftharpoons \nu_{\tau}$. On reprend donc le même formalisme que dans la première partie, mais en changeant l'identité des partenaires. En comparant les flux de neutrinos muoniques arrivant du haut et du bas, estimer l'angle de mélange θ_{23} . Pour prendre en compte la grande dispersion en énergie des rayons cosmiques, donc des neutrinos atmosphériques, on remplacera le facteur oscillant $\sin^2(\pi \ell/L_{23})$ par sa moyenne 1/2 si $\ell \gg L_{23}$. Les résultats complets publiés par l'expérience Super-Kamiokande sont

$$|\Delta m_{23}^2| c^4 = 2.5 \times 10^{-3} \,\text{eV}^2$$
, $\theta_{23} = \pi/4$, $\theta_{13} = 0$.

Sont-ils en accord avec les considérations ci-dessus?

3 Corrigé

1. Mécanisme des oscillations : neutrinos des réacteurs

1.1. Initialement, l'état du neutrino est $|\nu(0)\rangle = |\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle \cos\theta + |\nu_2\rangle \sin\theta$. On a donc à l'instant t

$$|\nu(t)\rangle = |\nu_1\rangle \cos\theta \, e^{-iE_1t/\hbar} + |\nu_2\rangle \sin\theta \, e^{-iE_2t/\hbar}$$
.

1.2. La probabilité de trouver ce neutrino dans l'état $|\nu_e\rangle$ à l'instant t est

$$P_e(t) = |\langle \nu_e | \nu(t) \rangle|^2 = \left| \cos^2 \theta \, e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin^2 \theta \, e^{-iE_2 t/\hbar} \right|^2 ,$$

ce qui donne après un calcul simple :

$$P_e(t) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar}\right) .$$

On a $E_1-E_2=(m_1^2-m_2^2)c^4/(2pc)$. En définissant la longueur d'oscillation par $L=4\pi\hbar p/(|\Delta m^2|\,c^2)$, on obtient

$$P_e(t) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi ct}{L}\right)$$
.

- **1.3.** Pour une énergie E=pc=4 MeV et une différence de masse telle que $\Delta m^2c^4=10^{-4}$ eV², on obtient une longueur d'oscillation L=100 km.
- **1.4.** Le temps de vol est $t = \ell/c$. La probabilité $P_e(\ell)$ est donc

$$P_e(\ell) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi\ell}{L}\right) . \tag{11}$$

1.5. Une énergie du ν_{μ} de seulement 4 MeV est au dessous du seuil de la réaction $\nu_{\mu} + n \rightarrow p + \mu$. On ne peut donc pas mesurer le flux de ν_{μ} avec cette réaction dans les expériences faites auprès de réacteurs.

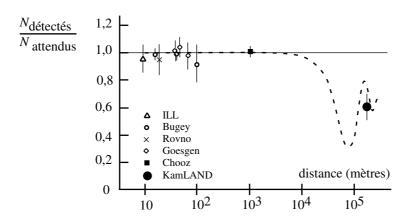


FIG. 3: Points expérimentaux de la figure 1 et prédiction théorique déduite de (11) (sinusoïde amortie par les effets de dispersion énergétique). Cette courbe représente le meilleur ajustement des données de neutrinos solaires. On remarquera que les données de KamLAND correspondent à la deuxième oscillation de la courbe.

1.6. Pour détecter un déficit significatif dans le flux de neutrinos ν_e , il faut

$$\sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\pi\ell}{L}\right) > 0.1 \ .$$

(a) Pour le mélange maximal $\theta = \pi/4$, c'est-à-dire $\sin^2(2\theta) = 1$, cela impose $\pi \ell/L > 0.32$ ou encore $\ell > L/10$. Pour E = 4 MeV et $\Delta m^2 c^4 = 10^{-4}$ eV², on trouve $\ell > 10$ km. Les distances typiques pour observer ce phénomène convenablement sont de l'ordre d'une fraction de la longueur d'oscillation.

(b) Si le mélange n'est pas maximal, il faudra prendre des distances ℓ plus grandes que L/10. Notons que si l'angle de mélange est trop petit $(\sin^2(2\theta) < 0.1 \text{ soit } \theta < \pi/10)$, l'amplitude de l'oscillation est trop faible pour être détectée, quelle que soit la distance ℓ choisie. Il faut dans ce cas améliorer la précision de la détection pour pouvoir conclure.

1.7. (a) Dans toutes les expériences sauf KamLAND, la distance est inférieure à 1 km. Par conséquent, dans toutes ces expériences, on a $|1-P_e| \le 10^{-3}$. L'effet d'oscillation est alors indétectable, si l'estimation $|\Delta m^2| \, c^4 \sim 10^{-4} \, \mathrm{eV^2}$ est valable.

(b) Pour $|\Delta m^2| c^4 = 7.1 \times 10^{-5} \ {\rm eV^2}$, $\tan^2 \theta = 0.45 \ {\rm et} \ \ell = 180 \ {\rm km}$, on obtient $P_e = 0.50 \ {\rm ce}$ qui est en accord avec la mesure. La prédiction théorique prenant en compte les effets de dispersion énergétique est tracée sur la figure 3. On voit, en passant, combien il est important de bien contrôler les barres d'erreur dans ce type d'expérience.

31 Oscillations des neutrinos

2. Oscillations des trois espèces : neutrinos atmosphériques

2.1. À l'instant t = 0, on a :

$$|\nu(0)\rangle = |\nu_{\alpha}\rangle = \sum_{j} U_{\alpha j} |\nu_{j}\rangle ,$$

et par conséquent, à l'instant t:

$$|\nu(t)\rangle = e^{-ipct/\hbar} \sum_{j} U_{\alpha j} e^{-im_j^2 c^3 t/(2\hbar p)} |\nu_j\rangle$$
.

On en déduit que la probabilité $P_{\alpha \to \beta}$ d'observer un neutrino de saveur β à l'instant t est

$$P_{\alpha \to \beta}(t) = \left| \langle \nu_{\beta} | \nu(t) \rangle \right|^2 = \left| \sum_j U_{\beta j}^* U_{\alpha j} \, e^{-i m_j^2 c^3 t / (2\hbar p)} \right|^2 .$$

- **2.2.** On a $L_{ij} = 4\pi\hbar E/(|\Delta m_{ij}^2| c^3)$. Les longueurs d'oscillation sont proportionnelles à l'énergie. Il suffit donc de se reporter au résultat de la question 1.3, en faisant la conversion d'un facteur 1000 pour passer de 4 MeV à 4 GeV.
- Pour $|\Delta m_{12}^2| c^4 = 7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2$, on trouve $L_{12} = 140~000$ km. Pour $|\Delta m_{23}^2| c^4 = 2.5 \times 10^{-3} \text{eV}^2$, on trouve $L_{23} = 4~000$ km.
- 2.3. On cherche ici la distance minimale nécessaire pour observer une oscillation. On suppose donc que les angles de mélange θ_{12} et θ_{23} sont égaux à $\pi/4$, ce qui correspond à un mélange maximal. On a vu en première partie que si ce mélange n'est pas maximal, la visibilité des oscillations est réduite et que la distance nécessaire pour observer le phénomène d'oscillation est augmentée. En reprenant le raisonnement de la première partie, on trouve que la modification du flux de neutrinos d'une espèce donnée sera détectable au bout d'une distance ℓ_{ij} telle que $\sin^2(\pi \ell_{ij}/L_{ij}) \ge 0.1$ c'est-à-dire $\ell_{ij} \ge L_{ij}/10$. Cela correspond à $\ell_{12} \geq 14~000$ km pour l'oscillation résultant d'une superposition $1 \leftrightarrow 2$, et $\ell_{23} \ge 400$ km pour l'oscillation résultant d'une superposition $2 \leftrightarrow 3$.
- 2.4. Le facteur 2 entre les flux attendus pour les neutrinos muoniques et électroniques résulte d'un simple comptage : chaque particule π^- (resp. π^+) donne naissance à un ν_{μ} , un $\bar{\nu}_{\mu}$ et un $\bar{\nu}_{e}$ (resp. un ν_{μ} , un $\bar{\nu}_{\mu}$ et un ν_{e}). En pratique, une partie des muons atteint le sol avant désintégration, ce qui vient modifier ce rapport. Bien entendu, cet effet est pris en compte dans le traitement précis des données.
- 2.5. Pour une énergie de 4 GeV, on a trouvé que la distance minimale pour observer l'oscillation résultant de la superposition $1\leftrightarrow 2$ est 14 000 km. On constate donc que les oscillations $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$, correspondant au mélange 1 \leftrightarrow 2 et étudiées dans la première partie, ne pourront pas être observées sur des distances terrestres. À cette échelle d'énergie (4 GeV) et pour des temps

d'évolution correspondant au plus à la traversée de la terre (0,04 s), on peut négliger la différence d'énergie $E_1 - E_2$ et les phénomènes d'oscillation qu'elle entraı̂ne.

En revanche, si l'estimation $|\Delta m_{23}^2| c^4 > 10^{-3} \text{eV}^2$ est correcte, les échelles de distances terrestres permettent en principe d'observer des oscillations résultant des superpositions $2 \leftrightarrow 3$ ou $1 \leftrightarrow 3$, correspondant à $\nu_{\mu} \rightleftharpoons \nu_{\tau}$ ou $\nu_{e} \rightleftharpoons \nu_{\tau}$.

2.6. La distribution angulaire (donc en distance ℓ) observée pour les ν_e ne montre aucun signe de déviation par rapport à la prédiction faite en négligeant toute oscillation. En revanche, il y a une nette indication d'oscillation des ν_{μ} : il y a un déficit clair de neutrinos muoniques venant du bas, c'est-à-dire ceux qui ont eu un long temps d'évolution.

Le déficit de neutrinos muoniques n'est pas dû à l'oscillation $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$ de la première partie. En effet, nous avons vu à la question précédente que celle-ci est négligeable sur l'échelle de temps considérée. Les données expérimentales de la figure 2 confirment d'ailleurs ce point : le déficit de neutrinos muoniques venant du bas n'est pas associé à une augmentation des neutrinos électroniques. Il ne peut donc s'agir¹ que d'une oscillation $\nu_\mu \rightleftharpoons \nu_\tau$.

Aucune oscillation $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\tau$ n'apparaît pas sur les données expérimentales. Dans le cadre du modèle envisagé ici, cela s'interprète comme la signature d'un angle de mélange θ_{13} très faible ou nul.

2.7. Reprenons le résultat de la question 1.4, et notamment la probabilité (11). La probabilité pour qu'un neutrino ν_{μ} , produit dans l'atmosphère terrestre, soit détecté en tant que ν_{μ} vaut :

$$P(\ell) = 1 - \sin^2(2\theta_{23}) \overline{\sin^2\left(\frac{\pi\ell}{L_{23}}\right)}, \qquad (12)$$

où la moyenne porte sur la distribution en énergie du neutrino. Si on mesure le flux de neutrinos venant du haut, on a $\ell \ll L_{23}$, ce qui donne $P_{\text{haut}} = 1$. Si le neutrino vient du bas, le terme en $\sin^2(\pi \ell/L_{23})$ se moyenne à 1/2 et on trouve :

$$P_{\text{bas}} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta_{23}) \ .$$

Les données expérimentales nous indiquent que, pour $-1 \le \cos \alpha \le -0.5$, $P_{\rm bas} = 1/2$. La distribution est très plate à une valeur (100 événements) moitié de celle obtenue vers le haut (200 événements).

On en déduit que $\sin^2(2\theta_{23}) = 1$, soit $\theta_{23} = \pi/4$, c'est-à-dire un angle de mélange $\nu_{\mu} \rightleftharpoons \nu_{\tau}$ maximum. Les résultats publiés par Super-Kamiokande sont évidemment en plein accord avec cette analyse.

¹Pour être complets, signalons que les physiciens ont aussi examiné la possibilité d'une oscillation avec un neutrino "stérile", qui n'aurait aucune interaction directement détectable avec la matière.

Commentaires

La grande difficulté de ces expériences provient de la très faible section efficace d'interaction des neutrinos avec la matière. Les détecteurs sont de gigantesques masses d'eau, où l'on observe au mieux une dizaine d'événements par jour (par exemple $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$). La « précision » d'un détecteur provient principalement de la statistique, c'est-à-dire du nombre total d'événements enregistrés.

33

En 1998, la première observation indiscutable de l'oscillation de neutrinos $\nu_{\tau} \rightleftharpoons \nu_{\mu}$ a été annoncée au Japon par l'expérience Super-Kamiokande (Y. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998)). Cette expérience utilisait un détecteur contenant 50 000 tonnes d'eau, où 11 500 photomutiplicateurs détectaient la lumière Cherenkov des électrons ou muons produits. Une soixantaine de ν_{τ} ont également été détectés, mais en nombre insuffisant pour donner un supplément d'information. Le résultat de Super-Kamiokande a été raffiné par la suite. Une expérience d'accélérateurs a confirmé les valeurs obtenues (K2K collaboration, Phys. Rev. Lett. **90**, 041801 (2003)).

L'expérience KamLAND est une collaboration entre des physiciens japonais, américains et chinois. Le détecteur est un ballon de 1000 m³ rempli de scintillateur liquide (liquide organique C-H). Le sigle signifie KAMioka Liquid scintillator Anti-Neutrino Detector. Référence : KamLAND Collaboration, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003); voir aussi http://kamland.lbl.gov/.

Un grand nombre de résultats proviennent d'expériences sur les neutrinos solaires. Nous n'avons pas abordé ce problème, extrêmement important mais trop complexe pour notre propos. Voir par exemple J. N. Bahcall, Astrophys. Jour. **467**, 475 (1996) et M. B. Smy, Mod. Phys. Lett. **A 17**, 2163 (2002).

Signalons enfin l'attribution du Prix Nobel 2002 à Raymond Davis Jr. et à Masatoshi Koshiba, pionniers de cette physique des neutrinos.

Pour en savoir plus : Thierry Lasserre et Daniel Vignaud, *La mystérieuse identité des neutrinos*, Pour La Science, octobre 2003, p. 58; André Rougé, *Physique subatomique*, Chapitre 8 (Éditions de l'École polytechnique, 2003).

2. Interférométrie de neutrons

Dans la fin des années 70, Overhauser et ses collaborateurs ont réalisé plusieurs expériences fondamentales d'interférences de neutrons qui ont mis un terme à des débats qui duraient depuis les années 1930. Nous étudions ici deux d'entre elles. L'une met en évidence de façon quantique le potentiel gravitationnel, l'autre le changement de signe de la fonction d'onde du neutron lors de la rotation de 2π de son spin.

Nous considérons ici un interféromètre constitué de trois lames cristallines de silicium parallèles et équidistantes (Fig. 1). On suppose que le faisceau de neutrons est monocinétique.

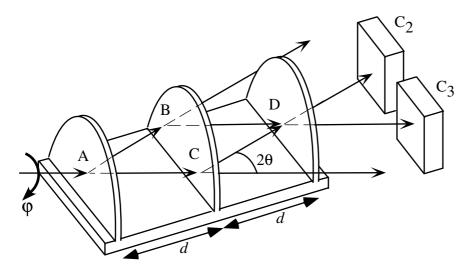


Fig. 1: Schéma d'un interféromètre à neutrons. Les trois « oreilles » sont issues d'un mono-cristal de silicium. C_2 et C_3 sont des compteurs de neutrons.

Pour une valeur particulière de l'angle d'incidence θ , appelée angle de Bragg, une onde plane $\Psi_{\rm inc} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar}$, où E est l'énergie des neutrons et \boldsymbol{p} leur impulsion, est scindée en deux ondes sortantes symétriques par rapport à la normale au cristal (Fig. 2).

L'onde transmise $\Psi_{\rm I}$ et l'onde diffractée $\Psi_{\rm II}$ ont des amplitudes complexes que l'on peut écrire respectivement $\alpha=\cos\chi$ et $\beta=i\sin\chi$, où l'angle χ est réel, soit

$$\Psi_{\rm I} = \alpha \, e^{i({m p}\cdot{m r}-Et)/\hbar} \qquad \Psi_{\rm II} = \beta \, e^{i({m p}'\cdot{m r}-Et)/\hbar} \ ,$$
 (1)

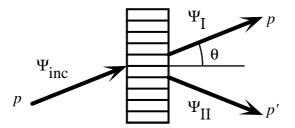


FIG. 2: Séparation d'un faisceau incident en deux faisceaux émergents, par diffraction de Bragg.

avec $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, car la diffusion des neutrons sur les noyaux du cristal est élastique. Les coefficients de transmission T et de diffraction R sont : $T = |\alpha|^2$, $R = |\beta|^2$, T + R = 1.

Dans l'interféromètre de la figure 1, le faisceau de neutrons incident est horizontal. Il est scindé en sous-faisceaux dont deux se recombinent au point D. Les détecteurs C_2 et C_3 comptent les flux de neutrons. Les neutrons utilisés ont une longueur d'onde de de Broglie $\lambda=0,144$ nm. Les faisceaux considérés correspondent à des fonctions d'onde consistant en des ondes planes quasimonochromatiques dans la direction de propagation et d'extension finie dans les directions transverses. Pour simplifier, on n'écrira que des ondes planes monochromatiques du type (1).

1 Interférométrie de neutrons

- 1.1. Les flux de neutrons mesurés sont proportionnels à l'intensité des ondes qui atteignent les compteurs. En posant égale à 1 l'intensité du faisceau incident (les unités sont arbitraires), donner les amplitudes A_2 et A_3 des ondes arrivant en C_2 et C_3 en fonction de α et β (il est inutile d'écrire les termes de propagation $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)/\hbar}$). En déduire les intensités mesurées I_2 et I_3 en fonction des coefficients T et R.
- 1.2. On suppose que l'on provoque un déphasage δ de l'onde sur le trajet AC, c'est-à-dire qu'elle est multipliée par $e^{i\delta}$ en C.
- (a) Calculer les nouvelles amplitudes A_2 et A_3 en fonction de α, β et δ .
- (b) Montrer que les intensités mesurées I_2 et I_3 sont de la forme :

$$I_2 = \mu - \nu(1 + \cos \delta)$$
, $I_3 = \nu(1 + \cos \delta)$,

et exprimer μ et ν en fonction de T et R.

(c) Calculer la somme $I_2 + I_3$ et commenter le résultat.

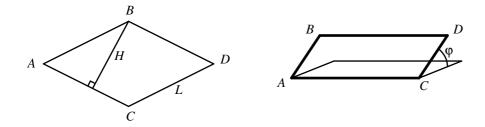


FIG. 3: Rotation de l'interféromètre autour de la direction incidente, pour observer des effets liés à la gravité.

2 Effet gravitationnel

On provoque la différence de phase δ entre les faisceaux ACD et ABD en faisant tourner l'interféromètre d'un angle φ autour de l'axe d'incidence. Cela entraı̂ne une différence de hauteur entre BD et AC, qui restent tous deux horizontaux comme on le voit sur la figure 3, et un déphasage gravitationnel.

- **2.1.** Soit d la distance entre les lames, dont on néglige l'épaisseur. Montrer que le côté L du losange ABDC et sa hauteur H issue de B (Fig. 3) sont reliés à d et à l'angle de Bragg θ par $L = d/\cos\theta$, $H = 2d\sin\theta$. Dans l'expérience, les valeurs de d et de θ sont d = 3,6 cm et $\theta = 22,1$ degrés.
- **2.2.** Pour une inclinaison d'angle φ du plan du losange par rapport à l'horizontale, on définit le potentiel gravitationnel par V=0 le long de AC et $V=V_0$ le long de BD.
- (a) Calculer la différence Δp des impulsions des neutrons dans les faisceaux AC et BD (on suppose que $\Delta p \ll p$). On exprimera le résultat en fonction de l'impulsion p sur AC, de H, $\sin \varphi$, M et de l'accélération de la pesanteur g.
- (b) Calculer numériquement la vitesse $\sqrt{2gH}$.
- (c) Commenter l'approximation $\Delta p \ll p$.
- 2.3. Calculer la différence de phase δ entre les chemins ABD et ACD. On pourra procéder en deux étapes :
- (a) Comparer la différence de marche entre AB et CD.
- (b) Comparer la différence de marche entre BD et AC.
- **2.4.** La variation en φ de la différence I_2-I_3 des intensités mesurées expérimentalement en C_2 et C_3 est représentée sur la figure 4 (les données ne montrent pas un minimum exactement à $\varphi=0$ en raison des difficultés de calibrage). Déduire de cette expérience une valeur de l'accélération de la pesanteur q.

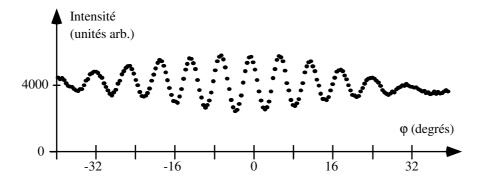


Fig. 4: Flux de neutrons mesuré sur le compteur C_2 , en fonction de l'angle φ .

3 Rotation de $2n\pi$ d'un spin 1/2

Le dispositif est maintenant en position horizontale. On provoque la différence de phase en plaçant le long de AC une zone de longueur l où règne un champ magnétique constant \boldsymbol{B}_0 parallèle à Oz, comme le montre la figure 5. Les neutrons, de spin 1/2 (observable $\hat{\boldsymbol{S}}=(\hbar/2)\hat{\boldsymbol{\sigma}}$), ont un moment magnétique $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\mu_0\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, où les composantes de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sont les matrices de Pauli. Les axes sont représentés sur la figure 5:y est l'axe du faisceau incident, z dans le plan du losange ABDC et x perpendiculaire à ce plan.

On suppose que les variables de spin et les variables spatiales sont décorrélées, c'est-à-dire qu'en tout point de l'espace la fonction d'onde s'écrit de façon factorisée :

$$\begin{pmatrix} \Psi_+(\boldsymbol{r},t) \\ \Psi_-(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar} \begin{pmatrix} a_+(t) \\ a_-(t) \end{pmatrix} \ .$$

On néglige les effets transitoires dus à l'entrée et à la sortie de la zone de champ.

On prépare les neutrons du faisceau incident dans l'état de spin

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} ,$$

qui est état propre de $\hat{\mu}_x$ avec la valeur propre $+\mu_0$. Le passage par les lames cristallines ne change pas l'état de spin.

3.1. Étude de l'évolution dans l'aimant créant le champ B_0 .

- (a) Écrire l'hamiltonien d'interaction magnétique du spin avec le champ magnétique. Quelle est, en fonction du temps, l'évolution de l'état de spin $|\Sigma\rangle$ d'un neutron dans l'aimant ?
- (b) Calculer les trois composantes de $\langle \mu \rangle$ dans cet état, et décrire le mouvement de $\langle \mu \rangle$ dans l'aimant en fonction du temps. On posera $\omega = -2\mu_0 B_0/\hbar$.

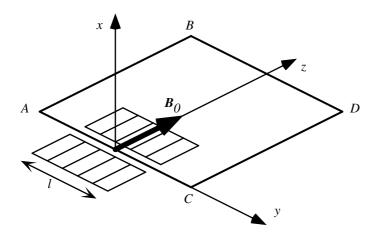


FIG. 5: Dispositif expérimental permettant d'observer la précession de Larmor du spin du neutron.

- **3.2.** À la sortie de l'aimant, quelle est la probabilité $P_x(+\mu_0)$ de trouver $\mu_x = +\mu_0$ en mesurant la composante du moment magnétique selon l'axe x? On posera $T = Ml\lambda/(2\pi\hbar)$ et on exprimera le résultat en fonction de l'angle $\delta = \omega T/2$.
- **3.3.** Pour quelles valeurs $b_n = nb_1$ (n entier quelconque) du champ B_0 cette probabilité est-elle égale à 1? À quel mouvement de la valeur moyenne du spin correspondent ces valeurs b_n ? Calculer b_1 avec $\mu_0 = -9.65 \times 10^{-27}$ J/T, l = 2.8 cm, $\lambda = 0.144$ nm.
- **3.4.** Écrire l'état des neutrons en C_2 et C_3 . On notera p_2 et p_3 les impulsions correspondantes.
- **3.5.** Les compteurs C_2 et C_3 enregistrent des flux de neutrons I_2 et I_3 et sont insensibles aux variables de spin. Exprimer la différence des intensités $I_2 I_3$ en fonction de δ et des coefficients R et T.
- **3.6.** La mesure expérimentale de I_2-I_3 en fonction du champ B_0 appliqué est donnée en Fig. 6. Un ajustement de la courbe donne un écart $\Delta B=6,4\pm0,2$ mT entre deux maxima. En comparant les valeurs b_n de la question 3.3 avec cette mesure, et en rappelant le résultat d'une mesure de μ_x pour ces valeurs, expliquer pourquoi cette expérience démontre que le vecteur d'état d'un spin 1/2 change de signe dans une rotation d'un multiple impair de 2π autour d'un axe.

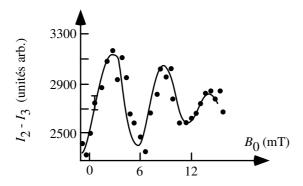


FIG. 6: Différence des taux de comptages I_2 et I_3 en fonction du champ magnétique appliqué. La ligne continue est un simple guide visuel.

4 Corrigé

1. Interférométrie de neutrons

1.1. Les faisceaux $ACDC_2$ et $ABDC_2$ interférent. En omettant les facteurs de propagation, on a en C_2 une amplitude : $A_2 = \alpha^2 \beta + \beta^3 = \beta(\alpha^2 + \beta^2)$. De même pour $ACDC_3$ et $ABDC_3$: $A_3 = 2\alpha\beta^2$. Les intensités enregistrées par chaque compteur sont donc :

$$I_2 = R - 4R^2T$$
 ; $I_3 = 4R^2T$.

1.2. (a) En présence d'un déphasage δ en C, ces expressions deviennent

$$A_2 = \alpha^2 \beta e^{i\delta} + \beta^3 = \beta(\alpha^2 e^{i\delta} + \beta^2), \quad A_3 = \alpha \beta^2 (1 + e^{i\delta}).$$

(b) Les intensités sont

$$I_2 = R - 2R^2T(1 + \cos \delta)$$
 ; $I_3 = 2R^2T(1 + \cos \delta)$.

(c) Le fait que I_2+I_3 ne dépend pas du déphasage δ exprime tout simplement la conservation du nombre total de neutrons arrivant en D.

2. Effet gravitationnel

- 2.1. Résultat de trigonométrie élémentaire.
- 2.2. Vitesse et impulsion des neutrons :
- (a) Les collisions sont élastiques, l'énergie d'un neutron est donc une constante du mouvement dans tout le processus. Cette énergie est $E_{AC}=p^2/2M$ et $E_{BD}=(p-\Delta p)^2/2M+MgH\sin\varphi$. Par conséquent

$$\Delta p = \frac{M^2 g \ H \sin \varphi}{p} \ .$$

(b) La vitesse $\sqrt{2gH}$ est de l'ordre de 0,5 m/s.

(c) La vitesse des neutrons est $v=p/M=h/M\lambda\simeq 2700$ m/s. La variation de vitesse est par conséquent très faible : $\Delta v=gH/v\simeq 2\times 10^{-4}$ m/s pour $\varphi=\pi/2$. On a bien $\Delta p/p=\Delta v/v\sim 10^{-3}\ll 1$: l'approximation utilisée est valable.

2.3. (a) Le potentiel gravitationnel est le même le long des chemins AB et CD. Dans les deux cas, l'état du neutron est une onde plane avec une impulsion $p = h/\lambda$ juste avant A et C. La même équation de Schrödinger détermine la fonction d'onde à l'extrémité des deux segments. Ceci implique que la phase accumulée sur ces deux chemins est la même.

(b) Si nous comparons les segments AC et BD, le raisonnement précédent ne s'applique plus, puisque l'état initial (impulsion) du neutron n'est pas le même en A et en B. L'état initial est $\exp(ipz/\hbar)$ pour AC et $\exp[i(p-\Delta p)z/\hbar]$ pour BD. Après avoir parcouru une distance $L = \overline{AC} = \overline{BD}$, la différence de phase entre les deux chemins est

$$\delta = \frac{\Delta p \; L}{\hbar} = \frac{M^2 g \lambda d^2}{\pi \hbar^2} \, \tan \theta \, \sin \varphi \; .$$

2.4. A partir du résultat précédent, on a $\delta_2 - \delta_1 = A g (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$, où $A = M^2 \lambda d^2 \tan \theta / (\pi \hbar^2)$. Par conséquent

$$g = \frac{\delta_2 - \delta_1}{A(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} .$$

Il y a 9 oscillations, c'est-à-dire $\delta_2 - \delta_1 = 18\pi$ entre $\varphi_1 = -32$ degrés et $\varphi_2 = 24$ degrés, d'où g = 9.8 m/s². Dans cette expérience, la précision de la mesure était effectivement de l'ordre de 10^{-3} .

3. Rotation de $2n\pi$ d'un spin 1/2

3.1. (a) Puisque \boldsymbol{B} est le long de z, l'hamiltonien magnétique est

$$\hat{H}_M = - \pmb{\mu} \cdot \pmb{B}_0 = \frac{\hbar \omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{d'où} \qquad |\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} \\ e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \; .$$

(b) Par un calcul direct de $\langle \mu \rangle$ ou en utilisant le théorème d'Ehrenfest $((d/dt)\langle \mu \rangle = \langle [\hat{\mu}, \hat{H}] \rangle / i\hbar)$ on obtient

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \omega \mu_y \qquad \frac{d\mu_y}{dt} = -\omega \mu_x \qquad \frac{d\mu_z}{dt} = 0 \ .$$

Initialement $\langle \mu_x \rangle = \mu_0$ et $\langle \mu_y \rangle = \langle \mu_z \rangle = 0$, par conséquent

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \mu_0 (\cos \omega t \; \boldsymbol{u}_x + \sin \omega t \; \boldsymbol{u}_y) \; .$$

3.2. Lorsque les neutrons quittent la zone de champ, la probabilité de trouver $\mu_x = \mu_0$ est

$$P_x(+\mu_0) = |\langle +x|\Sigma(T)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\omega T}{2} = \cos^2\delta$$
, avec $T = \frac{l}{v} = \frac{lM\lambda}{h}$.

3.3. Cette probabilité est égale à 1 si $\delta=n\pi$ ($\Omega t=2n\pi$), ou encore $B_0=n$ b_1 avec

$$b_1 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{\mu_0 M l \lambda} = 3{,}45~{\rm mT}~.$$

Pour $\delta = n\pi$, le spin a tourné de $2n\pi$ autour de Oz par précession de Larmor.

3.4. Les formules sont semblables à ce qui a été établi plus haut (§ 1.2). La phase de l'élément supérieur du spineur écrit dans la base $\{|+\rangle_z, \ |-\rangle_z\}$ est décalée de $+\delta$, celle de l'élément inférieur de $-\delta$:

Amplitude en
$$C_2$$
: $e^{i(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2 e^{i\delta} \\ \beta^2 + \alpha^2 e^{-i\delta} \end{pmatrix}$, Amplitude en C_3 : $e^{i(\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar} \frac{\alpha \beta^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\delta} \\ 1 + e^{-i\delta} \end{pmatrix}$.

3.5. Puisque le détecteur est insensible aux variables de spin, on doit ajouter les probabilités correspondant à $S_z=\pm 1$, chacune étant le module carré de l'amplitude correspondante. Tout compte fait, on obtient les intensités suivantes pour le flux total de neutrons dans les compteurs :

$$I_2 = R - 2R^2T(1 + \cos\delta)$$
, $I_3 = 2R^2T(1 + \cos\delta)$,

 et

$$I_2 - I_3 = R - 4R^2T(1 + \cos \delta)$$
.

3.6. Il y a un minimum de $I_2 - I_3$ chaque fois que $\cos \delta = 1$, soit $\delta = 2n\pi$. Cela correspond à une interférence constructive dans la voie 3. De même, il y a un maximum si $\cos \delta = -1$, soit $\delta = (2n+1)\pi$ (interférence destructive dans la voie 3).

Si $\delta=n\pi$, ce qui se produit pour $B_0=nb_1$, on est *certain* de trouver les neutrons dans le $m\hat{e}me$ état de spin que dans le faisceau initial. Or, une fois sur deux, alternativement, l'interférence est destructive. Le résultat expérimental $\Delta B=6,4\pm0,2$ mT confirme que si le spin a tourné de $4n\pi$, il y a interférence constructive. En revanche, s'il a tourné de $2(2n+1)\pi$, il y a interférence destructive : le vecteur d'état a changé de signe, bien qu'une mesure du spin moyen sur le faisceau ayant traversé l'aimant donne exactement les mêmes résultats qu'une mesure faite sur le faisceau incident.

Références

A.W. Overhauser, A.R. Collela et S.A. Werner, Phys. Rev. Lett. **33**, 1237 (1974); **34**, 1472 (1975); **35**, 1053 (1975). Voir aussi D. Greenberger et A.W. Overhauser, Pour la Science, juillet 1980.

3. Anomalie de moment magnétique de l'électron

Dans le cadre de l'équation de Dirac, le facteur gyromagnétique g de l'électron est égal à 2. Autrement dit, le rapport entre le moment magnétique et le spin de l'électron est gq/(2m)=q/m, où q et m sont la charge et la masse de la particule (q<0). Lorsqu'on calcule l'interaction de l'électron avec le champ électromagnétique quantifié, on trouve une valeur de g légèrement différente de 2. Le but de ce problème est d'étudier la mesure de la grandeur g-2.

1 Précession du spin et de l'impulsion d'un électron dans un champ magnétique

On considère un électron plongé dans un champ magnétique \boldsymbol{B} statique, uniforme et dirigé suivant Oz. L'hamiltonien de cet électron est :

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} - q\hat{\boldsymbol{A}})^2}{2m} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{B} ,$$

où \hat{A} est le potentiel vecteur, $\hat{A} = B \times \hat{r}/2$, et $\hat{\mu}$ est l'opérateur moment magnétique de spin. Cet opérateur est relié au spin \hat{S} par $\hat{\mu} = \gamma \hat{S}$, avec $\gamma = (1+a)q/m$. La quantité sans dimension a est nommée anomalie de moment magnétique. Dans le cadre de l'équation de Dirac, on prédit a=0. L'électrodynamique quantique prévoit, au premier ordre en α , constante de structure fine, $a = \alpha/(2\pi)$. L'opérateur vitesse de l'électron est $\hat{v} = (\hat{p} - qA)/m$. On pose $\omega = qB/m$.

1.1. Vérifier les relations de commutation suivantes

$$[\hat{v}_x, \hat{H}] = i\hbar\omega \,\hat{v}_y \quad , \quad [\hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar\omega \,\hat{v}_x \quad , \quad [\hat{v}_z, \hat{H}] = 0 \quad .$$

1.2. On considère les trois quantités

$$C_1 = \langle \hat{S}_z \hat{v}_z \rangle$$
 , $C_2 = \langle \hat{S}_x \hat{v}_x + \hat{S}_y \hat{v}_y \rangle$, $C_3 = \langle \hat{S}_x \hat{v}_y - \hat{S}_y \hat{v}_x \rangle$.

Écrire les équations d'évolution de C_1, C_2, C_3 . Montrer que ces trois équations forment un système différentiel linéaire à coefficients constants. On notera $\Omega = a\omega$.

1.3. Quelle est la forme générale de l'évolution de $\langle \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \rangle$?

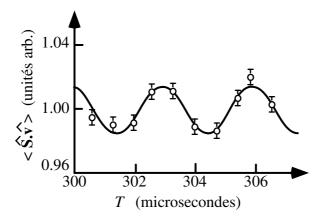


Fig. 1: Variation de la quantité $\langle \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \rangle$ en fonction du temps T.

1.4. Un faisceau monocinétique d'électrons est préparé dans un état de spin tel qu'on connaisse $C_1(0)$, $C_2(0)$ et $C_3(0)$ à l'instant initial t=0. Le faisceau interagit avec le champ \boldsymbol{B} durant l'intervalle [0,T]. On néglige les interactions mutuelles des électrons du faisceau. À l'instant T, on mesure une quantité proportionnelle à $\langle \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} \rangle$.

Le résultat d'une telle mesure est présenté sur la figure 1 en fonction de T pour une valeur du champ magnétique B de 9,4 mT. Déduire de cette courbe une valeur approchée de l'anomalie a.

1.5. La mesure expérimentale est-elle en accord avec la prédiction de l'électrodynamique quantique?

2 Corrigé

1.1. L'hamiltonien de l'électron est $\hat{H} = m\hat{v}^2/2 - \gamma B\hat{S}_z$. On établit sans difficulté les relations de commutation suivantes

$$\begin{split} [\hat{v}_x,\hat{v}_y] &= i\hbar q \ B/m^2 = i\hbar\omega/m \ , \quad [\hat{v}_x,\hat{v}_z] = [\hat{v}_y,\hat{v}_z] = 0 \ , \\ [\hat{v}_x,\hat{v}_y^2] &= [\hat{v}_x,\hat{v}_y]\hat{v}_y + \hat{v}_y[\hat{v}_x,\hat{v}_y] = 2i\hbar\omega \ \hat{v}_y/m \ . \end{split}$$

Par conséquent

$$[\hat{v}_x, \hat{H}] = i\hbar\omega \,\hat{v}_y$$
 , $[\hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar\omega \,\hat{v}_x$, $[\hat{v}_z, \hat{H}] = 0$.

1.2. On utilise la relation $i\hbar(d/dt)\langle\hat{O}\rangle = \langle[\hat{O},\hat{H}]\rangle$ valable pour toute observable (théorème d'Ehrenfest). L'évolution de C_1 est simple

$$[\hat{S}_z \, \hat{v}_z, \hat{H}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} C_1 = 0 \; , \quad C_1(t) = A_1 \; ,$$

où A_1 est une constante. Pour C_2 et C_3 , on opère de la manière suivante :

$$[\hat{S}_x \hat{v}_x, \hat{H}] = [\hat{S}_x \hat{v}_x, m\hat{v}^2/2] - \gamma B[\hat{S}_x \hat{v}_x, \hat{S}_z] = i\hbar\omega(\hat{S}_x \hat{v}_y + (1+a)\hat{S}_y \hat{v}_x) .$$

De même

$$\begin{split} [\hat{S}_y \hat{v}_y, \hat{H}] &= -i\hbar\omega(\hat{S}_y \hat{v}_x + (1+a)\hat{S}_x \hat{v}_y) \ , \\ [\hat{S}_x \hat{v}_y, \hat{H}] &= -i\hbar\omega(\hat{S}_x \hat{v}_x - (1+a)\hat{S}_y \hat{v}_y) \ , \\ [\hat{S}_y \hat{v}_x, \hat{H}] &= i\hbar\omega(\hat{S}_y \hat{v}_y - (1+a)\hat{S}_x \hat{v}_x) \ . \end{split}$$

Par conséquent

$$[\hat{S}_x\hat{v}_x + \hat{S}_y\hat{v}_y, \hat{H}] = -i\hbar\omega a(\hat{S}_x\hat{v}_y - \hat{S}_y\hat{v}_x) ,$$

$$[\hat{S}_x\hat{v}_y - \hat{S}_y\hat{v}_x, \hat{H}] = i\hbar\omega a(\hat{S}_x\hat{v}_x + \hat{S}_y\hat{v}_y) ,$$

et

$$\frac{dC_2}{dt} = -\Omega C_3 \; , \quad \frac{dC_3}{dt} = \Omega C_2 \; .$$

1.3. On en déduit $d^2C_2/dt^2 = -\Omega^2C_2$, dont la solution est

$$C_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi) \quad ,$$

où A_2 et φ sont des constantes. D'où la forme générale de l'évolution de $\langle \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v} \rangle$:

$$\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \rangle (t) = C_1(t) + C_2(t) = A_1 + A_2 \cos(\Omega t + \varphi)$$
.

Autrement dit, en l'absence d'anomalie, pour a=0, le spin et la vitesse précesseraient exactement à la même vitesse angulaire. La fréquence cyclotron (précession de la vitesse) et la fréquence de Larmor (précession du moment magnétique) seraient les mêmes. La mesure de la différence de ces deux fréquences donne un accès direct à la valeur de l'anomalie.

- **1.4.** On calcule l'anomalie à partir de la relation $a = \Omega/\omega$. La mesure de $\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \rangle$ présente un comportement périodique dans le temps de période $\tau \simeq 3 \ \mu \mathrm{s}$, soit $\Omega = 2\pi/\tau \simeq 2 \times 10^6 \ \mathrm{s}^{-1}$. Dans un champ $B = 9.4 \ \mathrm{mT}$, $\omega = 1.65 \times 10^9 \ \mathrm{s}^{-1}$, soit $a = \Omega/\omega \simeq 1.2 \times 10^{-3}$.
- **1.5.** Cette valeur est en très bon accord avec la valeur prévue théoriquement $a=\alpha/2\pi=1.16\times 10^{-3}$.

Commentaires

Les données expérimentales présentées dans ce problème proviennent de l'article de D.T. Wilkinson et H.J. Crane, Phys. Rev. **130**, 852 (1963). La valeur de l'anomalie est maintenant connue avec une précision impressionnante :

$$a^{\text{theo.}} = 0,001\ 159\ 652\ 2\underline{00}\ (40)$$

 $a^{\text{exp.}} = 0,001\ 159\ 652\ 1\underline{93}\ (10)$

Le calcul théorique comporte toutes les corrections jusqu'à l'ordre 3 en α .

4. Désintégration d'un atome de tritium

Le noyau de l'atome de tritium est l'isotope $^3{\rm H}$ de l'hydrogène, de charge Z=1. Ce noyau est radioactif et se transforme en hélium 3 par désintégration bêta :

$$^{3}\mathrm{H} \rightarrow ^{3}\mathrm{He} + e^{-} + \overline{\nu}$$

où $\overline{\nu}$ est un antineutrino. L'énergie de l'électron émis est de l'ordre de 15 keV et le noyau ³He est de charge Z=2. La désintégration est un processus instantané. L'électron β de désintégration est émis à grande vitesse et quitte le système atomique très rapidement. Par conséquent, il se forme un atome d'hélium ionisé ³He⁺ et le but du problème est de déterminer l'état électronique de cet ion ³He⁺.

Dans tout le problème, on considère les noyaux comme infiniment lourds par rapport à l'électron, de masse m. On note $a_1 = \hbar^2/me^2$ le rayon de Bohr et $E_I = mc^2\alpha^2/2 \simeq 13,6$ eV l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène où α est la constante de structure fine $[e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)]$, où q est la charge de l'électron].

Dans l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ de l'atome de tritium, la fonction d'onde de l'électron $(n=1,\ell=0,m=0)$ est la même que celle de l'atome d'hydrogène usuel :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}} e^{-r/a_1} . \tag{1}$$

À l'instant t_0 de la désintégration du noyau et de la formation de l'ion ${}^3\mathrm{He}^+$, nous supposons que la fonction d'onde de l'électron atomique est pratiquement la même que celle du tritium et qu'elle est toujours donnée par (1). On note $|n,\ell,m\rangle$ les états de l'atome d'hélium ionisé qui constitue un système hydrogénoïde : un électron dans le champ coulombien d'un noyau de charge 2.

1 Le bilan énergétique dans la désintégration du tritium.

- **1.1.** Écrire l'hamiltonien \hat{H}_1 de l'électron atomique avant désintégration et l'hamiltonien \hat{H}_2 de cet électron après désintégration (quand l'énergie potentielle a subi une brusque variation).
- **1.2.** Quels sont, en fonction de E_I , les niveaux d'énergie E_n de l'atome ${}^3\mathrm{He}^+$? Donner son rayon de Bohr et sa fonction d'onde $\varphi_{100}(r)$ dans l'état fondamental.

1.3. Calculer la valeur moyenne $\langle E \rangle$ de l'énergie de l'électron après désintégration. On pourra faire usage de

$$\langle \psi_0 | \frac{1}{r} | \psi_0 \rangle = \frac{1}{a_1}$$
 et $\hat{H}_2 = \hat{H}_1 - \frac{e^2}{r}$.

Donner la valeur de $\langle E \rangle$ en eV.

- **1.4.** Exprimer en fonction de $|\psi_0\rangle$ et $|n,\ell,m\rangle$ l'amplitude de probabilité $c(n,\ell,m)$ et la probabilité $p(n,\ell,m)$ de trouver l'électron dans l'état $|n,\ell,m\rangle$ de ${}^3\mathrm{He}^+$ après désintégration. Montrer que seules les probabilités $p_n=p(n,0,0)$ sont non nulles.
- **1.5.** Calculer la probabilité p_1 de trouver l'électron dans l'état fondamental de $^3{\rm He^+}.$ Quelle est la contribution correspondante à $\langle E \rangle$?
- 1.6. Un calcul numérique donne les valeurs suivantes :

$$p_2 = \frac{1}{4}$$
 , $\sum_{n=3}^{\infty} p_n = 0.02137$, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{p_n}{n^2} = 0.00177$.

Calculer la probabilité $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ de trouver l'électron dans les états liés de ${}^{3}\text{He}^{+}$ et la contribution $\langle E_L \rangle$ correspondante à $\langle E \rangle$. Commenter ces résultats.

1.7. Expérimentalement, dans l'étude de la désintégration β de l'atome de tritium, on constate que dans environ 3% des cas, deux électrons sont émis. Leurs énergies cinétiques moyennes sont très différentes, l'une de $\langle E_c \rangle \simeq 15$ keV, l'autre de $\langle E_c \rangle \simeq 34,3$ eV, laissant un noyau d'hélium complètement ionisé ${}^3{\rm He}^{++}$, comme si l'électron de désintégration β « expulsait » l'électron atomique. Expliquer ce phénomène.

2 Corrigé

1.1. Les deux hamiltoniens sont

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \qquad \hat{H}_2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{2e^2}{r} \ .$$

1.2. Les niveaux d'un atome hydrogénoïde de charge Z sont $E_n=-Z^2E_I/n^2$, soit dans ce cas $E_n=-4E_I/n^2$. Le rayon de Bohr de l'ion $^3{\rm He}^+$ est $a_2=a_1/2$ et la fonction d'onde est

$$\varphi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_2^3}} e^{-r/a_2}.$$

1.3. L'énergie moyenne de l'électron dans la nouvelle configuration est

$$\langle E \rangle = \langle \psi_0 | \hat{H}_2 | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{H}_1 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | \frac{e^2}{r} | \psi_0 \rangle ,$$

soit

$$\langle E \rangle = -E_I - \frac{e^2}{a_1} = -3E_I \sim -40.8 \text{ eV} .$$

1.4. Par définition, l'amplitude de probabilité est $c(n, \ell, m) = \langle n, \ell, m | \psi_0 \rangle$ et la probabilité $p(n, \ell, m) = |\langle n, \ell, m | \psi_0 \rangle|^2$. La forme analytique est

$$c(n,\ell,m) = \int R_{n\ell}(r) \left(Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) \right)^* \psi_0(\mathbf{r}) d^3r ,$$

où les $R_{n\ell}(r)$ sont les fonctions d'onde radiales de l'atome hydrogénoïde ${}^{3}\text{He}^{+}$. Puisque $\psi_{0}(\mathbf{r})$ est de la forme $\psi_{0}(\mathbf{r}) = R_{0}(r) Y_{0,0}(\theta,\varphi)$, l'orthogonalité des harmoniques sphériques entraı̂ne que $p(n,\ell,m) = 0$ si $(\ell,m) \neq (0,0)$.

1.5. L'amplitude de probabilité de rester dans l'état fondamental est

$$(p_1)^{1/2} = 4\pi \int \frac{e^{-r/a_2}}{\sqrt{\pi a_2^3}} \frac{e^{-r/a_1}}{\sqrt{\pi a_1^3}} r^2 dr = \frac{16\sqrt{2}}{27}$$

d'où la probabilité $p_1=0,70233$ et une contribution à $\langle E\rangle$ de $p_1E_1=-38,2$ eV.

1.6. Avec les valeurs données dans l'énoncé, on obtient

$$p_2 E_2 = -E_I/4 = -3.4 \text{ eV}$$
, $p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 0.9737$.

La contribution des états liés à $\langle E \rangle$ est

$$\langle E_L \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} p_n E_n = -3,0664 \ E_I = -41,7 \ \text{eV} \ .$$

La probabilité p totale est plus petite que 1, il existe donc une probabilité (1-p)=0.026 que l'électron atomique ne soit pas lié dans l'état final. La contribution $\langle E_L \rangle = -41.7$ eV est plus faible que $\langle E \rangle$ de 0.9 eV. La probabilité (1-p) correspond à un électron d'énergie positive, c'est-à-dire à une ionisation de $^3\mathrm{He^+}$ en $^3\mathrm{He^{++}}$ avec émission de l'électron atomique.

1.7. Il y a nécessairement une probabilité 1-p=0.026 que l'électron atomique ne soit pas lié dans l'hélium, donc que cet atome soit ionisé à l'instant initial. Si l'énergie cinétique moyenne de l'électron expulsé est de $E_c\simeq 34.3$ eV, cela représente une contribution $(1-p)E_c\simeq +0.89$ eV à la valeur moyenne de l'énergie, ce qui comble le « déficit » apparent calculé précédemment :

$$\langle E_L \rangle + 0.89 \text{ eV} = -40.8 \text{ eV} = \langle E \rangle$$
.

Commentaire

Ce type de réaction a été intensivement étudié dans les années 1980-90, en vue de la détermination de la masse du neutrino. En notant M_1 et M_2 les masses des deux noyaux, E_β l'énergie de l'électron de désintégration, E celle de l'électron atomique, lié ou non, et $E_{\bar{\nu}}$ celle du neutrino, la conservation de l'énergie s'écrit, pour chaque événement :

$$M_1c^2 - E_I = M_2c^2 + E_\beta + E_{\bar{\nu}} + E$$
.

Pour une valeur donnée de E, la détermination du maximum de l'énergie de l'électron β (qui couvre tout le spectre jusqu'à 19 keV dans le cas de l'atome de tritium) permet en principe d'évaluer le minimum $m_{\bar{\nu}}c^2$ de $E_{\bar{\nu}}$ au travers de ce bilan énergétique. Une difficulté réside dans le fait que les expériences sont faites avec du tritium moléculaire (HT ou TT), dont les fonctions d'onde ne sont pas connues analytiquement, contrairement au cas atomique considéré ici.

5. Les horloges atomiques

On s'intéresse au niveau d'énergie fondamental de l'électron externe d'un atome alcalin (rubidium, césium,...). Le noyau atomique a un spin s_n ($s_n = 3/2$ pour ⁸⁷Rb, $s_n = 7/2$ pour ¹³³Cs), auquel est associé un moment magnétique μ_n . Comme pour l'atome d'hydrogène, ce niveau fondamental est clivé par l'interaction entre le moment magnétique de l'électron externe μ_e et le moment magnétique du noyau μ_n . Ce clivage du niveau fondamental permet de réaliser des horloges atomiques de grande précision dont les applications sont multiples : système G.P.S., mesure de constantes physiques....

N.B. Dans tout le problème, les effets liés aux électrons du coeur interne seront négligés.

1 Le clivage hyperfin du niveau fondamental

1.1. Donner la dégénérescence du niveau fondamental si on néglige l'effet de l'interaction magnétique entre le noyau et l'électron de valence. On notera

$$|m_e; m_n\rangle = |\text{électron}: s_e = 1/2, m_e\rangle \otimes |\text{noyau}: s_n, m_n\rangle$$

une base de l'espace du spin total (électron externe + noyau).

1.2. On prend maintenant en compte l'interaction entre le moment magnétique de l'électron $\mu_{\rm e}$ et le moment magnétique du noyau $\mu_{\rm n}$. Comme pour l'atome d'hydrogène, on peut écrire l'hamiltonien correspondant (restreint au niveau fondamental) :

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar^2} \, \hat{\boldsymbol{S}}_{e} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_{n} \; ,$$

où A a la dimension d'une énergie, et où $\hat{\boldsymbol{S}}_{e}$ et $\hat{\boldsymbol{S}}_{n}$ désignent respectivement les opérateurs spin de l'électron et du noyau. On va chercher les énergies propres de cet hamiltonien.

On introduit les opérateurs $\hat{S}_{e,\pm}=\hat{S}_{e,x}\pm i\hat{S}_{e,y}$ et $\hat{S}_{n,\pm}=\hat{S}_{n,x}\pm i\hat{S}_{n,y}$

(a) Montrer que

$$\hat{H} = \frac{A}{2\hbar^2} \left(\hat{S}_{e,+} \, \hat{S}_{n,-} + \hat{S}_{e,-} \, \hat{S}_{n,+} + 2 \hat{S}_{e,z} \, \hat{S}_{n,z} \right) .$$

(b) Montrer que les deux états

$$|m_e = 1/2; m_n = s_n\rangle$$
 et $|m_e = -1/2; m_n = -s_n\rangle$

sont états propres de \hat{H} , avec des valeurs propres que l'on précisera.

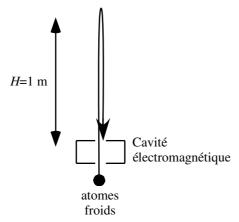


FIG. 1: Schéma de principe d'une horloge à fontaine atomique, utilisant des atomes refroidis par laser.

- (c) Déterminer l'action de \hat{H} sur l'état $|m_e| = 1/2; m_n \rangle$ avec $m_n \neq s_n$. Déterminer l'action de \hat{H} sur l'état $|m_e| = -1/2; m_n \rangle$ avec $m_n \neq -s_n$.
- (d) En déduire que la recherche des énergies propres de \hat{H} se ramène à la diagonalisation de matrices 2×2 du type :

$$\frac{A}{2} \begin{pmatrix} m_{\rm n} & \sqrt{s_{\rm n}(s_{\rm n}+1) - m_{\rm n}(m_{\rm n}+1)} \\ \sqrt{s_{\rm n}(s_{\rm n}+1) - m_{\rm n}(m_{\rm n}+1)} & -(m_{\rm n}+1) \end{pmatrix} .$$

- 1.3. Montrer que \hat{H} clive le niveau fondamental en deux sous-niveaux d'énergies $E_1=E_0+As_{\rm n}/2$ et $E_2=E_0-A(1+s_{\rm n})/2$. Retrouver le cas particulier de l'atome d'hydrogène.
- **1.4.** Quelles sont les dégénérescences des deux sous-niveaux E_1 et E_2 ?
- **1.5.** Montrer que les états d'énergie E_1 et E_2 sont des états propres du carré du spin total $\hat{\boldsymbol{S}}^2 = \left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{e}} + \hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{n}}\right)^2$. Indiquer le spin s correspondant.

2 La fontaine atomique

Les atomes sont préparés dans le niveau d'énergie E_1 , puis lancés vers le haut (figure 1). A la montée et à la descente, ils traversent une cavité dans laquelle on injecte une onde électromagnétique de pulsation ω , proche de $\omega_0 = (E_1 - E_2)/\hbar$. On détecte à la fin de la descente le nombre d'atomes ayant basculé du niveau E_1 vers le niveau E_2 . Dans toute la suite, le mouvement des atomes dans l'espace (chute libre) est traité classiquement. Seule l'évolution de leur état interne est traitée quantiquement.

Pour simplifier, on ne considère qu'un seul état dans le sous-niveau d'énergie

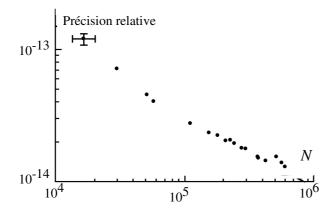


Fig. 2: Précision relative $\Delta\omega/\omega$ d'une horloge à fontaine atomique, en fonction du nombre d'atomes N envoyés dans chaque paquet.

 E_1 . Cet état (noté $|1\rangle$) est couplé par l'onde électromagnétique à un seul état (noté $|2\rangle$) du sous-niveau E_2 . On fixe par convention l'origine des énergies en $(E_1+E_2)/2$, soit $E_1=\hbar\omega_0/2$, $E_2=-\hbar\omega_0/2$. On suppose que la durée ϵ de la traversée de la cavité est très brève et que cette traversée fait évoluer le vecteur d'état de l'atome de la manière suivante :

$$\begin{split} |\psi(t)\rangle &= \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle \longrightarrow |\psi(t+\epsilon)\rangle = \alpha' |1\rangle + \beta' |2\rangle \ , \\ \text{avec} \ : \qquad \left(\begin{array}{c} \alpha' \\ \beta' \end{array} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc} 1 & -ie^{-i\omega t} \\ -ie^{i\omega t} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) \ . \end{split}$$

2.1. L'état initial de l'atome est $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. On considère un aller-et-retour de durée T, comportant la traversée de la cavité entre l'instant t=0 et $t=\epsilon$, un temps d'évolution libre de durée $T-2\epsilon$, et une deuxième traversée de la cavité entre les instants $T-\epsilon$ et T. En prenant la limite $\epsilon \to 0$, montrer que l'état de l'atome après cet aller-et-retour est donné par :

$$|\psi(T)\rangle = i e^{-i\omega T/2} \sin((\omega - \omega_0)T/2) |1\rangle - i e^{i\omega T/2} \cos((\omega - \omega_0)T/2) |2\rangle$$
 (1)

- **2.2.** Donner la probabilité $P(\omega)$ pour trouver un atome dans l'état $|2\rangle$ à l'instant T. Déterminer la demi-largeur à mi-hauteur $\Delta \omega$ de $P(\omega)$ autour de la résonance $\omega = \omega_0$. Que vaut $\Delta \omega$ pour une fontaine de 1 mètre de haut? On rappelle l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.
- **2.3.** On envoie un paquet de N atomes $(N\gg 1)$. Après l'aller-et-retour du paquet, chaque atome est dans l'état donné en eq. (1). On mesure séparément les nombres d'atomes dans les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, que l'on note N_1 et N_2 (avec $N_1+N_2=N$). Quelle est la distribution statistique des variables aléatoires N_1 et N_2 ? Donner leur moyenne $\langle N_i \rangle$ et leur écart-type ΔN_i . On posera $\phi=(\omega-\omega_0)T/2$ et on exprimera les résultats en fonction de $\cos\phi$, $\sin\phi$ et N

- **2.4.** On déduit l'écart à résonance $|\omega \omega_0|$ à l'aide de $\cos((\omega \omega_0)T) = \langle N_2 N_1 \rangle / N$. Justifier cette formule. Evaluer l'incertitude $\Delta |\omega \omega_0|$ introduite par le caractère aléatoire de la variable $N_2 N_1$. Montrer que cette incertitude dépend de N, mais pas de ϕ .
- **2.5.** On a représenté sur la figure 2 la précision d'une fontaine atomique en fonction du nombre N d'atomes par paquet. Cette variation avec N est-elle en accord avec les résultats précédents?

3 Le système GPS.

Ce système utilise 24 satellites en orbite terrestre à 20 000 km d'altitude, contenant chacun une horloge atomique. Chaque satellite émet à intervalles réguliers un signal électromagnétique composé d'un « top » d'horloge et de l'indication de sa position. Un récepteur terrestre, qui ne dispose pas d'une horloge atomique, détecte les signaux émis par plusieurs satellites et compare les instants d'arrivée des différents « tops » d'horloge.

- **3.1.** Quel nombre minimal de satellites doit-on voir à un instant donné pour se localiser en latitude, en longitude, et en altitude à la surface du globe terrestre?
- **3.2.** On suppose que la précision relative de chaque horloge est $\Delta\omega/\omega=10^{-13}$ et que ces horloges sont synchronisées toutes les 24 heures. Quel est l'ordre de grandeur de la précision de la localisation juste avant une nouvelle synchronisation des horloges?

4 La dérive des constantes fondamentales

Certains modèles cosmologiques qui prédisent une (faible) variation dans le temps de la constante de structure fine $\alpha=e^2/(\hbar c)\sim 1/137$. Pour tester cette hypothèse, on peut comparer deux horloges atomiques, l'une utilisant des atomes de rubidium (Z=37), l'autre des atomes de césium (Z=55). En effet, on montre que le clivage hyperfin d'un atome alcalin varie approximativement comme :

$$E_1 - E_2 = \hbar \omega_0 \propto \alpha^2 \left(1 + \frac{11}{6} (\alpha Z)^2 \right)$$
 pour $(\alpha Z)^2 \ll 1$.

En comparant pendant un an une horloge à rubidium et une autre à césium, on n'a détecté aucune variation significative du rapport $R=\omega_0^{\rm (Cs)}/\omega_0^{\rm (Rb)}$. Plus précisément, la variation relative $|\delta R|/R$ est inférieure à l'incertitude de mesure, estimée à 3×10^{-15} . Quelle borne supérieure peut-on mettre sur le taux de variation relatif $|\dot{\alpha}/\alpha|$?

5 Corrigé

1. Le clivage hyperfin du niveau fondamental

- **1.1.** L'espace de Hilbert correspondant au niveau fondamental est le produit tensoriel de l'espace associé au spin de l'électron et de l'espace associé au spin du noyau. Sa dimension d est donc le produit des dimension : $d = 2 \times (2s_n + 1)$.
- 1.2. Niveaux d'énergie de l'hamiltonien hyperfin.
- (a) En utilisant

$$\hat{S}_{e,x} = \frac{1}{2} \left(\hat{S}_{e,+} + \hat{S}_{e,-} \right) , \quad \hat{S}_{e,y} = \frac{i}{2} \left(\hat{S}_{e,-} - \hat{S}_{e,+} \right) ,$$

et une relation similaire pour $\hat{S}_{n,x}$ et $\hat{S}_{n,y}$, on arrive au résultat annoncé.

(b) L'action de $\hat{S}_{e,+}\hat{S}_{n,-}$ et de $\hat{S}_{e,-}\hat{S}_{n,+}$ sur $|m_e=1/2;m_n=s_n\rangle$ donne le vecteur nul. Il en va de même sur $|m_e=-1/2;m_n=-s_n\rangle$. Seul contribue donc le terme $\hat{S}_{e,z}\hat{S}_{n,z}$ et on trouve :

$$\hat{H} | m_{\rm e} = 1/2; m_{\rm n} = s_{\rm n} \rangle = \frac{As_{\rm n}}{2} | m_{\rm e} = 1/2; m_{\rm n} = s_{\rm n} \rangle$$

$$\hat{H} | m_{\rm e} = -1/2; m_{\rm n} = -s_{\rm n} \rangle = \frac{As_{\rm n}}{2} | m_{\rm e} = -1/2; m_{\rm n} = -s_{\rm n} \rangle .$$

(c) On trouve:

$$\hat{H}|1/2; m_{\rm n}\rangle = \frac{Am_{\rm n}}{2} |1/2; m_{\rm n}\rangle + \frac{A}{2} \sqrt{s_{\rm n}(s_{\rm n}+1) - m_{\rm n}(m_{\rm n}+1)} |-1/2; m_{\rm n}+1\rangle \hat{H}|-1/2; m_{\rm n}\rangle = -\frac{Am_{\rm n}}{2} |-1/2; m_{\rm n}\rangle + \frac{A}{2} \sqrt{s_{\rm n}(s_{\rm n}+1) - m_{\rm n}(m_{\rm n}-1)} |1/2; m_{\rm n}-1\rangle.$$

- (d) On déduit de la question précédente que le sous-espace \mathcal{E}_{m_n} de dimension 2 engendré par $|1/2; m_n\rangle$ et $|-1/2; m_n+1\rangle$ est globalement stable sous l'action de \hat{H} . La recherche des états propres de \hat{H} consiste donc à diagonaliser la série de matrices 2×2 correspondant à son action à l'intérieur de ces sous-espaces. La matrice de la restriction de \hat{H} au sous-espace \mathcal{E}_{m_n} est bien celle donnée dans l'énoncé.
- **1.3.** Les valeurs propres des matrices données dans l'énoncé sont en fait indépendantes de $m_{\rm n}$ et valent $As_{\rm n}/2$ et $-A(1+s_{\rm n})/2$. Dans le cas particulier $s_{\rm n}=1/2$ (atome d'hydrogène), ces deux valeurs propres sont A/4 et -3A/4.
- **1.4.** Il y a $2s_n$ matrices 2×2 à diagonaliser, donnant chacune un vecteur propre associé à $As_n/2$ et un vecteur propre associé à $-A(1+s_n)/2$. Par

ailleurs, on a trouvé deux vecteurs propres indépendants, $|1/2,s_n\rangle$ et $|-1/2,-s_n\rangle$, associés à la valeur propre $As_n/2$. On a donc finalement :

$$As_n/2$$
 dégénérée $2s_n + 2$ fois $-A(1+s_n/2)$ dégénérée $2s_n$ fois

On retrouve bien la dimension totale du sous-espace associé au niveau fondamental, $2(2s_n + 1)$.

1.5. Le carré du spin total s'écrit :

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_e^2 + \hat{S}_n^2 + 2\hat{S}_e \cdot \hat{S}_n = \hat{S}_e^2 + \hat{S}_n^2 + \frac{2\hbar^2}{A}\hat{H}$$
.

Les opérateurs $\hat{\pmb{S}}_e^2$ et $\hat{\pmb{S}}_n^2$ sont proportionnels à l'identité et valent respectivement :

$$\hat{\mathbf{S}}_{e}^{2} = \frac{3\hbar^{2}}{4}$$
 $\hat{\mathbf{S}}_{n}^{2} = \hbar^{2} s_{n} (s_{n} + 1)$.

Un état propre de \hat{H} est donc état propre de \hat{S}^2 . Plus précisément, un état associé pour \hat{H} à la valeur propre $As_n/2$ est état propre de \hat{S}^2 avec la valeur propre $\hbar^2(s_n+1/2)(s_n+3/2)$, soit un spin total $s=s_n+1/2$. Un état associé pour \hat{H} à la valeur propre $-A(1+s_n)/2$ est état propre de \hat{S}^2 avec la valeur propre $\hbar^2(s_n-1/2)(s_n+1/2)$, soit un spin total $s=s_n-1/2$.

2. La fontaine atomique

2.1. Dans la limite $\epsilon \to 0$, le vecteur d'état final de l'atome s'obtient par simple produit matriciel :

$$\left(\begin{array}{c} \alpha' \\ \beta' \end{array} \right) \ = \ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 1 & -ie^{-i\omega T} \\ -ie^{i\omega T} & 1 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cc} e^{-i\omega_0 T/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 T/2} \end{array} \right) \\ \times \left(\begin{array}{cc} 1 & -i \\ -i & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \, ,$$

qui correspond à la traversée de la cavité à l'instant 0, à une évolution libre entre 0 et T, puis une seconde traversée de la cavité à l'instant T. On trouve ainsi le vecteur d'état indiqué dans l'énoncé.

- **2.2.** On trouve $P(\omega) = |\beta'|^2 = \cos^2((\omega \omega_0)T/2)$. Cette probabilité vaut 1 si on est strictement à résonance $(\omega = \omega_0)$. Elle vaut 1/2 si $\omega = \omega_0 \pm \pi/(2T)$. Pour un mouvement de chute libre montant à une hauteur H=1 m, puis revenant à son point de départ, on a $T=2\sqrt{2H/g}$, soit T=0.9 s, ou encore $\Delta\omega=1.7$ s⁻¹.
- **2.3.** La détection de chaque atome donne le résultat E_1 avec une probabilité $\sin^2 \phi$ et E_2 avec une probabilité $\cos^2 \phi$. Comme les atomes sont indépendants, la distribution des variables aléatoires N_1 et N_2 est binomiale. On a donc :

$$\langle N_1 \rangle = N \sin^2 \phi \qquad \langle N_2 \rangle = N \cos^2 \phi \qquad \Delta N_1 = \Delta N_2 = \sqrt{N} \left| \cos \phi \, \sin \phi \right| \, .$$

2.4. On a effectivement $\langle N_2 - N_1 \rangle / N = \cos 2\phi = \cos((\omega - \omega_0)T)$. Les fluctuations sur la variable $N_2 - N_1$ induisent une fluctuation sur la détermination de $\omega - \omega_0$, les deux fluctuations étant reliées par :

$$\frac{\Delta(N_2 - N_1)}{N} = 2 |\sin(2\phi)| \Delta\phi.$$

Puisque $\Delta(N_2-N_1)=2$ $\Delta N_2=\sqrt{N}$ $|\sin 2\phi|,$ on déduit $\Delta\phi=1/(2\sqrt{N}),$ ou encore :

 $\Delta|\omega - \omega_0| = \frac{1}{2T\sqrt{N}} \ .$

La précision est d'autant meilleure que T est long et que N est grand.

2.5. On constate bien sur la figure 2 que la précision de l'horloge est meilleure quand N croît, avec une variation en $N^{-1/2}$. Pour $N=10^6$ et T=0.9 s, la formule ci-dessus donne 5.6×10^{-4} s. La fréquence hyperfine du césium est $\omega_0=2\pi\times 9.2$ GHz, ce qui correspond bien à $\Delta\omega/\omega\sim 10^{-14}$.

3. Le système GPS.

- **3.1.** Il faut voir au moins quatre satellites. Avec deux satellites, la différence des instants de réception t_1 et t_2 des signaux émis par les deux satellites localisent l'observateur sur une surface (par exemple, le plan médiateur du segment joignant les deux satellites si $t_1 = t_2$); trois satellites localisent l'observateur sur une ligne, et le quatrième satellite permet de lever toute ambiguïté (on exclut que l'observateur puisse être à l'intérieur du globe terrestre ou en orbite lointaine).
- **3.2.** Un satellite émet un signal à un instant t_0 . Ce signal est reçu par un observateur situé à une distance D à l'instant $t_1 = t_0 + D/c$. Si l'horloge du satellite n'est pas à l'heure, le signal n'est pas émis à l'instant t_0 , mais à un instant légèrement différent t_0' . L'observateur, qui dispose d'une référence de temps correcte via un autre satellite, interprète le temps $t_1 t_0'$ comme une distance $D' = c(t_1 t_0')$, et il fait donc une erreur $c(t_0' t_0)$ sur sa position. Pour une horloge de précision relative 10^{-13} , le retard ou l'avance typique au bout de 24 heures (=86 000 secondes) est 86000×10^{-13} s, soit une erreur de positionnement de 2,5 mètres.

Notons que les horloges atomiques embarquées dans les satellites GPS sont notablement moins performantes que les fontaines à atomes froids des laboratoires au sol.

4. La dérive des constantes fondamentales

En utilisant l'expression de l'énoncé pour la dépendance en α des fréquences $\omega_{\rm Cs}$ et $\omega_{\rm Rb}$, on trouve que la variation éventuelle du rapport R est reliée à la variation de α par :

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \left[\frac{11\alpha^2}{3} \frac{Z_{\rm Cs}^2 - Z_{\rm Rb}^2}{(1 + 11(\alpha Z_{\rm Rb})^2/6) (1 + 11(\alpha Z_{\rm Cs})^2/6)} \right] .$$

La quantité entre crochets vaut 0,22, ce qui conduit à une majoration de $\dot{\alpha}/\alpha$ de 1,4 × 10⁻¹⁴/an, soit 4,3 × 10⁻²²/seconde. Ce taux de variation, extrapolé sur une durée de l'ordre de l'age de l'univers, correspond à une variation de 10⁻⁴. Un tel effet peut en principe être détecté par spectroscopie d'objets très lointains

Remarque : une détermination plus précise de la dépendance en α de $\omega_{\rm Cs}$, pour lequel l'approximation $Z\alpha\ll 1$ n'est pas très bonne, donne pour le terme entre crochets 0,45.

5. Références

Les données expérimentales concernant la stabilité d'une horloge à atomes froids sont extraites de l'article : G. Santarelli $et\ al.$, Phys. Rev. Lett. **82**, 4619 (1999).

Pour la recherche de la dérive des constantes fondamentales, voir J. D. Prestage, R. L. Tjoelker, and L. Maleki, Phys. Rev. Lett. **74**, 3511 (1995).

6. L'atome d'hélium et la molécule He₂

Contrairement à l'atome d'hydrogène, pour lequel les niveaux d'énergie sont calculables analytiquement, il faut recourir à des méthodes approchées (ou un calcul numérique) pour déterminer les niveaux de l'atome d'hélium. Nous présentons ici la méthode la plus simple, qui consiste à traiter perturbativement l'interaction coulombienne entre électrons. En dépit du caractère très arbitraire de cette approximation, nous verrons que l'accord avec l'expérience est remarquable.

Nous nous intéresserons ensuite à la molécule He₂, ainsi qu'au trimère He₃, dont l'existence a longtemps été controversée et qui ont récemment été mis en évidence expérimentalement.

1 L'état fondamental de l'atome d'hélium

- **1.1.** On considère un atome à un électron, de masse m_e et de charge -q (q > 0). La charge du noyau est Zq, avec Z entier. On pose $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$.
- (a) En suivant la notation du cours, on désigne par $\psi_{n,\ell,m}(r)$ la partie orbitale des états de l'électron d'énergie négative (état liés). Indiquer les observables associées aux deux nombres quantiques ℓ et m et les valeurs possibles de ces nombres.
- (b) Donner en fonction de Z et du rayon de Bohr $a_1 = \hbar^2/(m_{\rm e}e^2)$ l'expression de la partie orbitale $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})$ de l'état fondamental de l'atome.
- (c) Rappeler sans démonstration comment varient avec Z l'énergie et la taille « caractéristique » de cet état fondamental.
- 1.2. L'atome d'hélium est formé par un noyau de charge Z=2 et deux électrons. Dans cette question, on prend seulement en compte l'interaction coulombienne entre le noyau et chaque électron. On néglige en particulier la répulsion électrostatique entre les deux électrons. Le noyau est supposé infiniment lourd et immobile en r=0.
- (a) Écrire l'hamiltonien \hat{H} des deux électrons. Mettre \hat{H} sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, où \hat{H}_i (i = 1, 2) fait intervenir les opérateurs position \hat{r}_i et impulsion \hat{p}_i de l'électron i.
- (b) Quelle est l'énergie E_f du niveau fondamental de \hat{H} dans cette approximation d'électrons indépendants? En prenant en compte le principe de Pauli, donner la dégénérescence de ce niveau et l'expression du (ou des) état(s) propre(s) (orbital+spin).

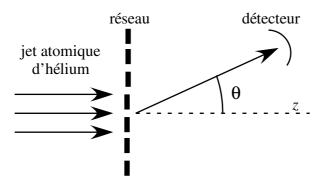


Fig. 1: Diffraction d'un jet d'hélium par un réseau.

- (c) On rappelle que $m_{\rm e}e^4/(2\hbar^2)=13,6$ eV. En déduire la valeur numérique de E_f .
- 1.3. On prend en compte l'interaction coulombienne entre les deux électrons : $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^2/|\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|$. Calculer l'effet de \hat{V} sur le niveau fondamental de \hat{H} au premier ordre de la théorie des perturbations. On donne l'intégrale :

$$\iint \frac{e^{-2(\rho_1+\rho_2)}}{|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|} \; d^3\rho_1 \; d^3\rho_2 = \frac{5\pi^2}{8} \; .$$

Donner en électron-volts la valeur de l'énergie du niveau fondamental à cet ordre du calcul.

- **1.4.** En plus de sa charge -q, chaque électron possède un moment magnétique $-q\hbar/(2m_{\rm e})$.
- (a) Estimer la valeur de l'énergie d'interaction magnétique entre ces deux moments magnétiques. On ne cherchera pas à calculer les moyennes spatiales susceptibles d'apparaître et on se contentera de donner un ordre de grandeur de l'effet.
- (b) Comparer l'énergie d'interaction magnétique entre électrons au terme d'interaction coulombienne. On utilisera $\epsilon_0\mu_0c^2=1$ et on exprimera le rapport entre ces deux termes en fonction de la constante de structure fine $\alpha=e^2/(\hbar c)$. Les effets magnétiques sont-ils importants?
- **1.5.** La mesure expérimentale de l'énergie du niveau fondamental de l'atome d'hélium donne $E_f = -79$ eV. Comment ceci se compare-t-il aux prédictions du modèle précédent? Comment pourrait-on améliorer la précision du calcul?

2 Les molécules d'hélium He₂ et He₃

L'existence de ces molécules est longtemps restée controversée et indécise. Leur existence a été prouvée par une expérience récente. On étudie pour cela

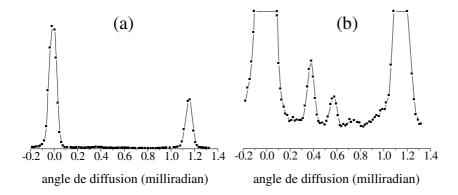


Fig. 2: (a) Signal détecté en fonction de l'angle θ de déflexion. (b) Mêmes données qu'en (a), avec une échelle verticale multipliée par 60.

la diffraction d'un jet froid et monocinétique d'hélium monoatomique, dans lequel quelques molécules ${\rm He_2}$ et ${\rm He_3}$ sont présentes. La masse d'un atome d'hélium est $M=6.69\times 10^{-27}$ kg.

- **2.1.** Donner la longueur d'onde λ_1 associée à un jet d'atomes d'hélium de vitesse v=430 m/s. Quelles sont les longueurs d'onde λ_2 et λ_3 associées aux molécules He₂ et He₃ présentes dans le jet, en admettant qu'elles se propagent à la même vitesse?
- **2.2.** On envoie le jet atomique en incidence normale sur un réseau de fentes régulièrement espacées (figure 1). La distance entre deux fentes consécutives est d=200 nm.
- (a) Expliquer brièvement pourquoi une diffraction cohérente (diffraction de Bragg) peut se produire dans certaines directions.
- (b) Calculer pour le jet d'atomes d'hélium l'angle θ entre la première direction diffractée et l'axe z. On exprimera θ en fonction de λ_1 et d, en utilisant le fait que $\lambda_1 \ll d$.
- **2.3.** La distribution angulaire mesurée expérimentalement est tracée sur la figure 2a. Le pic mesuré en $\theta=0$ correspond au jet non diffracté par le réseau. La position du pic diffracté est-elle en accord avec la prédiction de la question précédente?
- ${\bf 2.4.}$ La figure 2b montre un agrandissement de la figure 2a. L'échelle verticale a été dilatée pour mettre en évidence certains détails. Expliquer pourquoi cette figure permet de conclure à l'existence des molécules ${\bf He_2}$ et ${\bf He_3}$.
- **2.5.** Dans une expérience complémentaire, on a déterminé la distance D = 5.2 nm entre les deux atomes d'hélium composant la molécule He_2 . L'hamiltonien décrivant la rotation de cette molécule s'écrit $\hat{H} = \hat{L}^2/(2I)$ où

 \hat{L} est l'opérateur moment cinétique orbital relatif entre les deux atomes, et $I=MD^2/2$ le moment d'inertie.

- (a) Quelles sont les énergies attendues pour les trois premiers niveaux de rotation de la molécule?
- (b) L'énergie de liaison E_0 de la molécule He_2 dans son état fondamental est extrêmement faible : $|E_0| \simeq 10^{-7} \text{ eV}$. Dans quel(s) état(s) de rotation peut-on espérer trouver la molécule?

3 Corrigé du problème

1. L'état fondamental de l'atome d'hélium

- 1.1. Atomes hydrogénoïdes.
- (a) Le nombre quantique ℓ est associé à l'observable \hat{L}^2 , où $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ est l'opérateur moment cinétique orbital de l'électron. Les résultats possible d'une mesure de \hat{L}^2 sont $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ avec ℓ entier positif ou nul. Le nombre quantique m est associée à \hat{L}_z . Les résultats possibles d'une mesure de \hat{L}_z (ℓ étant fixé) sont $m\hbar$, où m est entier compris entre $-\ell$ et $+\ell$.
- (b) La partie orbitale de l'état fondamental s'écrit $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = Ce^{-Zr/a_1}$ avec $C = \frac{\sqrt{Z^3}}{\sqrt{\pi a_1^3}}$. C'est un état de moment cinétique nul, à symétrie sphérique.
- (c) Cet état a une énergie $-Z^2E_I$ avec $E_I=m_{\rm e}e^4/(2\hbar^2)$ et une taille $\sim a_1/Z$.
- 1.2. Modèle d'électrons indépendants
- (a) Dans cette approximation d'électrons indépendants, l'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$$
 avec $\hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2m_o} - \frac{2e^2}{\hat{r}_i}$.

(b) On obtient le niveau fondamental de l'atome en mettant chaque électron dans l'état orbital $\psi_{1,0,0}(\boldsymbol{r}_i)$ correspondant à l'état fondamental de \hat{H}_i . Chaque électron a l'énergie $-2m_{\rm e}e^4/\hbar^2$, soit une énergie totale :

$$E_f = -4m_e e^4/\hbar^2 .$$

Pour satisfaire au principe de Pauli, il faut que le vecteur d'état des deux électrons soit antisymétrique par échange des deux électrons. La partie orbitale étant symétrique, il faut que les deux spins soient dans l'état singulet :

$$|\Psi_f\rangle = |1:\psi_{1,0,0}\ ;\ 2:\psi_{1,0,0}\rangle \otimes \frac{|1:+\ ;\ 2:-\rangle\ -\ |1:-\ ;\ 2:+\rangle}{\sqrt{2}}\ .$$

Le niveau fondamental n'est donc pas dégénéré.

(c) On trouve $E_f = 8 \times (-13.6) = -108.8 \text{ eV}.$

1.3. Il faut appliquer la théorie des perturbations au premier ordre dans le cas non dégénéré. Le déplacement du niveau fondamental dû à la perturbation V s'écrit :

$$\Delta E = \langle \Psi_f | \hat{V} | \Psi_f \rangle = \iint |\psi_{1,0,0}(\boldsymbol{r}_1)|^2 |\psi_{1,0,0}(\boldsymbol{r}_2)|^2 \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \ d^3r_1 \ d^3r_2 \ .$$

On pose $\rho_i = 2r_i/a_1$ et on trouve :

$$\Delta E = \frac{5}{4} \frac{e^2}{a_1} = 34.0 \text{ eV} .$$

A cet ordre du calcul, l'énergie de l'état fondamental est donc : $E_f = -108.8 + 34.0 = -74.8$ eV.

- 1.4. Interaction magnétique entre électrons.
- (a) L'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction de deux dipoles magnétiques μ séparés par une distance d est $W \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu^2}{d^3}$. La distance entre les deux électrons est de l'ordre du rayon de Bohr a_1 . On a donc :

$$|W| \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 \hbar^2}{4m_{\rm e}^2 a_1^3} \ .$$

- (b) En remplaçant a_1 par sa valeur, on trouve : $|W| \sim \alpha^2 e^2/a_1$. La correction d'énergie liée à l'interaction magnétique entre électrons est donc 10^4 fois plus faible que l'énergie d'interaction électrostatique. On peut la négliger à cet ordre du calcul.
- 1.5. La mesure expérimentale $(-79~{\rm eV})$ donne un résultat remarquablement proche de la prédiction de ce modèle très simple $(-74,8~{\rm eV})$. Pour aller au delà, on peut chercher à calculer les ordres suivants de la théorie des perturbations. On peut aussi utiliser des méthodes plus astucieuses, consistant à évaluer pour chaque électron, le champ moyen créé par le noyau et l'autre électron. Le problème est désormais considéré comme résolu, étant donné la précision des calculs numériques actuels.

2. Les molécules d'hélium He2 et He3

- **2.1.** La relation de de Broglie $\lambda = h/(Mv)$ donne $\lambda_1 = 2,30 \times 10^{-10}$ m. Pour des particules de masse double ou triple se propageant à la même vitesse, on trouve $\lambda_2 = 1,15 \times 10^{-10}$ m et $\lambda_2 = 0,77 \times 10^{-10}$ m.
- 2.2. La diffraction de Bragg.
- (a) Pour avoir interférence constructive dans une direction θ , il faut que la différence de marche $d\sin\theta$ entre les chemins passant par deux fentes voisines soit un multiple de la longueur d'onde λ . Les angles caractérisant une diffraction cohérente sont donc donnés par $\sin\theta = n\lambda/d$.

- (b) Le premier ordre de diffraction est donné par $\theta \simeq \lambda/d = 1,15$ milliradian.
- **2.3.** Le pic diffracté correspond à un angle de déflexion $\theta=1,16$ milliradian, en bon accord avec la prédiction ci-dessus.
- **2.4.** Dans l'image agrandie, on voit apparaître des pics à $\theta=0.58$ mrad et $\theta=0.40$ mrad, soit la moitié et le tiers de l'angle précédent. Si on suppose que tous les composants du jet vont à la même vitesse (ce qu'on peut vérifier par temps de vol), ceci signifie que les objets créant ces pics ont une masse double ou triple de la masse atomique. Il s'agit des molécules He_2 et He_3 .
- 2.5. L'état de rotation de la molécule.
- (a) Puisqu'il s'agit d'un moment cinétique orbital, les valeurs propres possible de l'opérateur \hat{L}^2 sont $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ avec $\ell=0,1,2,\ldots$ Les trois premiers niveaux de rotation de la molécule ont donc l'énergie :

$$\begin{split} \ell &= 0 &: & E_{\rm rot}^{(0)} = 0 \; , \\ \ell &= 1 \; : & E_{\rm rot}^{(1)} = \frac{2\hbar^2}{MD^2} \; , \\ \ell &= 2 \; : & E_{\rm rot}^{(2)} = \frac{6\hbar^2}{MD^2} \; . \end{split}$$

(b) Pour le premier niveau de rotation excité, on trouve

$$E_{\rm rot}^{(1)} = 2\hbar^2/(MD^2) \simeq 8 \times 10^{-7} \text{ eV}$$
.

Cette énergie est supérieure à l'énergie de liaison de la molécule. Par conséquent, la molécule n'est pas stable dans cet état de rotation (ni bien sûr dans des états correspondant à des ℓ plus grands). En termes classiques, dès que ℓ est non nul, la force centrifuge est suffisante pour rompre la faible liaison entre les deux atomes d'hélium. Cette molécule He_2 ne peut donc exciter que dans l'état de moment cinétique nul $\ell=0$.

Commentaires

Les expériences décrites dans ce problème ont été menées à Göttingen et sont décrites dans les articles de W. Schöllkopf and J.P. Toennies, Science ${\bf 266},\ 1345\ (1994)$ (spectres de la figure 2) et R. Grissenti et al., Phys. Rev. Lett. ${\bf 85},\ 2284\ (2000)$ (mesure de D).

Notons que le raisonnement de la question 2.5 mériterait d'être approfondi. En effet, un état de moment cinétique non nul pourrait correspondre à une distance d'équilibre D plus grande que celle mesurée pour $\ell=0$, et donc une énergie de rotation plus basse. Toutefois, l'énergie de liaison $|E_0|$ diminuerait également si on augmentait D, et on peut montrer rigoureusement qu'il n'existe pas de solution stable pour $\ell\neq 0$.

B. Intrication quantique et mesure

7. Paradoxe EPR et inégalité de Bell

Lorsque un système quantique possède plus d'un degré de liberté, l'espace de Hilbert associé est le produit tensoriel des espaces associés à chaque degré de liberté. Cette structure mène à des propriétés spécifiques de la mécanique quantique dont le caratère paradoxal a été mis en relief par Einstein, Podolsky et Rosen. Nous étudions ici l'exemple d'une telle situation en considérant des états intriqués des spins de deux particules.

Le système considéré est un atome d'hydrogène. En interagissant avec un champ électromagnétique, ce système peut être dissocié en un proton et un électron. On se propose d'étudier l'état de spin de ces derniers quand ils se sont éloignés de la zone d'interaction dans des directions géométriquement distinctes (à quelques mètres l'un de l'autre). Ce sont alors des particules libres dont l'état de spin ne change pas dans le temps.

1 Le spin de l'électron

On étudie d'abord le spin de l'électron. Soit \boldsymbol{u}_{φ} un vecteur unitaire dans le plan $zOx: \boldsymbol{u}_{\varphi} = \cos \varphi \, \boldsymbol{u}_z + \sin \varphi \, \boldsymbol{u}_x$, où \boldsymbol{u}_z et \boldsymbol{u}_x sont les vecteurs unitaires portés respectivement par Oz et Ox. On note $\hat{S}_{e\varphi} = \hat{\boldsymbol{S}}_e \cdot \boldsymbol{u}_{\varphi}$ la composante de l'observable spin de l'électron $\hat{\boldsymbol{S}}_e$ le long de l'axe défini par \boldsymbol{u}_{φ} .

- **1.1.** Quelles sont les valeurs propres de $\hat{S}_{e\varphi}$?
- **1.2.** On note $|e:+\varphi\rangle$ et $|e:-\varphi\rangle$ les vecteurs propres de $\hat{S}_{e\varphi}$ qui, dans la limite $\varphi=0$, se ramènent respectivement aux vecteurs propres $|e:+\rangle$ et $|e:-\rangle$ de \hat{S}_{ez} . Exprimer $|e:\pm\varphi\rangle$ en fonction de $|e:\pm\rangle$.
- 1.3. On suppose que l'électron est émis dans l'état $|e:+\varphi\rangle$. On mesure la composante $\hat{S}_{e\alpha}$ du spin dans la direction définie par $u_{\alpha} = \cos\alpha u_z + \sin\alpha u_x$. Quelle est la probabilité $P_{+}(\alpha)$ de trouver l'électron dans l'état de spin $|e:+\alpha\rangle$? Quelle est la valeur moyenne $\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle$ dans l'état de spin $|e:+\varphi\rangle$?

2 L'intrication des états de deux spins

On suppose dans cette partie qu'après dissociation le système électronproton est dans l'état de spin $|e:+\varphi\rangle\otimes|p:-\varphi\rangle$.

On rappelle que si $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle \in E$, $|v_1\rangle$ et $|v_2\rangle \in F$, $|u\rangle \otimes |v\rangle \in G = E \otimes F$, et si \hat{A} et \hat{B} agissent respectivement dans E et F, $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$ agissant dans

G, alors on a:

$$(\langle u_2 | \otimes \langle v_2 |) \ \hat{C} (|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle) = \langle u_2 | \hat{A} |u_1\rangle \langle v_2 | \hat{B} |v_1\rangle.$$

- **2.1.** Quelle est la probabilité $P_{+}(\alpha)$ de trouver $+\hbar/2$ en mesurant la composante $\hat{S}_{e\alpha}$ du spin de l'électron dans cet état? Ayant trouvé $+\hbar/2$ comme résultat, quel est l'état du système après la mesure? L'état de spin du proton est-il perturbé par la mesure du spin de l'électron?
- **2.2.** Calculer les valeurs moyennes $\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle$ et $\langle \hat{S}_{p\beta} \rangle$ des composantes des spins de l'électron et du proton respectivement le long des axes \boldsymbol{u}_{α} et \boldsymbol{u}_{β} ($\boldsymbol{u}_{\beta} = \cos \beta \, \boldsymbol{u}_z + \sin \beta \, \boldsymbol{u}_x$).
- **2.3.** On définit le coefficient de corrélation entre spins $E(\alpha, \beta)$ par

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle \hat{S}_{e\alpha} \otimes \hat{S}_{p\beta} \rangle - \langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle \langle \hat{S}_{p\beta} \rangle}{\left(\langle \hat{S}_{e\alpha}^2 \rangle \langle \hat{S}_{p\beta}^2 \rangle\right)^{1/2}} . \tag{1}$$

Calculer $E(\alpha, \beta)$ dans l'état considéré.

3 Corrélation dans l'état singulet

On suppose maintenant qu'après dissociation, le système est dans l'état de spin singulet

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|e:+\rangle \otimes |p:-\rangle - |e:-\rangle \otimes |p:+\rangle \Big) . \tag{2}$$

- **3.1.** On mesure la composante $\hat{S}_{e\alpha}$ du spin de l'électron suivant l'axe u_{α} . Quels résultats obtient-on et avec quelle probabilité?
- **3.2.** On suppose que le résultat de la mesure a été $+\hbar/2$. On mesure ensuite la composante $\hat{S}_{p\beta}$ du spin du proton suivant l'axe u_{β} . Quels résultats obtient-on et avec quelle probabilité?
- **3.3.** Aurait-on les mêmes probabilités si l'on avait fait la mesure du spin du proton suivant u_{β} avant de mesurer la composante du spin de l'électron suivant u_{α} ? Pourquoi ce résultat choquait-il Einstein qui affirmait : « les états réels de deux objets séparés spatialement sont indépendants l'un de l'autre »?
- **3.4.** Calculer les valeurs moyennes $\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle$ et $\langle \hat{S}_{p\beta} \rangle$ des composantes des spins de l'électron et du proton quand le système est dans l'état singulet (2).
- **3.5.** Calculer $E(\alpha, \beta)$ pour une paire électron-proton dans l'état singulet.

4 Variables cachées

Pour Einstein et pour d'autres physiciens, la solution du « paradoxe » entrevu dans le paragraphe précédent provient de ce que les vecteurs d'états

de la mécanique quantique, et en particulier l'état singulet (2), ne décrivent la réalité physique que de façon *incomplète*. Une théorie « complète » (des mesures de spin dans le cas considéré) devrait faire intervenir des paramètres supplémentaires dont la connaissance rendrait *indépendantes* les mesures sur deux objets séparés. Cependant, les expériences actuelles ne déterminant pas la valeur de ces paramètres, ils sont appelés « variables cachées ». Dans le cadre de ces théories, le résultat de la mesure sera donc une certaine moyenne sur ces variables.

Pour le cas qui nous intéresse, un exemple très simplifié d'une telle théorie est le suivant. On suppose qu'après chaque dissociation, le système est effectivement dans un état factorisé $|e|:+\varphi\rangle\otimes|p|:-\varphi\rangle$, mais que la direction φ varie d'une dissociation à l'autre : φ est ici la variable cachée. On suppose que toutes les directions φ sont également probables, la densité de probabilité $P(\varphi)$ d'être dans la direction φ étant donc $P(\varphi)=1/2\pi$. En raison de cette ignorance sur φ , la valeur moyenne d'une observable \hat{A} est maintenant définie par

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle e : +\varphi | \otimes \langle p : -\varphi | \hat{A} | e : +\varphi \rangle \otimes | p : -\varphi \rangle \, d\varphi \; . \tag{3}$$

- **4.1.** En utilisant la définition (1) de $E(\alpha, \beta)$, mais le principe (3) pour définir les valeurs moyennes, calculer $E(\alpha, \beta)$ dans cette nouvelle théorie. Comparer le résultat avec celui obtenu dans le cadre de la théorie quantique « orthodoxe » (§ 3.5).
- **4.2.** Les premières comparaisons expérimentales précises entre les prédictions quantiques et celles des théories à variables cachées ont été faites avec des paires de photons corrélés, émises dans une cascade atomique. Bien que le système considéré ne soit pas le même qu'ici, le contenu physique en est essentiellement le même. Les résultats de l'expérience faite en 1982 par Alain Aspect et ses collaborateurs est représenté sur la figure 1. On a tracé la variation de $E(\alpha,\beta)$ en fonction de la différence $\alpha-\beta$, qui est le seul paramètre pertinent du problème.

Quelle théorie, entre mécanique quantique et modèle à variables cachées, permet de décrire correctement les résultats expérimentaux?

5 Inégalité de Bell.

En considérant des états intriqués, Bell a prouvé en 1965 le désaccord entre les prédictions de la mécanique quantique et une très large classe de théories à variables cachées (théories « locales »). Nous montrons dans ce paragraphe que les corrélations prédites dans le cadre d'une théorie à variables cachées sont contraintes par une inégalité, désormais appelée *inégalité de Bell*, qui peut être en désaccord avec les prédictions de la physique quantique standard.

On considère une théorie à variable cachée dont le résultat consiste en deux fonctions $A(\lambda, \mathbf{u}_{\alpha})$ et $B(\lambda, \mathbf{u}_{\beta})$ donnant respectivement les résultats des

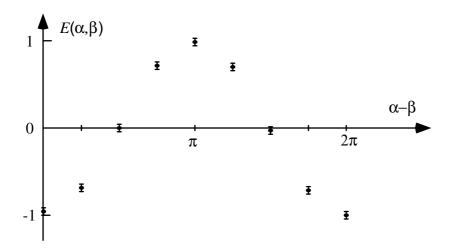


FIG. 1: Variation mesurée de $E(\alpha, \beta)$ en fonction de $\alpha - \beta$. Les barres verticales représentent les erreurs expérimentales.

mesures des spins de l'électron et du proton. Chacune de ces fonctions est bivaluée, égale à $\pm \hbar/2$. La valeur dépend de la variable cachée λ pour la paire électron-proton considérée. Il est inutile de préciser la nature de cette variable pour la démonstration du théorème de Bell. Le résultat A dépend bien sûr de l'axe \boldsymbol{u}_{α} choisi pour la mesure du spin de l'électron, mais il ne dépend pas de l'axe \boldsymbol{u}_{β} . De même, B ne dépend pas de \boldsymbol{u}_{α} . Cette hypothèse de localité est essentielle pour la discussion qui suit.

- **5.1.** Calculer le coefficient de corrélation $E(\alpha, \beta)$ pour une théorie à variable cachée, en fonction de A, B, et de la loi de distribution $P(\lambda)$ (inconnue) pour la variable cachée λ .
- **5.2.** Montrer que pour tout ensemble u_{α} , u'_{α} , u_{β} , u'_{β} , on a :

$$A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}) B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}) + A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}) B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}')$$

$$+ A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}') B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}') - A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}') B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}) = \pm \frac{\hbar^{2}}{2}.$$

$$(4)$$

5.3. On définit la quantité S par :

$$S = E(\alpha, \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta') - E(\alpha', \beta) .$$

Démontrer l'inégalité de Bell :

$$|S| \leq 2$$
.

5.4. Considérer le cas particulier

$$\alpha - \beta = \beta' - \alpha = \alpha' - \beta' = \pi/4 ,$$

et comparer les prédictions de la mécanique quantique avec la contrainte imposée par l'inégalité de Bell.

5.5. Les résultats expérimentaux obtenus par A. Aspect et son groupe sont $E(\alpha,\beta)=-0.66~(\pm0.04)$ pour $\alpha-\beta=\pi/4$ et $E(\alpha,\beta)=+0.68~(\pm0.03)$ pour $\alpha-\beta=3\pi/4$. Une description de ce résultat en terme de théorie à variable cachée locale est-elle possible? Ces résultats sont-ils compatibles avec les prédictions de la mécanique quantique?

6 Corrigé

1. Le spin de l'électron

1.1. Dans la base propre $|e:\pm\rangle$ de \hat{S}_{ez} , la matrice de $\hat{S}_{e\varphi}$ est :

$$\frac{\hbar}{2} \left(\begin{array}{cc} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{array} \right) .$$

Les valeurs propres de cet opérateur sont $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$.

1.2. Les vecteurs propres correspondants sont :

$$\begin{array}{lcl} |e:+\varphi\rangle & = & \cos\frac{\varphi}{2} \; |e:+\rangle + \sin\frac{\varphi}{2} \; |e:-\rangle \\ |e:-\varphi\rangle & = & -\sin\frac{\varphi}{2} \; |e:+\rangle + \cos\frac{\varphi}{2} \; |e:-\rangle. \end{array}$$

1.3. L'amplitude de probabilité est $\langle e:+\alpha|e:+\varphi\rangle=\cos((\varphi-\alpha)/2)$, d'où $P_+(\alpha)=\cos^2((\varphi-\alpha)/2)$. De même $P_-(\alpha)=\sin^2((\varphi-\alpha)/2)$, et la valeur moyenne est

$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\varphi - \alpha) .$$

2. L'intrication des états de deux spins

2.1. Le projecteur sur l'état propre $|e| : +\alpha\rangle$ qui correspond à la valeur mesurée est $|e| : +\alpha\rangle\langle e| : +\alpha|\otimes \hat{I}_p$, où \hat{I}_p est l'opérateur identité sur les états du proton. Par conséquent

$$P_{+}(\alpha) = |\langle e : + \alpha | e : + \varphi \rangle|^{2} = \cos^{2} \frac{\varphi - \alpha}{2},$$

et l'état après mesure est $|e:+\alpha\rangle\otimes|p:-\varphi\rangle$. Le spin du proton n'est pas perturbé. Cela provient de ce que l'état initial est factorisé.

2.2. On a
$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle = (\hbar/2) \cos(\varphi - \alpha)$$
 et $\langle \hat{S}_{p\beta} \rangle = -(\hbar/2) \cos(\varphi - \beta)$.

2.3. Par définition, on a

$$\hat{S}_{e\alpha}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\hat{I}_e$$
 et $\hat{S}_{p\beta}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\hat{I}_p$

ainsi que:

$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \otimes \hat{S}_{p\beta} \rangle = \langle e : + \varphi | \hat{S}_{e\alpha} | e : + \varphi \rangle \langle p : - \varphi | \hat{S}_{p\beta} | p : - \varphi \rangle$$
$$= -\frac{\hbar^2}{4} \cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \beta) .$$

Par conséquent $E(\alpha,\beta)=0$. Cela reflète que dans un état factorisé, les variables sont indépendantes.

3. Corrélation dans l'état singulet

- **3.1.** Il y a deux valeurs possibles :
 - $+\hbar/2$ correspondant au projecteur $|e + \alpha\rangle\langle e : +\alpha| \otimes \hat{I}_p$,
 - $-\hbar/2$ correspondent au projecteur $|e:-\alpha\rangle\langle e:-\alpha|\otimes \hat{I}_p$.

Par conséquent, les probabilités sont

$$P_{+}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\left| \langle e : + \alpha | e : + \rangle \right|^{2} + \left| \langle e : + \alpha | e : - \rangle \right|^{2} \right) = 1/2 ,$$

et de même $P_{-}(\alpha)=1/2$. Ce résultat est une conséquence de l'invariance par rotation de l'état singulet.

3.2. Après mesure du spin de l'électron ayant donné $+\hbar/2$, l'état du système est

$$\cos\frac{\alpha}{2}|e\,:\,+\alpha\rangle\otimes|p\,:\,-\rangle-\sin\frac{\alpha}{2}|e\,+\,\alpha\rangle\otimes|p\,:\,+\rangle=|e\,+\,\alpha\rangle\otimes|p\,:\,-\alpha\rangle\;.$$

Ce résultat simple provient lui aussi de l'invariance par rotation de l'état singulet qui peut s'écrire :

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|e:+\alpha\rangle \otimes |p:-\alpha\rangle - |e:-\alpha\rangle \otimes |p:+\alpha\rangle \Big) .$$

Les probabilités de trouver $\pm \hbar/2$ dans la mesure du spin du proton sont

$$P_{+}(\beta) = \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$$
 $P_{-}(\beta) = \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$.

3.3. Si l'on avait mesuré $\hat{S}_{p\beta}$ d'abord, on aurait obtenu :

$$P_{+}(\beta) = P_{-}(\beta) = \frac{1}{2}$$
.

Qu'une mesure effectuée sur l'électron affecte la probabilité des résultats de mesure sur le proton – alors que ces deux particules sont séparées spatialement et n'interagissent pas – est clairement en contradiction avec l'assertion d'Einstein. C'est le point de départ du paradoxe Einstein–Podolsky–Rosen. La mécanique quantique n'est pas une théorie *locale* au niveau de la mesure.

Notons toutefois que cette non-localité ne permet pas la transmission instantanée d'information. En mesurant le spin du proton, on ne peut pas savoir si le spin de l'électron a été mesuré auparavant. C'est uniquement en comparant a posteriori les résultats de mesure sur l'électron et le proton qu'on constate le caractère non-local de la théorie quantique.

3.4. Individuellement, les valeurs moyennes sont nulles car on ne se préoccupe pas de l'autre variable

$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle = \langle \hat{S}_{p\beta} \rangle = 0$$
.

3.5. Toutefois, les deux spins sont corrélés et l'on a

$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \otimes \hat{S}_{p\beta} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \left(\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

et par conséquent $E(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha - \beta)$.

4. Variables cachées

4.1. En utilisant les résultats du § 2, on trouve

$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \rangle = \frac{\hbar}{2} \int \cos(\varphi - \alpha) \; \frac{d\varphi}{2\pi} = 0 \; ,$$

et de même $\langle \hat{S}_{p\beta} \rangle = 0$. On trouve également

$$\langle \hat{S}_{e\alpha} \otimes \hat{S}_{p\beta} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \int \cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi - \beta) \frac{d\varphi}{2\pi}$$
$$= -\frac{\hbar^2}{8} \cos(\alpha - \beta) .$$

Par conséquent, dans ce modèle simple de variables cachées,

$$E(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$$
.

Il est intéressant de constater que dans un tel modèle, on trouve un coefficient de corrélation non nul. Également intéressant est le fait qu'il soit moitié de celui de la mécanique quantique usuelle.

4.2. Les points expérimentaux sont en accord avec les prévisions de la mécanique quantique et en désaccord net avec le résultat de la théorie à variable cachée que nous avons considérée. Toutefois, les points donnés dans l'énoncé ne sont pas les valeurs effectivement mesurées. Ces dernières sont représentées sur la figure 2. Sur cette figure, les barres d'erreurs correspondent seulement aux erreurs *statistiques*, et la différence avec les prédictions de la mécanique quantique a pour origine les erreurs *systématiques*. Celles-ci proviennent essentiellement des imperfections des détecteurs.

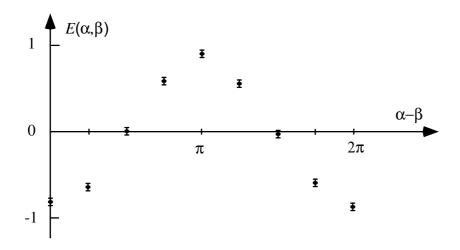


Fig. 2: Variation trouvée expérimentalement pour la fonction $E(\alpha, \beta)$.

5. Inégalité de Bell.

5.1. Dans le cadre d'une théorie à variables cachées, le coefficient de corrélation s'écrit

$$E(\alpha, \beta) = \frac{4}{\hbar^2} \int P(\lambda) A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}) B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}) d\lambda ,$$

où $P(\lambda)$ est la loi de distribution de la variable $\lambda,$ avec :

$$P(\lambda) \ge 0$$
 et $\int P(\lambda) d\lambda = 1$.

Nous supposons ici que la théorie à variable cachée reproduit les valeurs moyennes à un opérateur pour l'état singulet :

$$\langle S_{e\alpha} \rangle = \int P(\lambda) A(\lambda, \mathbf{u}_{\alpha}) d\lambda = 0 \qquad \langle S_{p\beta} \rangle = \int P(\lambda) B(\lambda, \mathbf{u}_{\beta}) d\lambda = 0.$$

Si ce n'était pas le cas, cette théorie devrait être rejetée puisqu'elle ne reproduirait pas un fait expérimental bien établi.

5.2. La quantité considérée s'écrit :

$$A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}) \left(B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}) + B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}') \right) + A(\lambda, \boldsymbol{u}_{\alpha}') \left(B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}') - B(\lambda, \boldsymbol{u}_{\beta}) \right) .$$

Les deux quantités $B(\lambda, u_{\beta})$ et $B(\lambda, u_{\beta}')$ ne prennent que deux valeurs $\pm \hbar/2$. On a donc soit

$$B(\lambda, \mathbf{u}_{\beta}) + B(\lambda, \mathbf{u}'_{\beta}) = \pm \hbar$$
 $B(\lambda, \mathbf{u}_{\beta}) - B(\lambda, \mathbf{u}'_{\beta}) = 0$,

soit

$$B(\lambda, \mathbf{u}_{\beta}) + B(\lambda, \mathbf{u}'_{\beta}) = 0$$
 $B(\lambda, \mathbf{u}_{\beta}) - B(\lambda, \mathbf{u}'_{\beta}) = \pm \hbar$,

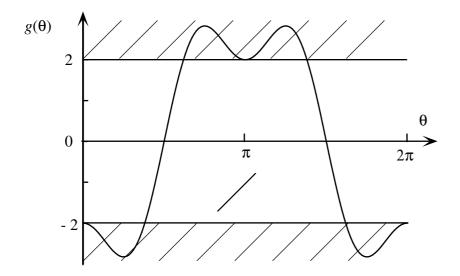


FIG. 3: Variation de $g(\theta)$. Les zones hachurées correspondent aux points exclus pour les théories à variable cachée.

d'où le résultat.

5.3. On multiplie le résultat (4) par $P(\lambda)$ et on intègre sur λ . L'inégalité de Bell en découle immédiatement.

5.4. La prédiction de la mécanique quantique est

$$S_{Q} = -\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta') - \cos(\alpha' - \beta') + \cos(\alpha' - \beta)$$

Si on pose $\theta_1 = \alpha - \beta$, $\theta_2 = \beta' - \alpha$, $\theta_3 = \alpha' - \beta'$, on peut chercher les extrema de

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3).$$

Ces extrema sont obtenus pour $\theta_1=\theta_2=\theta_3$ et $\sin\theta_1=\sin3\theta_1$, dont les solutions entre 0 et π sont $\theta_1=0,\,\pi/4,\,3\pi/4,\,\pi$. On définit la fonction $g(\theta_1)=-3\cos\theta_1+\cos3\theta_1$ et on trouve : $g(0)=-2,\,g(\pi/4)=-2\sqrt{2},\,g(3\pi/4)=2\sqrt{2},\,g(\pi)=2$.

Nous avons représenté la fonction $g(\theta)$ sur la figure 3. Les zones hachurées correspondent à des résultats qui ne peut pas être expliqués par une théorie à variable cachée locale. En particulier, pour $\alpha - \beta = \beta' - \alpha = \alpha' - \beta' = \pi/4$, on trouve $S_Q = -2\sqrt{2}$, qui viole clairement l'inégalité de Bell. Ce système constitue donc un test des prédictions de la mécanique quantique, par comparaison avec celles d'une théorie à variable cachée locale.

5.5. Les valeurs indiquées dans le texte mènent à $|3E(\pi/4) - E(3\pi/4)| = 2,66 (\pm 0,15)$, en accord excellent avec la prévision de la mécanique quantique $(2\sqrt{2})$. Elles sont en revanche incompatibles avec les théories à variable cachée.

Comme dans la question précédente, les véritables résultats de mesure sont en fait légèrement différents de ceux donnés dans l'énoncé :

$$E(\pi/4) = -0.62 \; (\pm 0.04)$$
 $E(3\pi/4) = 0.60 \; (\pm 0.03) \; ,$

d'où $|3E(\pi/4)-E(3\pi/4)|=2,46\ (\pm0,15)$ qui viole incontestablement l'inégalité de Bell. La différence avec le résultat quantique $2\sqrt{2}$ provient des erreurs systématiques mentionnées plus haut.

Références

A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).

J.S. Bell, Physics 1 (1964); voir aussi J. Bell Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambrodge University Press, Cambridge (1993).

Les données expérimentales présentées ici proviennent de : A. Aspect, P. Grangier et G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982); A. Aspect, J. Dalibard et G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982). Ces expériences ont été menées sur des paires de photons émises dans une cascade atomique. Depuis, la précision a été considérablement améliorée grâce à l'utilisation de paires de photons produites par le dédoublement non-linéaire de photons ultraviolets dans un cristal (voir par exemple l'article d'A. Aspect dans Nature, **398**, 189 (18 mars 1999)).

8. Le chat de Schrödinger

D'après le principe de superposition, si les vecteurs $|\phi_a\rangle$ et $|\phi_b\rangle$ sont deux états possibles pour un système quantique, la superposition quantique $(|\phi_a\rangle+|\phi_b\rangle)/\sqrt{2}$ est également un état possible pour ce système. Ce principe est essentiel pour rendre compte des phénomènes d'interférence. Néanmoins, appliqué à de « gros objets », ce principe conduit à des situations paradoxales pour lesquelles un système donné peut se trouver dans une superposition de deux états antinomiques.

Le plus célèbre des paradoxes de ce type est celui du « chat de Schrödinger », superposition d'un état « chat vivant » et d'un état « chat mort ». Le but de ce problème est de montrer que de telles superpositions d'états macroscopiques ne sont pas détectables en pratique : elles sont en effet extrêmement fragiles et un couplage très faible du système avec l'environnement suffit à détruire la superposition quantique des deux états $|\phi_a\rangle$ et $|\phi_b\rangle$.

1 Les états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique

On considérera dans ce problème un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω . L'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \ .$$

On note $\{|n\rangle\}$ la base propre de \hat{H} , la valeur propre associée à $|n\rangle$ étant $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$. On introduit les observables $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{m\omega/\hbar}$ et $\hat{P} = \hat{p}/\sqrt{m\hbar\omega}$, ainsi que les opérateurs

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$$
 $\hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$ $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$.

On rappelle les commutateurs : $[\hat{X}, \hat{P}] = i$, $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$, et les relations : $\hat{H} = \hbar \omega (\hat{N} + 1/2)$ et $\hat{N} | n \rangle = n | n \rangle$.

1.1. Préliminaires.

(a) Justifier qu'en travaillant avec des fonctions des variables sans dimension X et P, on a :

$$\hat{P} = -i\frac{\partial}{\partial X} \qquad \hat{X} = i\frac{\partial}{\partial P} \ .$$

(b) Évaluer le commutateur $[\hat{N}, \hat{a}]$. En déduire que

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle , \qquad (1)$$

à un facteur de phase près que l'on oubliera dans la suite.

- (c) En utilisant (1) pour n=0 et en remplaçant \hat{a} par son expression en termes de \hat{X} et \hat{P} , en déduire la fonction d'onde de l'état fondamental $\psi_0(X)$ ainsi que sa transformée de Fourier $\varphi_0(P)$. On ne cherchera pas à normer le résultat obtenu.
- 1.2. Les états quasi-classiques. On étudie maintenant les propriétés des états propres de l'opérateur \hat{a} , appelés états quasi-classiques. Soit α un nombre complexe quelconque. Montrer que l'état

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$
 (2)

est état propre normé de \hat{a} pour la valeur propre $\alpha : \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle$.

- **1.3.** Calculer la valeur moyenne de l'énergie dans un état quasi-classique $|\alpha\rangle$. Calculer également les valeurs moyennes $\langle x\rangle$ et $\langle p\rangle$ et les écarts-type Δx et Δp pour cet état. Montrer que Δx $\Delta p = \hbar/2$.
- **1.4.** D'une manière analogue à celle suivie à la question 1c, déterminer la fonction d'onde $\psi_{\alpha}(X)$ de l'état quasi-classique $|\alpha\rangle$, ainsi que sa transformée de Fourier $\varphi_{\alpha}(P)$. On ne cherchera pas à normer le résultat obtenu.
- **1.5.** On suppose qu'à l'instant initial t=0, l'oscillateur est dans un état quasi-classique $|\alpha_0\rangle$ avec $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$ (où ρ est un nombre réel positif).
- (a) Montrer qu'à tout instant ultérieur t, l'oscillateur est dans un état quasiclassique que l'on peut écrire $e^{-i\omega t/2}|\alpha(t)\rangle$. Déterminer $\alpha(t)$ en fonction de ρ, ϕ, ω et t.
- (b) Évaluer $\langle x \rangle_t$ et $\langle p \rangle_t$. En rapprochant ce résultat de celui de la question 3, justifier brièvement l'appellation d'état quasi-classique pour $|\alpha| \gg 1$.
- 1.6. Application numérique. On considère un pendule simple de longueur 1 mètre et de masse 1 gramme. On suppose que l'état de ce pendule peut se décrire par un état quasi-classique. Ce pendule est écarté de $x_0 = 1$ micromètre de sa position initiale et il est lâché avec une vitesse moyenne nulle.
- (a) Quelle est la valeur de $\alpha(0)$ correspondante?
- (b) Quelle est l'incertitude relative en position $\Delta x/x_0$?
- (c) Quelle est la valeur de $\alpha(t)$ après 1/4 de période d'oscillation?

2 Fabrication d'un état chat de Schrödinger

Pendant l'intervalle de temps [0,T], on ajoute au potentiel harmonique le potentiel

$$\hat{W} = \hbar g (\hat{a}^{\dagger} \hat{a})^2 \ .$$

On suppose que g est très grand devant ω et que $\omega T \ll 1$. On peut donc prendre simplement W comme hamiltonien du système pendant l'intervalle [0,T]. À l'instant initial t=0, le système est dans un état quasi-classique $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$.

- **2.1.** Montrer que les états $|n\rangle$ sont états propres de W. En déduire le développement sur la base $\{|n\rangle\}$ de l'état $|\psi(T)\rangle$ du système à l'instant T.
- **2.2.** Comment se simplifie $|\psi(T)\rangle$ dans les cas particuliers : $T=2\pi/g$ et $T=\pi/g$?
- **2.3.** On choisit maintenant $T = \pi/2g$. Montrer que l'on a :

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |\alpha\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha\rangle \right) .$$
 (3)

- **2.4.** On suppose que α est imaginaire pur : $\alpha = i\rho$.
- (a) Décrire qualitativement l'état physique (3).
- (b) Pour une valeur de $|\alpha|$ de l'ordre de grandeur calculé en § 1.6, pourquoi peut-on considérer que cet état est une réalisation concrète d'un état de type « chat de Schrödinger » évoqué dans l'introduction?

3 Superposition quantique et mélange statistique

On étudie dans cette partie les propriétés de l'état (3) pour une situation « macroscopique » $|\alpha| \gg 1$. On choisit α imaginaire pur $(\alpha = i\rho)$ et on pose $p_0 = \rho \sqrt{2m\hbar\omega}$.

- **3.1.** On prépare un système quantique dans l'état (3). Écrire les lois de probabilité (non normalisées) pour la position et pour l'impulsion du système. Ces lois de probabilité sont tracées sur la figure 1 pour $\alpha = 5i$. Interpréter physiquement ces distributions.
- **3.2.** Une physicienne, Alice, prépare un nombre N de systèmes indépendants, tous dans l'état (3), et elle fait une mesure de l'impulsion de chacun de ces systèmes. Le détecteur a une résolution δp telle que :

$$\sqrt{m\hbar\omega} \ll \delta p \ll p_0$$
.

Pour $N\gg 1$, dessiner qualitativement la distribution (histogramme) des résultats regroupant les N mesures.

3.3. L'état (3) se présente comme la superposition quantique de deux états macroscopiquement différents et conduit donc aux situations paradoxales mentionnées en introduction. Plutôt que N systèmes dans l'état (3), un autre physicien, Bob, pourrait prétendre qu'Alice dispose sans s'en rendre compte d'un « mélange statistique » non paradoxal, c'est-à-dire que la moitié (N/2)

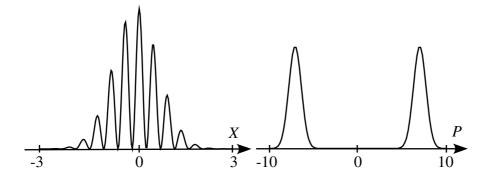


FIG. 1: Lois de probabilité pour la position et l'impulsion d'un système dans l'état (3) pour $\alpha=5i$. Les quantités X et P sont les variables sans dimension introduites dans la première partie du problème. L'échelle des ordonnées est arbitraire.

des systèmes sont dans l'état $|\alpha\rangle$ et l'autre moitié dans l'état $|-\alpha\rangle$. Obtienton dans ce cas la distribution de la question précédente pour les N mesures d'impulsion?

3.4. Pour trancher, Alice procède maintenant à une mesure de la position sur les N systèmes indépendants tous dans l'états (3). Dessiner la forme de la distribution regroupant les résultats, en supposant que la résolution δx du détecteur est telle que :

$$\delta x \ll \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \ .$$

- **3.5.** Bob peut-il retrouver les résultats concernant la mesure de la position trouvés à la question précédente en se plaçant dans l'hypothèse d'un mélange statistique?
- **3.6.** En reprenant la valeur numérique obtenue dans le cas du pendule simple de la question § 1.6, évaluer la résolution δx nécessaire pour différencier une superposition quantique de N pendules dans l'état (3) par rapport à un mélange statistique constitué de N/2 pendules dans l'état $|\alpha\rangle$ et N/2 pendules dans l'état $|\alpha\rangle$.

4 Fragilité d'une superposition quantique

Dans la réalité, il faut tenir compte du couplage de l'oscillateur avec son environnement pour estimer le temps pendant lequel la superposition quantique (3) (c'est-à-dire l'état « chat de Schrödinger » qui est à la fois vivant et mort) peut être différenciée d'un simple mélange statistique (c'est-à-dire un ensemble de chats – ou de systèmes – qui pour la moitié sont morts et l'autre moitié vivants, chaque chat étant soit vivant, soit mort).

Si l'oscillateur est initialement dans un état quasi-classique $|\alpha_0\rangle$ et l'en-

vironnement dans un état $|\chi_e(0)\rangle$, la fonction d'onde du système total est le produit des fonctions d'onde individuelles, et le vecteur d'état initial du système total s'écrit comme le produit des vecteurs d'états des deux soussystèmes :

$$|\Phi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes |\chi_e(0)\rangle$$
.

Le couplage est responsable de l'amortissement de l'oscillateur. À un instant t ultérieur, le vecteur d'état du système total devient :

$$|\Phi(t)\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\chi_e(t)\rangle$$
,

avec $\alpha_1 = \alpha(t)e^{-\gamma t}$; le nombre $\alpha(t)$ correspond à l'état quasi-classique que l'on trouverait en l'absence d'amortissement (question 1.5) et γ est un nombre réel positif.

- **4.1.** En utilisant le résultat de la question 1.3, donner l'énergie moyenne de l'oscillateur au temps t, et l'énergie moyenne acquise par l'environnement lorsque $2\gamma t \ll 1$.
- **4.2.** Pour des états initiaux de l'oscillateur du type « chat de Schrödinger », le vecteur d'état du système total s'écrit à t=0:

$$|\Phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |\alpha_0\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha_0\rangle \right) \otimes |\chi_e(0)\rangle ,$$

et à un instant t ultérieur :

$$|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |\alpha_1\rangle \otimes |\chi_e^{(+)}(t)\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha_1\rangle \otimes |\chi_e^{(-)}(t)\rangle \right) ,$$

avec toujours $\alpha_1 = \alpha(t) e^{-\gamma t}$. On choisit t tel que α_1 soit imaginaire pur, avec $|\alpha_1| \gg 1$. $|\chi_e^{(+)}(t)\rangle$ et $|\chi_e^{(-)}(t)\rangle$ sont deux états normés a priori différents (mais non orthogonaux) de l'environnement.

La loi de probabilité pour la position de l'oscillateur, mesurée indépendamment de l'état de l'environnement, conduit alors à :

$$P(x) = \frac{1}{2} \left(|\psi_{\alpha_1}(x)|^2 + |\psi_{-\alpha_1}(x)|^2 \right) + \mathcal{R}e \left(i\psi_{\alpha_1}^*(x)\psi_{-\alpha_1}(x) \langle \chi_e^{(+)}(t) | \chi_e^{(-)}(t) \rangle \right) \,.$$

En posant $\eta = \langle \chi_e^{(+)}(t) | \chi_e^{(-)}(t) \rangle$ avec $0 \le \eta \le 1$ (on suppose η réel) et en reprenant les résultats de la partie 3, décrire sans calcul le résultat de :

- (a) N mesures de position indépendantes,
- (b) N mesures d'impulsion indépendantes,

À quelle condition sur η peut-on différencier une superposition quantique d'un mélange statistique?

4.3. Dans un modèle très simplifié, l'environnement est constitué d'un deuxième oscillateur, de même masse et de même pulsation que le premier. On suppose que ce deuxième oscillateur est initialement dans son état fondamental $|\chi_e(0)\rangle = |0\rangle$. Pour un couplage quadratique des deux oscillateurs, on admettra :

- que les états $|\chi_e^{(\pm)}(t)\rangle$ sont des états quasi-classiques : $|\chi_e^{(\pm)}(t)\rangle = |\pm\beta\rangle$, et que pour des temps courts $(\gamma t \ll 1) : |\beta|^2 = 2\gamma t |\alpha_0|^2$.
- (a) À partir du développement (2), montrer que $\eta = \langle \beta | -\beta \rangle = \exp(-2|\beta|^2)$.
- (b) En utilisant l'expression trouvée en § 4.1 pour l'énergie du premier oscillateur, déterminer la valeur typique du transfert d'énergie entre les deux oscillateurs au-dessus de laquelle la différence entre superposition quantique et mélange statistique devient inobservable.
- **4.4.** On reprend le pendule simple décrit plus haut et on suppose que la constante de temps d'amortissement de l'énergie est d'une année (pendule suspendu sous vide, frottements minimisés). En utilisant le résultat du modèle développé à la question précédente, évaluer le temps pendant lequel un état « chat de Schrödinger » est observable. Commenter le résultat obtenu.

5 Corrigé

1. Les états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique

- 1.1. Préliminaires.
- (a) Un changement de variable immédiat donne

$$\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} = -i\frac{\partial}{\partial X} ,$$

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} i\hbar \frac{\partial}{\partial p} = i\sqrt{m\hbar\omega} \frac{\partial}{\partial p} = i\frac{\partial}{\partial P} .$$

(b) On a les relations habituelles $[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] = [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] = -\hat{a}$. Par conséquent

$$[\hat{N}, \hat{a}]|n\rangle = -\hat{a}|n\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle ,$$

et $\hat{a}|n\rangle$ est donc vecteur propre de \hat{N} avec la valeur propre n-1. On sait que les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique 1D ne sont pas dégénérés. Par conséquent on trouve $\hat{a}|n\rangle = \mu|n-1\rangle$, où le coefficient de proportionnalité μ se détermine en calculant la norme de $\hat{a}|n\rangle$:

$$\|\hat{a}|n\rangle\|^2 = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n \quad \Rightarrow \quad \mu = \sqrt{n}$$

à une phase près.

(c) L'équation $\hat{a}|0\rangle=0$ correspond à $(\hat{X}+i\hat{P})|0\rangle=0$: – en fonction de la variable X :

$$\left(X + \frac{\partial}{\partial X}\right)\psi_0(X) = 0 \Rightarrow \psi_0(X) = C \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) ;$$

- en fonction de la variable P :

$$\left(P + \frac{\partial}{\partial P}\right)\varphi_0(P) = 0 \Rightarrow \varphi_0(P) = C' \exp\left(-\frac{P^2}{2}\right)$$
.

1.2. On vérifie directement la relation $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a} |n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle$$
$$= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \alpha |\alpha\rangle.$$

Par ailleurs, le calcul de la norme de $|\alpha\rangle$ donne : $\langle\alpha|\alpha\rangle=e^{-|\alpha|^2}\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}=1$.

1.3. La valeur moyenne de l'énergie est

$$\langle E \rangle = \langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = \hbar \omega \langle \alpha | \hat{N} + \frac{1}{2} | \alpha \rangle = \hbar \omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) .$$

Pour calculer $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$, on fait usage de

$$\begin{split} \langle x \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \; \langle \alpha | \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \; (\alpha + \alpha^*) \; , \\ \langle p \rangle &= \sqrt{m\hbar\omega} \; \langle \alpha | \frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{i\sqrt{2}} | \alpha \rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \; (\alpha^* - \alpha) \; , \\ \Delta x^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \; \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^+)^2 | \alpha \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right] - \langle x \rangle^2 \; , \end{split}$$

soit $\Delta x = \sqrt{\hbar/2m\omega}$, qui est indépendant de α . De même

$$\Delta p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} \langle \alpha | (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger})^2 | \alpha \rangle - \langle p \rangle^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} \left[(\alpha - \alpha^*)^2 - 1 \right] - \langle p \rangle^2 ,$$

soit $\Delta p = \sqrt{m\hbar\omega/2}$ également indépendant de α . L'inégalité de Heisenberg est saturée : $\Delta x \, \Delta p = \hbar/2$ quelle que soit la valeur de α .

1.4. En fonction de la variable X, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(X + \frac{\partial}{\partial X} \right) \psi_{\alpha}(X) = \alpha \psi_{\alpha}(X) \Rightarrow \psi_{\alpha}(X) = C \exp \left(-\frac{(X - \alpha \sqrt{2})^2}{2} \right) .$$

De même, avec la variable P,

$$\frac{i}{\sqrt{2}} \left(P + \frac{\partial}{\partial P} \right) \varphi_{\alpha}(P) = \alpha \varphi_{\alpha}(P) \Rightarrow \varphi_{\alpha}(P) = C' \exp \left(-\frac{(P + i\alpha\sqrt{2})^2}{2} \right) .$$

- 1.5. Evolution d'un état quasi-classique.
- (a) On obtient

$$\begin{split} |\psi(0)\rangle &= |\alpha_0\rangle \;, \\ |\psi(t)\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n\,!}} e^{-iE_nt/\hbar} |n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n\,!}} e^{-in\omega t} |n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} |\alpha(t)\rangle \quad \text{avec} \quad \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} = \rho e^{-i(\omega t - \phi)} \;. \end{split}$$

(b) On obtient par conséquent

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \rho \cos(\omega t - \phi) = x_0 \cos(\omega t - \phi) \quad \text{avec} \quad x_0 = \rho \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} ,$$
$$\langle p \rangle_t = -\sqrt{2m\hbar\omega} \rho \sin(\omega t - \phi) = -p_0 \sin(\omega t - \phi) \quad \text{avec} \quad p_0 = \rho \sqrt{2m\hbar\omega} .$$

Ce sont les équations du mouvement d'un oscillateur classique. Par ailleurs, en utilisant le résultat \S 1.3, on a

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2\rho} \ll 1$$
 , $\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{2\rho} \ll 1$.

La position et l'impulsion de l'oscillateur sont donc très bien définies en valeur relative, d'où la nomenclature d'états quasi classiques.

- **1.6.** Application numérique.
- (a) Il faut prendre $\langle x \rangle_0 = x_0$ et $\langle p \rangle_0 = 0$, soit $\phi = 0$

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 3.13 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \alpha(0) = 3.9 \times 10^9 \text{ .}$$

- **(b)** $\Delta x/x_0 = 1/(2\alpha(0)) = 1.3 \times 10^{-10}$.
- (c) Après 1/4 de période, $e^{i\omega t}=e^{i\pi/2}=i\Rightarrow \alpha(T/4)=-i\,3.9\times 10^9.$

2. Fabrication d'un état chat de Schrödinger

2.1. Les vecteurs propres de \hat{W} sont tout simplement les $|n\rangle$, par conséquent

$$\hat{W}|n\rangle = \hbar g \ n^2|n\rangle \ ,$$

et

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |\psi(T)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-ign^2T} |n\rangle .$$

2.2. Si $T = 2\pi/q$, alors $e^{-ign^2T} = e^{-2i\pi n^2} = 1$ et

$$|\psi(T)\rangle = |\alpha\rangle$$
.

Si $T = \pi/g$, alors $e^{-ign^2T} = e^{-i\pi n^2} = 1$ si n est pair, -1 si n est impair soit

$$e^{-ign^2T} = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad |\psi(T)\rangle = |-\alpha\rangle$$
.

2.3. Si $T=\pi/2g$ alors $e^{-ign^2T}=e^{-i\pi n^2/2}=1$ si n est pair, -i si n est impair. On peut récrire cette relation

$$e^{-ign^2T} = \frac{1}{2} \left[1 - i + (1+i)(-1)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}(-1)^n \right] ,$$

soit

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\pi/4} |\alpha\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha\rangle \right) .$$

- 2.4. Un état « chat de Schrödinger ».
- (a) Pour $\alpha = i\rho$, dans l'état $|\alpha\rangle$, l'oscillateur a une position moyenne nulle et une vitesse positive. Dans l'état $|-\alpha\rangle$, l'oscillateur a également une position moyenne nulle mais une vitesse négative. L'état (3) est une superposition quantique de ces deux situations.
- (b) Si $|\alpha| \gg 1$, les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ sont macroscopiquement différents (antinomiques), et l'état (3) représente une superposition quantique de tels états. C'est donc une version (pacifique) de l'état du chat de Schrödinger, avec bien sûr une assimilation abusive puisque l'on donne le nom d'état vivant (ou mort) du chat à un vecteur de l'espace de Hilbert.

3. Superposition quantique et mélange statistique

3.1. Les distributions de probabilité pour la position et l'impulsion sont

$$\mathcal{P}(X) \propto \left| e^{-i\pi/4} \psi_{\alpha}(X) + e^{i\pi/4} \psi_{-\alpha}(X) \right|^{2}$$

$$\propto \left| e^{-i\pi/4} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - i\rho\sqrt{2})^{2}\right) + e^{i\pi/4} \exp\left(-\frac{1}{2}(X + i\rho\sqrt{2})^{2}\right) \right|^{2}$$

$$\propto e^{-X^{2}} \cos^{2}\left(X\rho\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) ;$$

$$\mathcal{P}(P) \propto \left| e^{-i\pi/4} \varphi_{\alpha}(P) + e^{i\pi/4} \varphi_{-\alpha}(P) \right|^{2}$$

$$\simeq \exp\left[-(P - \rho\sqrt{2})^{2}\right] + \exp\left[-(P + \rho\sqrt{2})^{2}\right] .$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que pour $\rho \gg 1$, les deux gaussiennes centrées en $\rho\sqrt{2}$ et $-\rho\sqrt{2}$ ont un recouvrement négligeable.

3.2. Alice va trouver 2 pics contenant chacun environ N/2 résultats centrés respectivement en p_0 et $-p_0$.

- **3.3.** Le mélange statistique de Bob conduit à la même distribution en impulsion que celle mesurée par Alice : les N/2 oscillateurs dans l'état $|\alpha\rangle$ vont tous conduire au résultat de mesure $+p_0$ et les N/2 oscillateurs dans l'état $|-\alpha\rangle$ vont donner $-p_0$. À ce stade, il n'y a donc pas de comportement paradoxal lié à la superposition quantique (3).
- **3.4.** En fonction de X, la résolution du détecteur vérifie

$$\delta X \ll \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho} \ .$$

Alice a donc une résolution suffisante pour mettre en évidence les oscillations de la fonction $\cos^2(X\rho\sqrt{2-\pi/4})$ qui apparaît dans $\mathcal{P}(X)$. La forme de la distribution des résultats va donc reproduire la loi de probabilité pour X tracée sur la figure 1, c'est-à-dire une modulation de période $(\hbar\pi^2/(2m\alpha^2\omega))^{1/2}$, avec une enveloppe gaussienne.

- **3.5.** Si Bob procède à une mesure de position sur les N/2 systèmes dans l'état $|\alpha\rangle$, il va trouver une distribution gaussienne correspondant à la loi de probabilité $\mathcal{P}(X) \propto |\psi_{\alpha}(X)|^2 \propto \exp(-X^2)$. Il trouvera cette même distribution pour les N/2 systèmes dans l'état $|-\alpha\rangle$. L'ensemble de ses résultats sera donc une distribution gaussienne, ce qui est très différent du résultat attendu par Alice : cette mesure de position devrait donc permettre en principe de discriminer entre l'état superposition quantique et le mélange statistique.
- **3.6.** La résolution nécessaire est $\delta x \ll \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sim 5 \times 10^{-26}$ m. Une telle résolution est malheureusement impossible à atteindre en pratique.

4. Fragilité d'une superposition quantique

- **4.1.** On a $E(t) = \hbar \omega(|\alpha_0|^2 e^{-2\gamma t} + 1/2)$. Cette énergie décroît avec le temps. Au bout d'un temps long devant γ^{-1} , l'oscillateur est dans son état fondamental. Ce modèle de dissipation correspond à un environnement à température nulle. L'énergie moyenne acquise par l'environnement E(0) E(t) s'écrit, pour $2\gamma t \ll 1$, $\Delta E(t) \simeq 2\hbar \omega |\alpha_0|^2 \gamma t$.
- **4.2.** Evolution d'un état « chat de Schrödinger ».
- (a) La loi de probabilité pour la position garde son enveloppe gaussienne et le contraste des oscillations est réduit d'un facteur η .
- (b) La loi de probabilité pour les impulsions est donnée par

$$\mathcal{P}(p) = \frac{1}{2} \left(|\varphi_{\alpha_1}(p)|^2 + |\varphi_{-\alpha_1}(p)|^2 \right) + \eta \, \mathcal{R}e \left(i\varphi_{-\alpha_1}^*(p)\varphi_{\alpha_1}(p) \right) .$$

Comme le recouvrement des deux gaussiennes $\varphi_{\alpha_1}(p)$ et $\varphi_{-\alpha_1}(p)$ est négligeable, pour $|\alpha_1| \gg 1$, le terme croisé proportionnel à η ne contribue quasiment pas. On retrouve deux pics centrés en $\pm |\alpha_1| \sqrt{2m\hbar\omega}$.

La différence entre superposition quantique et mélange statistique se fait à partir des résultats de mesure des positions : la superposition quantique conduit à une modulation de période spatiale $\left(\hbar\pi^2/(2m\alpha^2\omega)\right)^{1/2}$ avec une enveloppe gaussienne, alors que seule la gaussienne est présente dans le cas du mélange statistique. Pour voir cette modulation, il faut que le contraste de la modulation ne soit pas trop petit devant 1, soit, pour fixer les idées,

$$\eta \geq 1/10$$
.

- 4.3. Exemple de deux oscillateurs couplés.
- (a) Un calcul sans difficulté donne

$$\langle \beta | - \beta \rangle = e^{-|\beta|^2} \sum_{n} \frac{\beta^{*n} (-\beta)^n}{n!} = e^{-|\beta|^2} e^{-|\beta|^2} = e^{-2|\beta|^2}.$$

(b) Il faut d'après ce qui précède $e^{-2|\beta|^2} \ge 1/10$ soit $|\beta| \le 1$. Aux temps courts devant γ^{-1} , l'énergie du premier oscillateur s'écrit

$$E(t) = E(0) - 2\gamma t |\alpha_0|^2 \hbar \omega .$$

L'énergie du deuxième oscillateur vaut

$$E'(t) = \hbar\omega \left[|\beta(t)|^2 + 1/2 \right] = \frac{\hbar\omega}{2} + 2\gamma t |\alpha_0|^2 \hbar\omega .$$

Il y a donc conservation de l'énergie totale, l'énergie transférée au temps t s'écrivant $\Delta E(t) = 2\gamma t |\alpha_0|^2 \hbar \omega = \hbar \omega |\beta|^2$. La condition pour pouvoir différencier superposition quantique et mélange statistique impose donc $\Delta E \leq \hbar \omega$: il suffit qu'un seul quantum d'énergie $\hbar \omega$ soit transféré pour que cette différenciation devienne problématique.

4.4. Avec $1/2\gamma=1$ année $=3\times 10^7$ secondes, le temps au bout duquel $|\beta|=1$ est donné par $(2\gamma|\alpha_0|^2)^{-1}=2\times 10^{-12}$ seconde!

Conclusion

Même pour un système aussi bien protégé de l'environnement que le pendule simple considéré dans l'énoncé, les superpositions quantiques d'états macroscopiques sont inobservables. Au bout d'un temps très court, toutes les observations que l'on peut faire sur un système initialement préparé dans une telle superposition coïncident avec celles que l'on pourrait faire sur un mélange statistique. Il n'est donc pas possible, au moins actuellement, d'observer des effets liés au caractère paradoxal d'une superposition d'états quantiques macroscopiques. En revanche, l'observation de chatons « mésoscopiques » (entre le macro et le microscopique) n'est pas exclue pour des systèmes à peu de degrés de libertés et très bien isolés. Parmi ces systèmes, citons :

 des photons micro-ondes stockés dans une cavité supraconductrice, la préparation du chat se faisant en envoyant des atomes à travers la cavité;

- des SQUIDS (jonctions Josephson dans des anneaux supraconducteurs);
- des systèmes d'ions piégés et refroidis par laser;
- des micros condensats de Bose-Einstein, piégés aux nœuds d'une onde laser stationnaire.

L'idée de préparation d'un chat développée dans ce problème a été proposée par B. Yurke et D. Stoler, Phys. Rev. Lett. $\bf 57,\,13$ (1986).

9. La cryptographie quantique

Le but de la cryptographie est d'envoyer à un correspondant un message en minimisant les risques de voir ce message intercepté par un tiers. Ce problème montre comment la mécanique quantique peut fournir une procédure répondant à ce besoin. Plus précisément, on suppose ici qu'Alice (A) souhaite envoyer à Bob (B) une certaine information que l'on suppose codée en binaire, par exemple :

$$++--++--+...$$
 (1)

On notera n le nombre de bits de ce message. Alice ne veut transmettre ce message que si elle s'est préalablement assurée que la communication n'est pas écoutée par un « espion ».

1 États de spin 1/2

On s'intéresse à une particule de spin 1/2. L'observable de spin est $\hat{\mathbf{S}} = (\hbar/2)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ où les $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sont les matrices de Pauli. On note $|\sigma_z| = \pm 1$ les états propres de \hat{S}_z avec valeurs propres respectives $\pm \hbar/2$.

Considérons une particule dans l'état de spin $|\sigma_z = +1\rangle$. On effectue la mesure de la composante du spin suivant un axe u situé dans le plan xOz et défini par le vecteur unitaire

$$\mathbf{e}_u = \cos\theta \, \mathbf{e}_z + \sin\theta \, \mathbf{e}_x \ . \tag{2}$$

On rappelle que l'observable associée à cette mesure est

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_u = \frac{\hbar}{2} (\cos \theta \, \hat{\sigma}_z + \sin \theta \, \hat{\sigma}_x) \ . \tag{3}$$

- 1.1. Montrer que les résultats de mesure possibles sont $\pm \hbar/2$.
- 1.2. Montrer que les états propres de l'observable (3) sont de la forme

$$|\sigma_u = +1\rangle = \cos\varphi |\sigma_z = +1\rangle + \sin\varphi |\sigma_z = -1\rangle$$
,
 $|\sigma_u = -1\rangle = -\sin\varphi |\sigma_z = +1\rangle + \cos\varphi |\sigma_z = -1\rangle$.

Exprimer φ en fonction de θ . En déduire les probabilités p_u^{\pm} de trouver $\pm \hbar/2$.

- 1.3. Quels sont les états de spin après une mesure ayant donné $\pm \hbar/2$?
- 1.4. Immédiatement après cette mesure, on mesure la composante du spin suivant l'axe z.

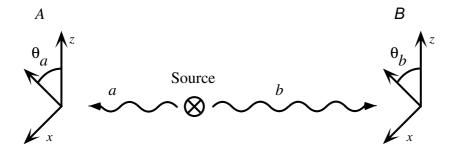


Fig. 1: Source S émettant une paire (a,b) de particules de spin 1/2. Alice mesure la composante du spin a suivant un axe θ_a et Bob mesure la composante du spin b suivant un axe θ_b .

- (a) Donner les résultats possibles et leurs probabilités en fonction du résultat obtenu précédemment le long de u.
- (b) Montrer que la probabilité de retrouver la même valeur $S_z = +\hbar/2$ que dans l'état initial $|\sigma_z = +1\rangle$ est $P_{++}(\theta) = (1 + \cos^2 \theta)/2$.
- (c) En supposant maintenant que l'état initial est $|\sigma_z=-1\rangle$, quelle est, dans la même séquence de mesures, la probabilité $P_{--}(\theta)$ de retrouver $S_z=-\hbar/2$ dans la seconde mesure?

2 Etat intriqué de deux spins

On dispose d'une source S qui produit une paire (a,b) de particules de spin 1/2, préparée dans l'état $|\psi\rangle = \varphi(\boldsymbol{r}_a,\boldsymbol{r}_b) |\Sigma\rangle$, c'est-à-dire que les variables spatiales et les variables de spin sont indépendantes. L'état de spin des deux particules est :

$$|\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\sigma_z^a = +1\rangle \otimes |\sigma_z^b = +1\rangle + |\sigma_z^a = -1\rangle \otimes |\sigma_z^b = -1\rangle \right) .$$
 (4)

Dans tout le problème, on ne s'intéresse qu'aux mesures de spin. Dans l'expression (4), $|\sigma_u^a = \pm 1\rangle$ (en l'occurrence u = z) désignent les états propres de la composante le long de u du spin de la particule a, de même pour b.

2.1. Montrer que cet état peut également s'écrire :

$$|\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\sigma_x^a = 1\rangle \otimes |\sigma_x^b = 1\rangle + |\sigma_x^a = -1\rangle \otimes |\sigma_x^b = -1\rangle \right) .$$
 (5)

2.2. La paire de particules (a,b) étant préparée dans l'état de spin (4-5), ces particules sont séparées spatialement (figure 1) sans que l'état de spin soit affecté (avant qu'une mesure n'intervienne).

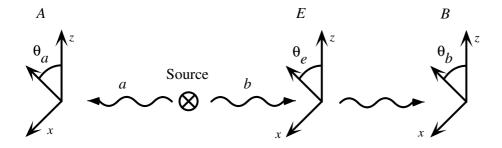


Fig. 2: Un espion, situé entre la source S et Bob, fait une mesure d'une composante du spin b suivant un axe θ_e , avant que Bob ne mesure la composante de ce spin suivant l'axe θ_b .

- (a) Alice mesure d'abord la composante du spin de a suivant un axe u_a , d'angle θ_a . Quels sont les résultats de mesure et les probabilités correspondantes dans les deux cas $\theta_a = 0$ (axe z) et $\theta_a = \pi/2$ (axe x)?
- (b) Justifier qu'après cette mesure, l'état de spin des deux particules est :

Axe	Résultat	État
\overline{z}	$+\hbar/2$	$ \sigma_z^a = +1\rangle \otimes \sigma_z^b = +1\rangle$
z	$-\hbar/2$	$ \sigma_z^a=-1 angle\otimes \sigma_z^b=-1 angle$
x	$+\hbar/2$	$ \sigma_x^a = +1\rangle \otimes \sigma_x^b = +1\rangle$
x	$-\hbar/2$	$ \sigma_x^a = -1\rangle \otimes \sigma_x^b = -1\rangle$

En déduire qu'on peut désormais ignorer la particule a pour ce qui concerne les mesures de spin sur b.

On rappelle que si $|\psi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle$ est un état factorisé et $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$, où \hat{A} et \hat{B} agissent respectivement dans les espaces de $|u\rangle$ et de $|v\rangle$, alors $\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle = \langle u | \hat{A} | u \rangle \langle v | \hat{B} | v \rangle$.

- **2.3.** Après cette mesure d'Alice, Bob mesure la composante du spin de b suivant un axe u_b d'angle θ_b . Déterminer les résultats de mesure possibles de Bob et leurs probabilités, en fonction du résultat d'Alice, dans les quatre configurations suivantes :
- a) $\theta_a = 0, \theta_b = 0,$
- b) $\theta_a = 0, \theta_b = \pi/2,$
- c) $\theta_a = \pi/2, \theta_b = 0,$
- d) $\theta_a = \pi/2, \theta_b = \pi/2.$

Dans quel(s) cas la mesure sur a et celle sur b donnent-elles avec certitude le même résultat?

2.4. On se place dans la situation $\theta_a = 0$. On suppose qu'un « espion », situé entre la source S et Bob, mesure la composante du spin b suivant un axe u_e d'angle θ_e (figure 2).

- 1. Alice et Bob décident d'un choix d'axes x et z qui leur serviront de directions d'analyse.
- 2. Alice, qui dispose de la source S, prépare une séquence ordonnée de $N \gg n$ paires de spins 1/2 dans l'état (4) (n: nombre de bits du message). Elle envoie les spins b à Bob, et garde les spins a.
- 3. Alice et Bob font, pour chacun des spins dont ils disposent, la mesure de la composante x ou z. Le choix entre x et z se fait de manière aléatoire et équiprobable pour chaque spin, et il n'y a pas de corrélation, pour un spin donné, entre la composante choisie par Alice et celle choisie par Bob. Ils stockent chacun l'ensemble de leurs résultats.
- 4. Bob sélectionne une partie FN de ses mesures et il communique publiquement à Alice (par radio, www, etc.) la direction d'analyse choisie et le résultat obtenu pour chacune des mesures de cet ensemble. En pratique, $F\sim 0.5$.
- 5. Alice compare pour cet ensemble FN ses directions et ses résultats avec ceux que vient de lui communiquer Bob. Elle peut alors détecter la présence éventuelle d'un espion. Si un espion est repéré, la procédure s'arrête et une recherche « physique » de l'espion doit avoir lieu. Sinon :
- 6. Alice annonce publiquement qu'elle est convaincue de ne pas avoir été écoutée, et Bob lui transmet, toujours publiquement, ses directions d'analyse pour les (1-F)N spins restants. En revanche, il ne communique pas ses résultats correspondants.

7. ...

Fig. 3: Protocole pour la cryptographie quantique.

- (a) Quels sont, en fonction de θ_e et du résultat de mesure d'Alice, les résultats de mesure de l'espion et leurs probabilités?
- (b) Après cette mesure de l'espion, Bob mesure le spin de b suivant l'axe défini par $\theta_b = 0$. Que trouve-t-il, avec quelle probabilité, en fonction du résultat trouvé par l'espion?
- (c) Quelle est la probabilité $P(\theta_e)$ qu'Alice et Bob trouvent le même résultat ?
- (d) Quelle est la moyenne de $P(\theta_e)$ si l'espion choisit au hasard θ_e avec une probabilité uniforme sur $[0, 2\pi]$? Quelle est cette moyenne s'il choisit seulement les deux valeurs $\theta_e = 0$ et $\theta_e = \pi/2$ de façon équirépartie?

3 Protocole de codage de messages confidentiels

On souhaite utiliser les résultats qui précèdent à la transmission confidentielle d'information. Alice et Bob utilisent alors la procédure détaillée dans

	Paire n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	Axe	x	x	z	x	z	z	\boldsymbol{x}	z	z	z	x	\overline{x}
A	Résultat	+	_	+	+	_	_	+	+	+	_	+	_
В	Axe	x		x	z			x			x	x	
В	Résultat	+		_	_			+			+	+	

Tab. 9.1: Expérience 1 réalisée avec N=12 paires de spins. Haut : ensemble des choix d'axes et des résultats obtenus par Alice. Bas : choix d'axes et résultats communiqués publiquement par Bob.

	Paire n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	Axe	x	z	z	z	x	x	z	x	x	z	x	\overline{z}
A	Résultat	+	+	_	+	+	_	+	+	_	_	+	+
В	Axe		x			x			x	z		z	\overline{z}
В	Résultat		+			+			_	+		+	_

Tab. 9.2: Expérience 2 réalisée avec N=12 paires de spins. Haut : ensemble des choix d'axes et des résultats obtenus par Alice. Bas : choix d'axes et résultats communiqués publiquement par Bob.

l'encadré donné en figure 3. Commenter cette procédure, en s'attachant plus particulièrement à répondre aux questions suivantes :

- 3.1. Comment Alice peut-elle se convaincre de la présence d'un espion?
- **3.2.** Quelle est la probabilité qu'un espion présent ne soit pas détecté? On évaluera numériquement cette probabilité pour FN = 200.
- **3.3.** L'espion gagne-t-il en « invisibilité » s'il connaît le système d'axes Oxz retenu par Alice et Bob pour effectuer leur mesure?
- **3.4.** Discuter sur les deux « expériences » décrites dans les tableaux 9.1 et 9.2 l'existence d'un espion. On montrera que la communication 2 a certainement été espionnée. On calculera la probabilité qu'un espion ait opéré sans être détecté dans la communication 1.
- **3.5.** Compléter la phrase manquante (n° 7 de la figure 3) en indiquant comment Alice peut envoyer son message (1) à Bob, sans utiliser d'autres paires de spins que les N paires déjà produites et analysées par Bob et elle-même. En utilisant la table 9.3, indiquer comment dans l'expérience 1 ci-dessus, Alice peut transmettre à Bob le message $\{+,-\}$.

	Paire n°	2	5	6	8	9	12
В	Axe	\boldsymbol{x}	\boldsymbol{x}	\boldsymbol{x}	z	\boldsymbol{x}	\boldsymbol{x}

TAB. 9.3: Choix d'axes communiqués publiquement par Bob dans le cadre de l'expérience 1, après qu'Alice se soit déclarée confiante de ne pas avoir été écoutée.

4 Corrigé

1. Etats de spin 1/2

1.1. L'observable de spin suivant l'axe u est

$$\hat{\boldsymbol{S}}.\boldsymbol{e}_u = rac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} .$$

Les résultats de mesure possibles sont les valeurs propres $\pm \hbar/2$.

1.2. Les vecteurs propres correspondants sont

$$|\sigma_u = +1\rangle = \cos(\theta/2)|\sigma_z = +1\rangle + \sin(\theta/2)|\sigma_z = -1\rangle |\sigma_u = -1\rangle = -\sin(\theta/2)|\sigma_z = +1\rangle + \cos(\theta/2)|\sigma_z = -1\rangle .$$

Par conséquent $\varphi = \theta/2$. Les probabilités s'en déduisent directement

$$p_u^{\pm} = |\langle \sigma_u = \pm 1 | \sigma_z = +1 \rangle|^2$$
 $p_u^{+} = \cos^2(\theta/2)$ $p_u^{-} = \sin^2(\theta/2)$.

- **1.3.** Après une mesure donnant le résultat $+\hbar/2$ (resp. $-\hbar/2$), l'état est $|\sigma_u=+1\rangle$ (resp. $|\sigma_u=-1\rangle$).
- 1.4. Deux mesures successives.
- (a) Si la mesure le long de u a donné +h/2, les probabilités de la seconde mesure sont

$$p_z^+(\pm \hbar/2) = |\langle \sigma_z = \pm 1 | \sigma_u = +1 \rangle|^2$$
,

avec

$$p_z^+(+/\hbar/2) = \cos^2(\theta/2)$$
, $p_z^+(-\hbar/2) = \sin^2(\theta/2)$.

Si la mesure le long de u a donné $-\hbar/2$, les probabilités sont

$$p_z^-(+\hbar/2) = \sin^2(\theta/2)$$
, $p_z^-(-\hbar/2) = \cos^2(\theta/2)$.

(b) On retrouve $S_z = +\hbar/2$ avec probabilité

$$\begin{split} p_u^+ \times p_z^+(+\hbar/2) &= \cos^4\theta/2 \text{ si la mesure sur } u \text{ a donn\'e} \ + \hbar/2 \ , \\ p_u^- \times p_z^-(+\hbar/2) &= \sin^4\theta/2 \text{ si la mesure sur } u \text{ a donn\'e} \ - \hbar/2 \ , \end{split}$$

soit au total

$$P_{++} = \cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$
.

(c) Les résultats intermédiaires sont inversés, mais la probabilité est la même

$$P_{--} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \ .$$

2. Etat intriqué de deux spins

2.1. On a $|\sigma_x=\pm 1\rangle=[|\sigma_z=+1\rangle\pm|\sigma_z=-1\rangle]/\sqrt{2}$. En faisant la substitution dans l'expression (5), on obtient

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \Big[\left(|\sigma_z^a = +1\rangle + |\sigma_z^a = -1\rangle \right) \otimes \left(|\sigma_z^b = +1\rangle + |\sigma_z^b = -1\rangle \right) \\ + \left(|\sigma_z^a = +1\rangle - |\sigma_z^a = -1\rangle \right) \otimes \left(|(\sigma_z^b = +1\rangle - |\sigma_z^b = -1\rangle \right) \Big] .$$

Les termes croisés s'éliminent, d'où le résultat. Plus généralement, l'état (5) est invariant par rotation autour de l'axe Oy.

2.2. Mesure d'Alice.

(a) Alice trouve $+\hbar/2$ avec p=1/2 dans chaque cas. En effet, le projecteur sur l'état propre $|\sigma_z^a=+1\rangle$ étendu à 1'espace produit tensoriel est

$$\hat{P}^a_+ = |\sigma^a_z = 1\rangle\langle\sigma^a_z = 1|\otimes\hat{I}^b$$

et $p(+\hbar/2) = \langle \Sigma | \hat{P}_{+}^{a} | \Sigma \rangle = 1/2$. On raisonne de même pour $p(-\hbar/2)$.

(b) Le tableau de résultats est une conséquence de la réduction du paquet d'ondes. Si Alice mesure selon l'axe z, on part de la formule (4); les projections normalisées sur les états propres de \hat{S}^a_z sont $|\sigma^a_z=1\rangle\otimes|\sigma^b_z=1\rangle$ (résultat d'Alice $+\hbar/2$) et $|\sigma^a_z=-1\rangle\otimes|\sigma^b_z=-1\rangle$ (résultat d'Alice $-\hbar/2$). Un résultat identique est valable pour une mesure le long de x à cause de l'invariance par rotation.

Toute mesure sur b (probabilité, valeur moyenne) fera intervenir des valeurs moyennes d'opérateurs du type $\hat{I}^a \otimes \hat{B}^b$ où \hat{B} est un projecteur, un opérateur de spin, etc. Puisque les états considérés sont factorisés, les expressions correspondantes pour les mesures de spin sur b seront de la forme

$$\left(\langle \sigma_z^a = 1 | \otimes \langle \sigma_z^b = 1 | \right) \ \hat{I}^a \otimes \hat{B}^b \ \left(| \sigma_z^a = 1 \rangle \otimes | \sigma_z^b = 1 \rangle \right) \ .$$

Ceci se réduit à :

$$\langle \sigma_z^a = 1 | \sigma_z^a = 1 \rangle \times \langle \sigma_z^b = 1 | \hat{B}^b | \sigma_z^b = 1 \rangle \ = \ \langle \sigma_z^b = 1 | \hat{B}^b | \sigma_z^b = 1 \rangle \ ,$$

où l'état de a n'intervient pas.

2.3. Pour les configurations a et b, on peut résumer les résultats comme suit :

Config.	θ_a	θ_b	Alice	Bob	probabilité
a	0	0	$+\hbar/2$	$+\hbar/2$	p = 1
a	0	0	$-\hbar/2$	$-\hbar/2$	p = 1
b	0	$\pi/2$	$+\hbar/2$	$\pm \hbar/2$	$p_{\pm} = 1/2$
b	0	$\pi/2$	$-\hbar/2$	$\pm \hbar/2$	$p_{\pm} = 1/2$

Les résultats pour $\theta_a = \pi/2$, $\theta_b = 0$ (config. c) sont identiques à ceux obtenus pour $\theta_a = 0$, $\theta_b = \pi/2$; de même, le cas $\theta_a = \pi/2$, $\theta_b = \pi/2$ (config. d) est

identique à $\theta_a=0,\,\theta_b=0$ (on retrouve en fait le même résultat pour tout $\theta_a=\theta_b$).

Dans les cas (a) et (d), c'est-à-dire lorsqu'ils mesurent suivant le même axe, Alice et Bob trouvent à coup sûr le même résultat.

- 2.4. Intervention de l'espion.
- (a) Pour ce qui concerne les résultats d'Alice et de l'espion, on a :

Alice	espion	probabilité
$+\hbar/2$	$+\hbar/2$	$\cos^2(\theta_s/2)$
$+\hbar/2$	$-\hbar/2$	$\sin^2(\theta_s/2)$
$-\hbar/2$	$+\hbar/2$	$\sin^2(\theta_s/2)$
$-\hbar/2$	$-\hbar/2$	$\cos^2(\theta_s/2)$

(b) Pour ce qui concerne les résultats de l'espion et de Bob, on a :

Espion	Bob	probabilité
$+\hbar/2$	$+\hbar/2$	$\cos^2(\theta_s/2)$
$+\hbar/2$	$-\hbar/2$	$\sin^2(\theta_s/2)$
$-\hbar/2$	$+\hbar/2$	$\sin^2(\theta_s/2)$
$-\hbar/2$	$-\hbar/2$	$\cos^2(\theta_s/2)$

(c) La probabilité qu'Alice et Bob trouvent le même résultat a été calculée plus haut (§ 1.4) :

$$P(\theta_e) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta_e) .$$

(d) Étonnamment, les deux probabilités sont les mêmes. Avec une probabilité uniforme sur $[0,2\pi]$ on a $\int_0^{2\pi} P(\theta_e) d\theta_e/(2\pi) = 3/4$. Avec une alternative simple, P(0) = 1, $P(\pi/2) = 1/2$, soit en moyenne $\overline{p} = 3/4$ si les deux valeurs $\theta_e = 0$ et $\theta_e = \pi/2$ sont équiprobables.

3. Protocole de codage de messages confidentiels

- **3.1.** Si $\theta_a = \theta_b$, les résultats d'Alice et Bob doivent être les mêmes. Si *une seule* mesure avec $\theta_a = \theta_b$ est différente, la présence d'un espion est certaine. Si $\theta_a \neq \theta_b$, en moyenne la moitié des résultats sont les mêmes, la moitié sont opposés.
- **3.2.** La seule chance pour l'espion de rester invisible est que Bob et Alice aient enregistré les mêmes résultats chaque fois qu'ils ont choisi la même direction de mesure. Pour chaque paire de spins, il y a une probabilité 1/2 pour qu'ils choisissent le même axe, et il y a dans ce cas une probabilité 1/4 pour qu'ils ne trouvent pas le même résultat si un espion est en opération. Par conséquent, pour chaque paire de spin, il y a une probabilité 1/8 pour que l'espion soit détecté et une probabilité 7/8 pour qu'il reste invisible.

A première vue, cela semble être une méthode inefficace. Mais la probabilité $(7/8)^{FN}$ est très faible si FN est grand. Pour FN=200, on a $(7/8)^{200}\sim 2.5\times 10^{-12}$.

- **3.3.** Étonnamment, comme on l'a vu ci-dessus, l'espion ne « gagne » rien à tenter de connaître le système d'axe Oxz choisi par Alice et Bob.
- $\bf 3.4.$ Table 2 : les mesures 8 et 12 où les axes sont les mêmes donnent des résultats opposés : chercher l'espion!
- Table 1 : les mesures 1, 7, 11 donnent bien les mêmes valeurs et sont compatibles avec l'absence d'espionnage. Toutefois, le nombre N utilisé est bien faible ; la probabilité qu'un espion ait opéré, mais soit passé inaperçu, est $(3/4)^3 \approx 40\%$.
- **3.5.** Alice sélectionne parmi les (1-F)N mesures restantes une suite où les axes sont les mêmes et où la suite des résultats de mesure correspond à son message. Elle communique en clair à Bob les numéros de ces mesures et Bob lit sur ses données le message en question.

Dans le cas présent, Alice indique à Bob de regarder ses résultats n° 8 et 12, sur lesquels il lit +-.

Commentaire

Ce procédé (utilisant des photons et non des spin 1/2) a été intensivement étudié dans les laboratoires de recherche depuis 1990 et il est désormais commercialisé. Pour plus de détails, on pourra consulter les articles suivants :

- La Mécanique Quantique au secours des agents secrets » ; La Recherche, volume 22, p. 790 (Juin 1991).
- « Quantum Cryptography », Scientific American, vol. 267, p. 26 (Novembre 1992).

10. La gomme quantique

Ce problème traite d'un processus quantique où la superposition de deux amplitudes de probabilité conduit à une interférence. Les deux amplitudes sont associées à deux chemins quantiques, comme dans une expérience de fentes d'Young. On se propose de montrer d'abord que l'interférence disparaît lorsqu'on effectue une mesure intermédiaire, puis voir que des interférences peuvent réapparaître si l'effet de cette mesure est « effacé » par une gomme quantique.

On considère un jet de neutrons, particules de spin 1/2, se propageant selon l'axe Ox avec une vitesse v. Dans tout le problème, on traitera le mouvement spatial des neutrons comme un mouvement classique rectiligne uniforme. Seule l'évolution de leur état de spin, ou de moment magnétique, sera traitée quantiquement.

1 La résonance magnétique

On note $|n:\pm\rangle$ les états propres de la projection du spin d'un neutron suivant Oz. On applique un champ magnétique uniforme dirigé suivant Oz, $\boldsymbol{B}_0 = B_0 \boldsymbol{u}_z$. On note $\hat{\boldsymbol{\mu}}_n = \gamma_n \hat{\boldsymbol{S}}_n$ le moment magnétique du neutron, où γ_n est le rapport gyromagnétique de la particule.

- 1.1. Quels sont les niveaux d'énergie magnétique du neutron en présence du champ B_0 ? On posera $\omega_0 = -\gamma_n B_0$.
- **1.2.** Les neutrons traversent une cavité de longueur L entre les instants t_0 et $t_1 = t_0 + L/v$. Dans cette cavité, on applique, en plus du champ constant \boldsymbol{B}_0 , un champ magnétique $\boldsymbol{B}_1(t)$, tournant à la vitesse angulaire ω :

$$\boldsymbol{B}_1(t) = B_1(\cos\omega t \ \boldsymbol{u}_x + \sin\omega t \ \boldsymbol{u}_y) \ . \tag{1}$$

On considère un neutron entrant dans la cavité à l'instant t_0 . On note

$$|\psi_n(t)\rangle = \alpha_+(t)|n:+\rangle + \alpha_-(t)|n:-\rangle$$

son état de spin à l'instant t. Écrire les équations d'évolution de $\alpha_{\pm}(t)$ pour $t_0 \le t \le t_1$. On posera $\omega_1 = -\gamma_n B_1$.

- **1.3.** En posant $\alpha_{\pm}(t) = \beta_{\pm}(t) \exp(\mp i\omega(t-t_0)/2)$, ramener le problème à un système différentiel à coefficients constants.
- **1.4.** On suppose l'excitation quasi-résonnante : $|\omega \omega_0| \ll \omega_1$; on néglige donc les termes en $\omega \omega_0$ figurant dans le système précédent. Vérifier que

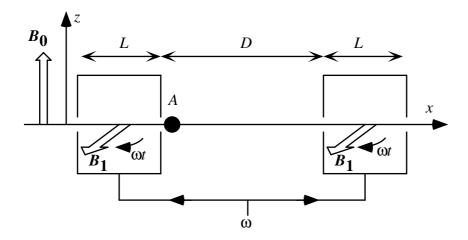


Fig. 1: Configuration de Ramsey; le rôle de l'atome détecteur A est précisé dans les parties 3 et 4.

pour $t_0 \le t \le t_1$, on a dans cette approximation :

$$\beta_{\pm}(t) = \beta_{\pm}(t_0)\cos\theta - ie^{\mp i\omega t_0}\beta_{\mp}(t_0)\sin\theta ,$$

où l'on a posé $\theta = \omega_1(t-t_0)/2$.

1.5. Montrer que, dans la même approximation, l'état de spin à l'instant t_1 de sortie de la cavité s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{+}(t_{1}) \\ \alpha_{-}(t_{1}) \end{pmatrix} = U(t_{0}, t_{1}) \begin{pmatrix} \alpha_{+}(t_{0}) \\ \alpha_{-}(t_{0}) \end{pmatrix} ,$$

où la matrice $U(t_0, t_1)$ est :

$$U(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} e^{-i\chi} \cos \phi & -ie^{-i\delta} \sin \phi \\ -ie^{i\delta} \sin \phi & e^{i\chi} \cos \phi \end{pmatrix}.$$

On a posé $\phi = \omega_1(t_1 - t_0)/2$, $\chi = \omega(t_1 - t_0)/2$ et $\delta = \omega(t_1 + t_0)/2$.

2 La méthode des franges de Ramsey

Les neutrons sont préparés initialement dans l'état $|n:-\rangle$. Ils traversent successivement deux cavités identiques, du type de celle considérée ci-dessus ; c'est la configuration dite de Ramsey, représentée sur la figure 1. Par construction, le même champ $\boldsymbol{B}_1(t)$, donné dans l'équation (1), règne dans les deux cavités. Le module B_1 de ce champ est ajusté de sorte que $\phi=\pi/4$. Le champ constant \boldsymbol{B}_0 règne dans tout le dispositif. On mesure à la sortie, pour une série

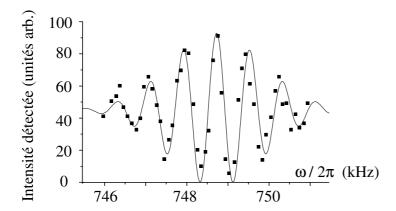


Fig. 2: Intensité de sortie dans l'état $|n:+\rangle$ en fonction de la fréquence $\omega/2\pi$ pour un jet de neutrons non monocinétique.

de valeurs de la pulsation ω au voisinage de ω_0 , le nombre de neutrons qui sont passés dans l'état $|n:+\rangle$.

- **2.1.** Soit un neutron entrant dans la première cavité à l'instant t_0 dans l'état $|n:-\rangle$. Quel est son état de spin à la sortie de cette cavité? Quelle est la probabilité de trouver le neutron dans l'état $|n:+\rangle$ à cet endroit?
- **2.2.** L'instant d'entrée dans la seconde cavité est $t'_0 = t_1 + T$, avec T = D/v où D est la distance entre les deux cavités. Entre les deux cavités, le spin précesse librement dans le champ \mathbf{B}_0 . Quel est l'état de spin du neutron à l'instant t'_0 ?
- **2.3.** Soit t_1' l'instant de sortie de la seconde cavité : $t_1' t_0' = t_1 t_0$. Écrire la matrice de transition $U(t_0', t_1')$ dans la seconde cavité. On exprimera $\delta' = \omega(t_1' + t_0')/2$ en fonction de ω , t_0 , t_1 et T.
- **2.4.** Calculer la probabilité P_+ de détecter le neutron dans l'état $|n:+\rangle$ à la sortie de la seconde cavité. Montrer que c'est une fonction oscillante de $(\omega_0-\omega)T$. Interpréter ce résultat comme une interférence des amplitudes de probabilité correspondant respectivement à un basculement du spin dans la première et dans la deuxième cavité.
- **2.5.** En pratique, le jet de neutrons a une certaine dispersion en vitesse. Il en résulte une dispersion dans le temps de passage T d'une cavité à l'autre. Un résultat expérimental typique, donnant l'intensité du faisceau de neutrons dans l'état $|n:+\rangle$ en fonction de la fréquence du champ tournant $\omega/2\pi$ est présenté sur la figure 2.
- (a) Retrouver la forme du signal mesuré, en moyennant le résultat de la

question précédente avec la distribution

$$dp(T) = \frac{1}{\tau \sqrt{2\pi}} e^{-(T-T_0)^2/2\tau^2} dT.$$

On donne $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Omega T) dp(T) = e^{-\Omega^2 \tau^2/2} \cos(\Omega T_0)$.

- (b) Pour cette expérience, on avait choisi $B_0 = 2.57 \times 10^{-2}$ T et D = 1.6 m. Déterminer le moment magnétique du neutron. Évaluer la vitesse moyenne $v_0 = D/T_0$ et la dispersion en vitesse $\delta v = v_0 \tau/T_0$ du jet de neutrons.
- (c) De quelle expérience d'interférences lumineuses peut-on rapprocher ce résultat?
- **2.6.** On insère entre les deux cavités de la figure 1 un dispositif permettant de mesurer l'état de spin $|n:+\rangle$ ou $|n:-\rangle$ du neutron à cet endroit (le principe de ce détecteur est présenté dans la partie suivante). Déterminer la probabilité $P_{+,+}$ de détecter le neutron dans l'état $|n:+\rangle$ entre les deux cavités, puis dans l'état $|n:+\rangle$ à la sortie de la seconde cavité, et la probabilité $P_{-,+}$ de détecter le neutron dans l'état $|n:-\rangle$ entre les deux cavités, puis dans l'état $|n:+\rangle$ à la sortie de la seconde cavité. Montrer que l'on ne trouve pas $P_{+}=P_{+,+}+P_{-,+}$ et commenter ce résultat.

3 Détection de l'état de spin d'un neutron

Pour détecter l'état de spin d'un neutron, on le fait interagir pendant un temps τ avec un atome immobile, lui aussi de spin 1/2. On note $\hat{\boldsymbol{S}}_a$ l'observable de spin de l'atome, et $|a:\pm\rangle$ les deux états propres de l'observable \hat{S}_{az} . Après l'interaction neutron-atome, on mesure le spin de l'atome et on souhaite en déduire le spin du neutron.

- **3.1.** Préliminaire : États de spin de l'atome. On note $|a:\pm x\rangle$ les états propres de \hat{S}_{ax} et $|a:\pm y\rangle$ les états propres de \hat{S}_{ay} . Écrire $|a:\pm x\rangle$ et $|a:\pm y\rangle$ dans la base $\{|a:+\rangle, |a:-\rangle\}$. Exprimer $|a:\pm y\rangle$ en fonction de $|a:\pm x\rangle$.
- **3.2.** On suppose que l'interaction neutron-atome détecteur ne dévie pas la trajectoire du neutron. On la modélise par un créneau temporel de durée τ pendant lequel le potentiel d'interaction « neutron-atome » peut se mettre sous la forme :

$$\hat{V} = \frac{2A}{\hbar} \, \hat{S}_{nz} \otimes \hat{S}_{ax} \; .$$

On néglige l'action de tout champ extérieur (en particulier le champ B_0) pendant la durée τ de l'interaction. Montrer que \hat{S}_{nz} et \hat{V} commutent. En déduire leurs vecteurs propres communs et donner les valeurs propres correspondantes.

3.3. On choisit dans toute la suite une durée τ d'interaction telle que :

$$A\tau = \pi/2$$
.

On suppose de plus qu'à l'instant initial, l'état du système est

$$|\psi(0)\rangle = |n:+\rangle \otimes |a:+y\rangle$$
.

Calculer l'état final du système $|\psi(\tau)\rangle$. Même question si l'état initial est $|\psi(0)\rangle = |n:-\rangle \otimes |a:+y\rangle$.

3.4. On suppose que l'état initial est

$$|\psi(0)\rangle = (\alpha_+|n:+\rangle + \alpha_-|n:-\rangle) \otimes |a:+y\rangle$$
.

Après l'interaction atome-neutron ci-dessus, on mesure la composante suivant z du spin de l'atome. Que trouve-t-on, avec quelles probabilités? Après cette mesure, que peut-on prévoir sur la valeur de la composante suivant z du spin du neutron?

4 Une gomme quantique

Nous avons vu dans ce qui précède qu'une mesure de l'état du neutron entre les deux cavités fait disparaître l'interférence trouvée en § 2.4. Le but de cette partie est de montrer qu'il est possible de retrouver une interférence si l'information laissée par le neutron sur l'atome détecteur est « effacée » par une mesure appropriée.

On envoie un neutron, initialement dans l'état $|n:-\rangle$, dans le système à deux cavités de la partie 2 . Immédiatement après la première cavité se trouve l'atome détecteur de la partie 3, préparé dans l'état $|a:+y\rangle$. Par hypothèse, l'état de spin de l'atome n'évolue que pendant le temps τ d'interaction avec le neutron.

- 4.1. Écrire l'état du système neutron-atome quand le neutron se trouve :
- (a) en sortie de la première cavité (instant t_1), avant interaction avec l'atome,
- (b) just après l'interaction avec l'atome (instant $t_1 + \tau$),
- (c) à l'entrée de la seconde cavité (instant t'_0),
- (c) en sortie de la seconde cavité (instant t'_1).
- **4.2.** Quelle est la probabilité de trouver le neutron dans l'état $|n:+\rangle$ à l'instant t_1' ? Cette loi de probabilité résulte-t-elle d'un phénomène d'interférences? Interpréter le résultat obtenu.
- **4.3.** À l'instant t_1' , Nicolas mesure la composante du spin du neutron suivant z et Alice la composante du spin de l'atome suivant y. On s'intéresse au cas où les deux mesures donnent $+\hbar/2$. Montrer que la probabilité d'obtenir ce résultat résulte d'un phénomène d'interférence.
- **4.4.** Comment ce phénomène est-il compatible avec la conclusion atteinte à la question 4.2?
- **4.5.** Entre les trois propositions suivantes, laquelle ou lesquelles vous semblent appropriées?

- (a) Dès qu'Alice fait une mesure sur l'atome A, Nicolas voit apparaître des interférences dans le signal qu'il observe sur le neutron n.
- (b) La connaissance du résultat de mesure d'Alice sur chaque événement permet à Nicolas de sélectionner un sous-ensemble de ses propres événements qui présente des interférences.
- (c) L'expérience correspond à une interférence entre deux chemins « quantiques » du spin du neutron. En « remettant » l'atome dans son état initial, la mesure faite par Alice « efface » l'information concernant le chemin quantique suivi par le spin du neutron, et permet à des interférences de réapparaître.
- **4.6.** Alice fait maintenant sa mesure suivant un axe \boldsymbol{w} d'orientation quelconque. Montrer que le contraste des interférences varie proportionnellement à $|\sin\eta|$, où $\cos\eta=\boldsymbol{w}.\boldsymbol{u}_z$. Interpréter le résultat.

5 Corrigé

1. La résonance magnétique.

- 1.1. Les niveaux d'énergie magnétique sont $E_{\pm} = \mp \gamma_n \hbar B_0/2 = \pm \hbar \omega_0/2$.
- 1.2. L'hamiltonien est

$$H = \frac{\hbar}{2} \left(\begin{array}{cc} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{array} \right) \ ,$$

et les équations d'évolution s'écrivent :

$$i\dot{\alpha}_{+}=\frac{\omega_{0}}{2}\alpha_{+}+\frac{\omega_{1}}{2}e^{-i\omega t}\alpha_{-} \qquad i\dot{\alpha}_{-}=-\frac{\omega_{0}}{2}\alpha_{-}+\frac{\omega_{1}}{2}e^{+i\omega t}\alpha_{+}$$

1.3. Avec ces nouvelles variables β_{\pm} , on a

$$i\dot{\beta}_{+} = \frac{\omega_0 - \omega}{2}\beta_{+} + \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t_0}\beta_{-} \qquad i\dot{\beta}_{-} = \frac{\omega - \omega_0}{2}\beta_{-} + \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t_0}\beta_{+} \ .$$

1.4. Si $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_1$, on a en bonne approximation

$$i\dot{\beta}_{+} = \frac{\omega_{1}}{2}e^{-i\omega t_{0}}\beta_{-} \qquad i\dot{\beta}_{-} = \frac{\omega_{1}}{2}e^{i\omega t_{0}}\beta_{+} \ ,$$

dont la solution est effectivement

$$\beta_{\pm}(t) = \beta_{\pm}(t_0) \cos \frac{\omega_1(t - t_0)}{2} - i e^{\mp i\omega t_0} \beta_{\mp}(t_0) \sin \frac{\omega_1(t - t_0)}{2}$$
.

1.5. En posant $\phi = \omega_1(t_1 - t_0)/2$, $\chi = \omega(t_1 - t_0)/2$, et $\delta = \omega(t_1 + t_0)/2$, on obtient:

$$\alpha_{+}(t_{1}) = e^{-i\chi} \left[\alpha_{+}(t_{0})\cos\phi - i\alpha_{-}(t_{0})e^{-i\omega t_{0}}\sin\phi \right]$$

$$\alpha_{-}(t_{1}) = e^{i\chi} \left[\alpha_{-}(t_{0})\cos\phi - i\alpha_{+}(t_{0})e^{i\omega t_{0}}\sin\phi \right]$$

et on trouve par conséquent

$$U = \left(\begin{array}{ccc} e^{-i\chi}\cos\phi & -i \ e^{-i\delta}\sin\phi \\ -i \ e^{i\delta}\sin\phi & e^{i\chi}\cos\phi \end{array} \right) \ .$$

2. Franges de Ramsey.

2.1. Pour $\phi = \pi/4$ les conditions initiales sont $\alpha_+(t_0) = 0$, $\alpha_-(t_0) = 1$. À l'instant t, le vecteur d'état s'écrit :

$$|\psi(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-i e^{-i\delta}|n:+\rangle + e^{i\chi}|n:-\rangle].$$

En d'autre termes, $\alpha_{+}(t_1) = -ie^{-i\delta}/\sqrt{2}$, $\alpha_{-}(t_1) = e^{i\chi}/\sqrt{2}$, et $P_{\pm} = 1/2$.

2.2. Soit T = D/v. Le spin du neutron précesse librement dans l'intervalle $[t_1, t_1 + T]$, d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha_{+}(t'_{0}) \\ \alpha_{-}(t'_{0}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ie^{-i\delta}e^{-i\omega_{0}T/2} \\ e^{i\chi}e^{+i\omega_{0}T/2} \end{pmatrix} . \tag{2}$$

2.3. Par définition, $t_0'=t_1+T$ et $t_1'=2t_1-t_0+T$. La matrice de transition dans la seconde cavité est donc :

$$U' = \begin{pmatrix} e^{-i\chi'}\cos\phi' & -ie^{-i\delta'}\sin\phi' \\ -ie^{i\delta'}\sin\phi' & e^{i\chi'}\cos\phi' \end{pmatrix} ,$$

avec $\phi' = \phi = \omega_1(t_1 - t_0)/2 = \omega_1(t_1' - t_0')/2$ et $\chi' = \chi = \omega(t_1 - t_0)/2$. Seul le paramètre δ est changé en

$$\delta' = \omega(t_1' + t_0')/2 = \omega(3t_1 + 2T - t_0)/2.$$

2.4. L'amplitude de probabilité pour détecter le neutron dans l'état + après la seconde cavité est obtenue (i) en appliquant la matrice U' sur le vecteur d'état (2), (ii) en calculant le produit scalaire du résultat avec $|n:+\rangle$. On obtient ainsi :

$$\alpha_{+}(t_{1}') = \frac{1}{2} \left[-ie^{-i(\chi + \delta + \omega_{0}T/2)} - ie^{-i(\delta' - \chi - \omega_{0}T/2)} \right] .$$

En utilisant les relations

$$\delta + \chi = \omega t_1$$
 $\delta' - \chi = \frac{\omega}{2} (3t_1 + 2T - t_0 - t_1 + t_0) = \omega (t_1 + T)$,

on arrive à

$$\alpha_{+}(t_{1}') = -\frac{i}{2}e^{-i\omega(t_{1}+T/2)}\left(e^{-i(\omega_{0}-\omega)T/2} + e^{i(\omega_{0}-\omega)T/2}\right) . \tag{3}$$

Par conséquent, la probabilité que le spin du neutron ait basculé en sortie du système vaut :

$$P_{+} = |\alpha_{+}(t'_{1})|^{2} = \cos^{2}\frac{(\omega - \omega_{0})T}{2}$$
.

Dans nos approximations, la probabilité pour que le spin bascule dans une seule cavité est 1/2, indépendamment de ω . En revanche, le résultat à 2 cavités montre qu'il y a une très forte modulation de la probabilité de basculement entre 1 (pour $\omega = \omega_0$) et 0 (pour $(\omega - \omega_0)T = \pi$). Cette modulation provient d'une interférence entre les deux chemins quantiques qui correspondent respectivement à :

- un basculement dans la première cavité, pas de basculement dans la seconde,
 un basculement dans la seconde cavité, pas de basculement dans la première.
 Chacun de ces chemins a une probabilité 1/2 et la somme des amplitudes (3) est pleinement modulée.
- 2.5. Cas d'un faisceau non monocinétique
- (a) On trouve

$$\left\langle \cos^2 \frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(\omega - \omega_0)^2 \tau^2/2} \cos\left[(\omega - \omega_0)T_0\right] .$$

Cette forme rend bien compte de la variation du signal expérimental avec ω . Le maximum central, situé en $\omega/2\pi=748,8$ kHz correspond à $\omega=\omega_0$. Pour cette valeur, l'interférence constructive trouvée à la question précédente demeure quelle que soit la vitesse du neutron. En revanche les maxima et les minima latéraux, qui se produisent à une fréquence dépendant de la vitesse du neutron sont moins prononcés. Les deux premiers maxima latéraux correspondent à $(\omega-\omega_0)T_0\simeq\pm2\pi$. Leur amplitude est réduite par rapport au maximum principal par le facteur $\exp(-2\pi^2\tau^2/T_0^2)$.

- (b) La fréquence $\omega_0/2\pi$ est reliée au moment magnétique du neutron : $\hbar\omega_0=2\mu_nB_0$ ce qui conduit à : $\mu_n=9.65\times 10^{-27}$ J/T. Le temps T_0 se déduit de l'écart entre le maximum principal et un maximum latéral. En prenant le premier maximum latéral à 0,77 kHz de la résonance, on en déduit $T_0=1.3$ ms. Ceci correspond à une vitesse moyenne $v_0=1230$ m/s.
- Le rapport d'intensité entre le deuxième maximum latéral et le maximum principal est d'environ 0,55 , ce qui correspond à $\exp(-8\pi^2\tau^2/T_0^2)$. On en déduit $\tau/T_0=0,087$, soit $\delta v=110$ m/s.
- (c) L'expérience décrite ici peut être rapprochée d'une expérience d'interférences de type fentes d'Young en lumière polychromatique. La frange centrale (correspondant au pic à $\omega = \omega_0$) reste une frange brillante, mais le contraste des interférences chute quand on s'en éloigne, car les maxima pour certaines fréquences sont superposés aux minima pour d'autres fréquences.
- **2.6.** La probabilité $P_{+,+}$ est le produit des deux probabilités : celle de trouver le neutron dans l'état $|n:+\rangle$ à la sortie de la première cavité (p=1/2) puis, sachant qu'il est alors dans l'état $|n:+\rangle$, celle de le trouver dans l'état à la sortie de la seconde (p=1/2). Soit $P_{+,+}=1/4$. De même $P_{-,+}=1/4$. La somme $P_{+,+}+P_{-,+}=1/2$ ne présente pas de signe d'interférences car on a mesuré dans quelle cavité le spin a basculé. C'est analogue à une expérience de trous d'Young où l'on mesure par quel trou la particule est passée.

3. Détection de l'état de spin d'un neutron.

3.1. Par définition,

$$|a:\pm x\rangle = (|a:+\rangle \pm |a:-\rangle)/\sqrt{2}$$
 $|a:\pm y\rangle = (|a:+\rangle \pm i|a:-\rangle)/\sqrt{2}$.

Ces états sont reliés par

$$|a:\pm y\rangle = \frac{1}{2} [(1\pm i)|a:+x\rangle + (1\mp i)|a:-x\rangle]$$
.

3.2. Les opérateurs \hat{S}_{nz} et \hat{S}_{ax} agissent dans deux espaces différents et commutent; donc $[\hat{S}_{nz}, \hat{V}] = 0$. Les vecteurs propres communs et les valeurs propres correspondantes sont :

$$|n:+\rangle \otimes |a:\pm x\rangle$$
 $S_{nz}=+\hbar/2$ $V=\pm A\hbar/2$,
 $|n:-\rangle \otimes |a:\pm x\rangle$ $S_{nz}=-\hbar/2$ $V=\mp A\hbar/2$.

 \hat{S}_{nz} et \hat{V} forment un ECOC (ensemble complet d'observables qui commutent) pour ce qui concerne les variables de spin.

3.3. En développant sur ces états propres de l'énergie, on obtient, si $|\psi(0)\rangle = |n:+\rangle \otimes |a:+y\rangle$,

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{2}|n:+\rangle \otimes \left((1+i)e^{-iA\tau/2}|a:+x\rangle + (1-i)e^{iA\tau/2}|a:-x\rangle\right) .$$

Soit, pour $A\tau/2 = \pi/4$:

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|n:+\rangle \otimes (|a:+x\rangle + |a:-x\rangle) = |n:+\rangle \otimes |a:+\rangle.$$

De même, si $|\psi(0)\rangle = |n:-\rangle \otimes |a:+y\rangle$:

$$|\psi(\tau)\rangle = i|n:-\rangle \otimes |a:-\rangle$$
.

Physiquement, cela signifie que l'état du neutron ne change pas car il est état propre de \hat{V} . Le spin de l'atome précesse autour de Ox; à l'instant $\tau=\pi/2A$, il est dirigé suivant Oz.

3.4. Si l'état initial est $|\psi(0)\rangle = (\alpha_+|n:+\rangle + \alpha_-|n:-\rangle) \otimes |a:+y\rangle$, l'état après interaction est :

$$|\psi(\tau)\rangle = \alpha_{+}|n:+\rangle \otimes |a:+\rangle + i\alpha_{-}|n:-\rangle \otimes |a:-\rangle$$
.

La mesure du spin de l'atome suivant z peut donner $+\hbar/2$ avec probabilité $|\alpha_+|^2$, et l'état après mesure est alors $|n:+\rangle\otimes|a:+\rangle$. Elle peut également donner $-\hbar/2$ avec probabilité $|\alpha_-|^2$, et l'état après mesure est $|n:-\rangle\otimes|a:-\rangle$. Après cette mesure, dans les deux éventualités, l'état de spin du neutron est bien déterminé : il est le même que celui de l'atome. Il n'est pas nécessaire de faire interagir le neutron avec un autre appareil de mesure pour connaître avec certitude la valeur de S_{nz} .

4. Une gomme quantique.

4.1. Les états successifs sont

(a):
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-ie^{-i\delta} | n: + \rangle \otimes | a: +y \rangle + e^{i\chi} | n: - \rangle \otimes | a: +y \rangle \right) ;$$
(b):
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-ie^{-i\delta} | n: + \rangle \otimes | a: + \rangle + ie^{i\chi} | n: - \rangle \otimes | a: - \rangle \right) ;$$
(c):
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-ie^{-i(\delta + \omega_0 T/2)} | n: + \rangle \otimes | a: + \rangle + ie^{i(\chi + \omega_0 T/2)} | n: - \rangle \otimes | a: - \rangle \right) .$$

Finalement, quand le neutron quitte la seconde cavité (étape d), l'état du système est :

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{2} \left[-ie^{-i(\delta + \omega_0 T/2)} \left(e^{-i\chi} | n : + \rangle - ie^{i\delta'} | n : - \rangle \right) \otimes |a : + \rangle \right.$$
$$\left. + ie^{i(\chi + \omega_0 T/2)} \left(-ie^{-i\delta'} | n : + \rangle + e^{i\chi} | n : - \rangle \right) \otimes |a : - \rangle \right].$$

- **4.2.** La probabilité de trouver le neutron dans l'état $|+\rangle$ est la somme des probabilités de trouver :
- le neutron dans l'état + et l'atome dans l'état +, c'est-à-dire le carré du module du coefficient de $|n:+\rangle\otimes|a:+\rangle$ (1/4 dans ce cas);
- le neutron dans l'état + et l'atome dans l'état (soit encore 1/4).

On obtient donc $P_+ = 1/4 + 1/4 = 1/2$: il n'y a pas d'interférences, car on a mesuré par quel chemin quantique le spin est passé.

4.3. On peut développer les vecteurs $|a:\pm\rangle$ sur la base $|a:\pm y\rangle$:

$$|\psi\rangle = -\frac{i e^{-i(\delta + \omega_0 T/2)}}{2\sqrt{2}} \left(e^{-i\chi} |n:+\rangle - i e^{i\delta'} |n:-\rangle \right)$$

$$\otimes (|a:+y\rangle + |a:-y\rangle)$$

$$+ \frac{e^{i(\chi + \omega_0 T/2)}}{2\sqrt{2}} \left(-i e^{-i\delta'} |n:+\rangle + e^{i\chi} |n:-\rangle \right)$$

$$\otimes (|a:+y\rangle - |a:-y\rangle) .$$

L'amplitude de probabilité pour que Nicolas trouve $+\hbar/2$ selon Oz et qu'Alice trouve $+\hbar/2$ le long de Oy est le coefficient de $|n:+\rangle\otimes|a:+y\rangle$ dans le développement ci-dessus. On obtient donc :

$$P\left(S_{nz} = \frac{\hbar}{2}, S_{ay} = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{8} \left| -ie^{-i(\delta + \chi + \omega_0 T/2)} - ie^{i(\chi - \delta' + \omega_0 T/2)} \right|^2$$
$$= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{(\omega - \omega_0)T}{2} ,$$

qui présente clairement une modulation reflétant un phénomène d'interférences. De même, on trouve sans difficulté que

$$P\left(S_{nz} = \frac{\hbar}{2}, S_{ay} = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} ,$$

qui est aussi modulée.

- **4.4.** La somme des probabilités calculées ci-dessus est égale à 1/2, comme à la question 4.2. Si Nicolas ne connaît pas le résultat d'Alice, ou si celle-ci ne fait pas de mesure, ce qui est équivalent du point de vue de Nicolas, il ne voit pas d'interférences.
- **4.5.** (a) Cette première proposition est fausse. À partir du moment où l'atome A est présent, Nicolas ne voit plus d'oscillations en fonction de $\omega-\omega_0$ dans la probabilité de détecter le neutron dans l'état $|n:+\rangle$. Cette probabilité est égale à 1/2 quelle que soit l'opération faite par Alice. Remarquons que la phrase de l'énoncé, si elle était correcte, autoriserait la transmission instantanée d'information : Nicolas en voyant apparaître des interférences saurait immédiatement qu'Alice vient de faire une mesure, même si elle est très éloignée de lui.
- (b) Cette seconde proposition est correcte. Si Alice et Nicolas confrontent leurs résultats et sélectionnent le sous-ensemble d'événements pour lequel Alice a trouvé $+\hbar/2$, alors ils constatent que la proportion de résultats $+\hbar/2$ de Nicolas varie comme $\cos^2(\omega-\omega_0)T/2$; on retrouve donc des interférences pour ce sous-ensemble. Pour le sous-ensemble complémentaire, pour lequel Alice a trouvé $-\hbar/2$, la proportion de résultats $+\hbar/2$ pour Nicolas varie comme $\sin^2(\omega-\omega_0)T/2$. Ce tri des événements par des mesures corrélant les résultats de deux ou plusieurs détecteurs est une procédure standard de la physique contemporaine, en physique des particules par exemple.
- (c) Cette formulation, plus pittoresque mais moins précise que la précédente, est néanmoins acceptable. Le signal en $\cos^2(\omega-\omega_0)T/2$ trouvé dans la partie 2 peut s'interpréter comme résultant de l'interférence de deux « chemins quantiques » pour le neutron qui est initialement dans l'état $|n:-\rangle$: ou bien son spin bascule de $|n:-\rangle$ vers $|n:+\rangle$ dans la première cavité et reste dans $|n:+\rangle$ dans la seconde, ou bien il reste dans l'état $|n:-\rangle$ dans la première, puis bascule de $|n:-\rangle$ vers $|n:+\rangle$ dans la seconde. Comme dans l'expérience des trous d'Young, s'il existe (même a posteriori) une possibilité de déterminer lequel des deux chemins est suivi par le système, les interférences ne peuvent pas se produire. L'effaçage de cette information, qui s'était inscrite sur l'atome, est donc une condition nécessaire pour observer « des » interférences. Remarquons que la phrase de l'énoncé reste vague quant à la nature de ces interférences. Il s'agit, comme cela est expliqué dans la phrase (5.b), d'interférences sur le signal de corrélation entre Alice et Nicolas. Notons également que l'ordre dans lequel Alice et Nicolas font leurs mesures respectives importe peu, contrairement à ce que suggère cette proposition (c).
- **4.6.** Si Alice mesure selon l'axe $\mathbf{w} = \sin \eta \, \mathbf{u}_y + \cos \eta \, \mathbf{u}_z$, l'état propre de \hat{S}_{aw} associé à $+\hbar/2$ est $\cos(\eta/2) |a:+\rangle + i \sin(\eta/2) |a:-\rangle$. Par un calcul analogue à celui de la question 4.3, on trouve une probabilité $\begin{bmatrix} 1 + \sin \eta \cos \left((\omega \omega_0)T\right]/2 \end{bmatrix}$. Si $\eta = 0$ ou π (mesure suivant +z), il n'y a pas d'interférences. Pour $\eta = \pi/2$ et $3\pi/2$ ou, de façon générale, si Alice fait sa mesure dans le plan xOy, le

contraste des interférences, $|\sin \eta|$ est maximum.

Commentaires

Franges de Ramsey avec des neutrons. La courbe expérimentale de l'énoncé est extraite de l'article de J.H. Smith et al, Phys. Rev. 108, 120 (1957). Depuis cette date, la technique des franges de Ramsey pour les neutrons s'est considérablement améliorée. On procède désormais d'une manière différente de celle envisagée dans le problème. On stocke les neutrons dans une « bouteille » pendant une durée de l'ordre de 100 secondes et on applique sur l'ensemble de la bouteille deux impulsions radio-fréquences, l'une au début du stockage et l'autre à la fin. La séparation temporelle entre les deux impulsions passe des 1,3 millisecondes trouvées ici à 70 secondes, ce qui se traduit par une augmentation spectaculaire de la précision avec laquelle on détermine la fréquence de résonance. Ces expériences permettent de mettre une borne supérieure très faible à un éventuel moment dipolaire électrique du neutron (K.F. Smith et al, Phys. Lett. 234, 191 (1990)).

Mesures quantiques non destructives. Le modèle considéré ici constitue une mesure quantique non destructive de la composante selon Oz du spin du neutron. La structure du potentiel considéré dans le problème est destinée à mettre en relief de façon simple l'effet de gomme quantique de la partie 4. On trouvera des exemples concrets de mesures quantiques non destructives dans J.P. Poizat et Ph. Grangier, Phys. Rev. Lett. 70, 271 (1993), et S.M. Barnett, Nature, 362, 113 (1993).

11. Mesure quantique idéale

En 1940, John von Neumann proposait une définition de la mesure optimale, ou encore « idéale », d'une grandeur quantique. Ce problème étudie la réalisation pratique d'une telle procédure. Le but est de mesurer le nombre d'excitation d'un oscillateur harmonique \mathcal{S} , en le couplant à un autre oscillateur \mathcal{D} dont on détermine la phase.

On rappelle que, pour s et k entiers :

$$\sum_{n=0}^{s} e^{2i\pi kn/(s+1)} = s+1 \text{ si } k = p(s+1), p \text{ entier quelconque};$$

$$= 0 \text{ autrement.}$$

1 Préliminaire : un détecteur de von Neumann

On souhaite faire la mesure d'une grandeur physique A sur un système quantique \mathcal{S} . On dispose d'un détecteur \mathcal{D} adapté à la mesure de cette grandeur. La mesure comprend deux étapes. La première est l'interaction de \mathcal{S} et \mathcal{D} . La seconde, après que \mathcal{S} et \mathcal{D} se soient éloignés l'un de l'autre et n'interagissent plus, est la lecture de \mathcal{D} . On suppose que \mathcal{D} possède une ensemble d'états $\{|D_i\rangle\}$ orthonormés : $\langle D_i|D_j\rangle = \delta_{i,j}$. Ces états correspondent par exemple aux diverses valeurs d'un affichage digital.

Soit $|\psi\rangle$ l'état du système \mathcal{S} considéré et $|D_0\rangle$ l'état du détecteur \mathcal{D} . Avant la mesure, l'état du système global $\mathcal{S} + \mathcal{D}$ est

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |D_0\rangle$$
.

Soient a_i et $|\phi_i\rangle$ les valeurs propres et états propres correspondants de l'observable \hat{A} (on supposera ces valeurs propres non dégénérées pour simplifier). L'état $|\psi\rangle$ du système \mathcal{S} admet le développement

$$|\psi\rangle = \sum_{i} \alpha_{i} |\phi_{i}\rangle \ . \tag{1}$$

- **1.1.** D'après les axiomes de la mécanique quantique, quelle est la probabilité $p(a_j)$ de trouver la valeur a_j dans la mesure de A sur cet état?
- $\bf 1.2.$ Après l'interaction du système $\mathcal S$ avec le détecteur, l'état du système global s'écrit de manière générale :

$$|\Psi_1\rangle = \sum_{i,j} \gamma_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |D_j\rangle .$$
 (2)

On observe alors l'état du détecteur. Quelle est la probabilité de trouver le détecteur dans l'état $|D_i\rangle$?

- **1.3.** Après cette mesure, quel est l'état du système global S + D?
- **1.4.** Un détecteur est dit idéal si le choix de $|D_0\rangle$ et le couplage \mathcal{S} - \mathcal{D} conduisent à des coefficients γ_{ij} vérifiant pour tout état $|\psi\rangle$ de $\mathcal{S}: |\gamma_{ij}| = \delta_{i,j} |\alpha_j|$. Justifier cette dénomination.

2 Etats de phase de l'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique de pulsation ω . On note \hat{N} l'opérateur « nombre », c'est-à-dire que l'hamiltonien s'écrit $\hat{H}=(\hat{N}+1/2)\hbar\omega$. Ses états propres sont notés $|N\rangle$ et les valeurs propres associées sont $E_N=(N+1/2)\hbar\omega$, N entier positif ou nul.

Soit s un entier positif; on appelle « états de phase » la famille d'états définie, à chaque instant t, par :

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{N=0}^{s} e^{-iN(\omega t + \theta_m)} |N\rangle ,$$

où θ_m peut prendre l'une quelconque des 2s+1 valeurs

$$\theta_m = \frac{2\pi m}{s+1} \qquad m = 0, 1, \dots, s \ .$$

- **2.1.** Montrer que les $|\theta_m\rangle$ forment une famille orthornormée d'états.
- **2.2.** On considère le sous-espace d'états de l'oscillateur tels que le nombre N de quanta est borné supérieurement par la valeur s. Les familles $\{|N\rangle, N=0,1,\ldots,s\}$ et $\{|\theta_m\rangle, m=0,1,\ldots,s\}$ sont des bases de ce sous-espace. Exprimer les vecteurs $|N\rangle$ dans la base des états de phase.
- **2.3.** Quelle est la probabilité $p(N, \theta_m)$ de trouver N quanta quand l'oscillateur est préparé dans l'état $|\theta_m\rangle$?
- **2.4.** Calculer la valeur moyenne de la position \hat{x} dans un état de phase $|\theta_m\rangle$, et justifier la nomenclature « états de phase ». On rappelle que l'on a

$$\hat{x}|N\rangle = x_0 \left(\sqrt{N+1}|N+1\rangle + \sqrt{N}|N-1\rangle\right) ,$$

où x_0 est la longueur caractéristique du problème. On posera $C_s = \sum_{N=0}^s \sqrt{N}$ et on exprimera le résultat en fonction de x_0 , s, θ_m , ωt et C_s .

3 Interaction système-détecteur

On cherche à mesurer le nombre de quanta d'excitation d'un oscillateur harmonique de façon « idéale ». On couple cet oscillateur $\mathcal S$ à un autre oscillateur harmonique $\mathcal D$ de même pulsation ω , qui constitue le détecteur.

On note $\{|n\rangle, n=0,1,\ldots,s\}$ les états propres de $\hat{H}_S=(\hat{n}+1/2)\hbar\omega$ et $\{|N\rangle, N=0,1,\ldots,s\}$ les états propres de $\hat{H}_D=(\hat{N}+1/2)\hbar\omega$, où \hat{n} et \hat{N} sont les opérateurs « nombre » de chacun des oscillateurs.

On suppose que les nombres de quanta n et N sont tous deux bornés supérieurement par s. Le couplage entre S et D est : $\hat{V} = \hbar g \, \hat{n} \otimes \hat{N}$.

- **3.1.** Quels sont les états propres et les valeurs propres de l'hamiltonien total $\hat{H}=\hat{H}_S+\hat{H}_D+\hat{V}$?
- $\bf 3.2.$ On suppose dans la suite que le système global des deux oscillateurs est initialement dans un état $factoris\acute{e}$:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_S\rangle \otimes |\psi_D\rangle$$
 avec $|\psi_S\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$ et $|\psi_D\rangle = \sum_N b_N |N\rangle$,

où nous supposons $|\psi_S\rangle$ et $|\psi_D\rangle$ normés. On effectue une mesure de \hat{n} dans l'état $|\Psi(0)\rangle$. Quels résultats peut-on trouver, avec quelles probabilités? Répondre à la même question pour une mesure de \hat{N} .

- **3.3.** À l'instant t=0, on établit le couplage entre les deux oscillateurs, puis on l'interrompt à un instant t. Quel est alors l'état $|\Psi(t)\rangle$ du système? A priori, cet état est-il lui aussi factorisable?
- **3.4.** La loi de probabilité du couple de variables aléatoires $\{n, N\}$ est-elle modifiée par l'interaction? Pourquoi?

4 La mesure « idéale »

L'oscillateur S est initialement (à t=0) dans un état quelconque :

$$|\psi_S\rangle = \sum_{n=0}^s a_n |n\rangle$$
.

L'oscillateur $\mathcal D$ est préparé dans l'état :

$$|\psi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{N=0}^{s} |N\rangle$$
.

- **4.1.** On branche l'interaction \hat{V} pendant l'intervalle de temps [0, t]. Exprimer l'état $|\Psi(t)\rangle$ en fonction des états de phase $\{|\theta_k\rangle\}$ de l'oscillateur détecteur \mathcal{D} .
- **4.2.** On suppose dans ce qui suit que le temps d'interaction est $t=t_0\equiv 2\pi/\left[g(s+1)\right]$. Ecrire l'état du système $|\Psi(t_0)\rangle$.
- **4.3.** Quelle est la probabilité p_n de trouver le résultat θ_n en mesurant la phase de l'oscillateur détecteur \mathcal{D} ?
- **4.4.** Après cette mesure, quel est l'état de l'oscillateur S? Décrire qualitativement ce qui se passerait si l'on choisissait un temps $t \neq t_0$.

4.5. Commenter le résultat. Pourquoi peut-on considérer cette procédure comme une mesure quantique « idéale » ?

5 Corrigé

1. Préliminaires

- **1.1.** L'état du système étant $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle$, la probabilité de trouver la valeur a_j dans une mesure de A est $p(a_j) = |\alpha_j|^2$.
- 1.2. L'état du système global est

$$|\Psi_1\rangle = \sum_{i,j} \gamma_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |D_j\rangle$$
.

La probabilité p_j de trouver le détecteur dans l'état $|D_j\rangle$ est la somme des probabilités $|\gamma_{ij}|^2$:

$$p_j = \sum_i |\gamma_{ij}|^2 ,$$

puisque les états $|\phi_i\rangle$ sont orthogonaux.

1.3. Après cette mesure, l'état du système global $\mathcal{S}+\mathcal{D}$ est, par principe de réduction du paquet d'ondes,

$$|\Psi
angle = rac{1}{\sqrt{p_j}} \left[\sum_i \gamma_{ij} |\phi_i
angle
ight] \otimes |D_j
angle \; .$$

1.4. Pour un détecteur idéal, la probabilité que le détecteur soit dans l'état $|D_j\rangle$ est $p_j=|\alpha_j|^2=p(a_j)$ et l'état de l'ensemble système+ détecteur une fois qu'on a pris connaissance de l'état du détecteur est $|\phi_j\rangle\otimes|D_j\rangle$. Ceci correspond au résultat attendu compte-tenu du postulat de réduction du paquet d'ondes.

2. Etats de phase de l'oscillateur harmonique

2.1. D'après la définition des états de phase, on a :

$$\langle \theta_m | \theta_n \rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^{s} \sum_{N'=0}^{s} e^{iN(\omega t + \theta_m)} e^{-iN'(\omega t + \theta_n)} \langle N | N' \rangle$$

$$= \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^{s} e^{iN(\theta_m - \theta_n)}$$

$$= \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^{s} e^{2i\pi N(m-n)/(s+1)} = \delta_{m,n} ,$$

où la dernière égalité est valable car $-s \le m - n \le s$.

2.2. Le produit scalaire d'un état $|N\rangle$ avec un état de phase est

$$\langle \theta_m | N \rangle = (\langle N | \theta_m \rangle)^* = \frac{1}{\sqrt{s+1}} e^{iN(\omega t + \theta_m)}$$
,

d'où le développement :

$$|N\rangle = \sum_{m=0}^{s} \langle \theta_m | N \rangle |\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{iN(\omega t + \theta_m)} |\theta_m\rangle .$$

2.3. D'après la définition d'un état de phase, la probabilité de trouver N quanta dans un état $|\theta_m\rangle$ est

$$p(N, \theta_m) = |\langle N | \theta_m \rangle|^2 = \frac{1}{s+1}$$
.

2.4. On obtient

$$\langle \theta_m | \hat{x} | \theta_m \rangle = 2x_0 \frac{C_s}{s+1} \cos(\omega t + \theta_m) .$$

Les phases des valeurs moyennes de x dans deux états de phase $|\theta_m\rangle$ et $|\theta_n\rangle$ diffèrent par un multiple entier $2(m-n)\pi/(s+1)$ de la phase élémentaire $2\pi/(s+1)$.

3. Interaction système-détecteur

3.1. Les états factorisés $|n\rangle\otimes|N\rangle$ sont états propres de l'hamiltonien total

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_D + \hat{V} = (\hat{n} + \hat{N} + 1)\hbar\omega + \hbar g\,\hat{n} \otimes \hat{N} ,$$

avec valeurs propres $E_{n,N} = (n + N + 1)\hbar\omega + \hbar g \, nN$.

3.2. Les résultats de mesure et les probabilités correspondantes sont $n=0,1,\ldots,s,$ $p(n)=|a_n|^2$ et $N=0,1,\ldots,s,$ $p(N)=|b_N|^2$.

3.3. L'état du système à l'instant t est

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n} \sum_{N} a_n \ b_N \ e^{-i[(n+N+1)\omega + gnN]t} \ |n\rangle \ \otimes |N\rangle \ .$$

Il n'est en général pas factorisable.

3.4. La loi de probabilité du couple de variables aléatoires $\{n,N\}$ reste $p(n,N)=|a_n|^2|b_N|^2$. Elle n'est pas modifiée par l'interaction car \hat{V} commute avec \hat{n} et \hat{N} . Les grandeurs n et N sont des constantes du mouvement.

4. La mesure « idéale »

3.1. On a $b_N = 1/\sqrt{s+1}$, d'où

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n} \sum_{N} a_n e^{-i[(n+N+1)\omega + gnN)]t} |n\rangle \otimes |N\rangle.$$

En reportant le développement des états $|N\rangle$ en fonction des états de phase, on obtient

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n} \sum_{m} \left(\sum_{N} \frac{e^{i(\theta_{m} - gnt)N}}{s+1} \right) e^{-i(n+1)\omega t} a_{n} |n\rangle \otimes |\theta_{m}\rangle.$$

3.2. Si le temps d'interaction est $t_0 = 2\pi / [g(s+1)]$, cette expression se réduit à

$$|\Psi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{s} e^{-i(n+1)\omega t_0} a_n |n\rangle \otimes |\theta_n\rangle .$$
 (3)

- **3.3.** La probabilité de trouver le résultat θ_n en mesurant la phase de l'oscillateur de détection \mathcal{D} sur cet état est $p(\theta_n) = |a_n|^2$.
- **3.4.** Après cette mesure, l'état de l'oscillateur \mathcal{S} est tout simplement $|n\rangle$ (à une phase arbitraire près). Dans l'état (3), les deux systèmes sont parfaitement corrélés : à un état de phase de \mathcal{D} correspond un seul état de nombre de quanta de \mathcal{S} . Si l'on choisissait un temps différent de t_0 , cette corrélation ne serait plus parfaite. Après une mesure de la phase de \mathcal{D} , l'état de \mathcal{S} serait une superposition des états de nombres de quanta différents.
- 5) On voit que cette procédure, qui suppose un temps d'interaction bien particulier entre le système et le détecteur, permet de connaître la probabilité $p(n) = |a_n|^2$ que S soit dans un état à n quanta. En outre, après avoir lu le résultat θ_n sur le détecteur, on est certain que S est dans l'état $|n\rangle$, sans avoir à interagir à nouveau avec lui (réduction du paquet d'ondes). En ce sens, cette procédure réalise effectivement les axiomes de la mécanique quantique sur la mesure ; elle constitue donc une mesure « idéale » d'une grandeur quantique.

Remarques complémentaires :

On se convaincra qu'il est possible d'étendre formellement le résultat à des systèmes autres que des oscillateurs harmoniques. En pratique, le cas étudié dans ce problème est une simplification d'un cas concret où les oscillateurs $\mathcal S$ et $\mathcal D$ sont des modes du champ électromagnétique. L'hamiltonien, réalisé dans un cristal présentant une non linéarité optique, résulte du phénomène appelé effet Kerr croisé. Dans un interféromètre, où $\mathcal D$ est constitué par un faisceau laser séparé en deux par des lames semi-transparentes, on fait interagir l'oscillateur signal $\mathcal S$ avec l'un de ces faisceaux. La mesure de phase consiste en une mesure interférométrique lors de la recombinaison des deux faisceaux de $\mathcal D$.

Ce type d'expérience, abondamment étudié ces dernières années, s'appelle aussi une mesure quantique « non-destructive » (ou encore mesure QND). On pourra se référer à l'article de J-P Poizat et Ph. Grangier, Phys. Rev. Lett. **70**, 271 (1993).

12. Un thermomètre quantique

On étudie dans ce problème la mesure du mouvement cyclotron d'un électron. La particule est confinée dans un piège de Penning et couplée au rayonnement thermique, ce qui provoque des sauts quantiques entre les différents niveaux d'énergie. Dans tout le problème, on néglige les effets associés au spin de l'électron.

Le piège de Penning consiste en la superposition d'un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$ (B>0) et d'un champ électrostatique qui dérive du potentiel $\Phi(\boldsymbol{r})$ dont le développement au voisinage de l'origine s'écrit :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{M\omega_z^2}{4q} \left(2z^2 - x^2 - y^2 \right) . \tag{1}$$

Les quantités M et q (q<0) représentent respectivement la masse et la charge de l'électron. La quantité positive ω_z a la dimension d'une pulsation. Dans tout ce problème, on posera $\omega_c=|q|B/M$ (ω_c est appelée pulsation cyclotron) et on supposera que $\omega_z\ll\omega_c$.

1 Le piège de Penning en mécanique classique

On rappelle que la force agissant sur une particule chargée en mouvement dans un champ électromagnétique s'écrit $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

- **1.1.** Vérifier que $\Phi(\mathbf{r})$ obéit bien à l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$. Quelle est la forme d'une surface équipotentielle $\Phi(\mathbf{r})$ =Cte?
- **1.2.** Montrer que l'équation du mouvement classique de l'électron dans le piège s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_c \dot{y} - \frac{\omega_z^2}{2} x = 0 \qquad \qquad \ddot{y} - \omega_c \dot{x} - \frac{\omega_z^2}{2} y = 0 \qquad \qquad \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 .$$

- 1.3. Quel est le mouvement selon l'axe z?
- 1.4. Pour étudier la composante du mouvement dans le plan xy, on pose $\alpha = x + iy$.
- (a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$?
- (b) On cherche une solution de cette équation sous la forme $\alpha(t)=\alpha_0~e^{i\omega t}$. Montrer que ω est solution de l'équation :

$$\omega^2 - \omega_c \omega + \frac{\omega_z^2}{2} = 0 .$$

(c) On note ω_d et ω_g les deux racines de cette équation avec $\omega_d>\omega_g.$ Montrer que :

$$\omega_d \simeq \omega_c \qquad \qquad \omega_g \simeq \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} \ .$$

- **1.5.** On prend $B = 5.3 \text{ T et } \omega_z/(2\pi) = 64 \text{ MHz}.$
- (a) Montrer que le mouvement le plus général de l'électron dans le piège de Penning est la superposition de trois mouvements harmoniques.
- (b) Calculer la fréquence de chacun de ces mouvements.
- (c) Tracer l'allure de la projection sur le plan xy de la trajectoire classique de l'électron piégé, en supposant $\alpha_d \ll \alpha_g$ (les quantités positives α_d et α_g représentent les amplitudes des mouvements de pulsation ω_d et ω_g).

2 Le piège de Penning en mécanique quantique

On note \hat{r} et \hat{p} les opérateurs position et impulsion pour l'électron. L'hamiltonien décrivant le mouvement quantique de cet électron dans le piège de Penning s'écrit en négligeant les effets liés au spin :

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left(\hat{\boldsymbol{p}} - q \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}) \right)^2 + q \Phi(\hat{\boldsymbol{r}}) ,$$

où le potentiel électrostatique $\Phi(\mathbf{r})$ est donné en (1). Pour le potentiel vecteur magnétique, on choisit la forme : $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$.

- **2.1.** Développer l'hamiltonien et montrer qu'il peut s'écrire $\hat{H} = \hat{H}_{xy} + \hat{H}_z$, où \hat{H}_{xy} ne fait intervenir que les opérateurs \hat{x} , \hat{y} , \hat{p}_x et \hat{p}_y , et \hat{H}_z ne fait intervenir que les opérateurs \hat{z} et \hat{p}_z . Peut-on trouver une base propre commune à \hat{H}_{xy} et \hat{H}_z ?
- **2.2.** On s'intéresse dans cette question au mouvement selon z, appelé mouvement axial. Rappeler sans démonstration :
- (a) l'expression des opérateurs \hat{a}_z et \hat{a}_z^{\dagger} permettant d'écrire \hat{H}_z sous la forme $\hat{H}_z = \hbar \omega_z \; (\hat{N}_z + 1/2)$ avec $\hat{N}_z = \hat{a}_z^{\dagger} \hat{a}_z$ et $[\hat{a}_z, \hat{a}_z^{\dagger}] = 1$;
- (b) les valeurs propres de \hat{N}_z et \hat{H}_z .
- **2.3.** On étudie maintenant le mouvement dans le plan xy sous l'effet de l'hamiltonien \hat{H}_{xy} . On pose $\Omega = \sqrt{\omega_c^2 2\omega_z^2}/2$. On introduit les deux opérateurs d'annihilation gauche et droit \hat{a}_d et \hat{a}_g :

$$\hat{a}_{d} = \sqrt{\frac{M\Omega}{4\hbar}} (\hat{x} - i\hat{y}) + \frac{i}{\sqrt{4\hbar M\Omega}} (\hat{p}_{x} - i\hat{p}_{y})$$

$$\hat{a}_{g} = \sqrt{\frac{M\Omega}{4\hbar}} (\hat{x} + i\hat{y}) + \frac{i}{\sqrt{4\hbar M\Omega}} (\hat{p}_{x} + i\hat{p}_{y}) .$$

(a) Montrer que $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^{\dagger}] = [\hat{a}_g, \hat{a}_g^{\dagger}] = 1$.

(b) Montrer que tout opérateur gauche commute avec tout opérateur droit, c'est-à-dire :

$$[\hat{a}_d, \hat{a}_g] = 0 \qquad [\hat{a}_d, \hat{a}_g^{\dagger}] = 0 \qquad [\hat{a}_d^{\dagger}, \hat{a}_g] = 0 \qquad [\hat{a}_d^{\dagger}, \hat{a}_g^{\dagger}] = 0 \ .$$

- (c) Rappeler sans démonstration les valeurs propres de $\hat{N}_d = \hat{a}_d^{\dagger} \hat{a}_d$ et $\hat{N}_g = \hat{a}_g^{\dagger} \hat{a}_g$. Existe-t-il une base propre commune à \hat{N}_d et \hat{N}_g ?
- (d) Montrer que l'hamiltonien \hat{H}_{xy} s'écrit :

$$\hat{H}_{xy} = \hbar\omega_d \left(\hat{N}_d + 1/2\right) - \hbar\omega_a \left(\hat{N}_a + 1/2\right) ,$$

où les pulsations ω_d et ω_g ont été introduites dans la partie 1.

- (e) En déduire les valeurs propres de l'hamiltonien H_{xy} .
- **2.4.** On note $|\psi(t)\rangle$ l'état du système à l'instant t et on définit $A_d(t) = \langle \psi(t) | \hat{a}_d | \psi(t) \rangle$ et $A_g(t) = \langle \psi(t) | \hat{a}_g | \psi(t) \rangle$.
- (a) En utilisant le théorème d'Ehrenfest, calculer dA_d/dt et dA_q/dt .
- (b) Intégrer ces équations et en déduire la position moyenne de l'électron $(\langle x \rangle_t, \langle y \rangle_t)$ dans le plan xy. On posera $A_d(0) = \rho_d \ e^{-i\phi_d}$ et $A_g(0) = \rho_q \ e^{i\phi_g}$, où ρ_d et ρ_q sont des nombres réels positifs.
- (c) Montrer que l'évolution temporelle de la position moyenne de l'électron $\langle r \rangle_t$ est semblable à l'évolution classique trouvée dans la question 1.5.
- **2.5.** On note $|\phi_0\rangle$ l'état propre de \hat{H} associé à la valeur propre 0 pour chacun des trois opérateurs \hat{N}_d , \hat{N}_q et \hat{N}_z .
- (a) Déterminer la fonction d'onde $\phi_0(\mathbf{r})$ correspondante (on ne cherchera pas à normaliser le résultat).
- (b) En reprenant les valeurs numériques de la question 1.5, évaluer l'extension spatiale de $\phi_0(\mathbf{r})$.
- **2.6.** L'expérience est faite pour des températures T variant entre 0,1 K et 4 K. Comparer l'énergie thermique caractéristique k_BT à chacun des quanta d'énergie des mouvements cyclotron, axial et magnétron (associés respectivement à \hat{N}_d , \hat{N}_z et \hat{N}_g). Pour le(s)quel(s) de ce(s) mouvement(s) le caractère discret du spectre d'énergie joue-t-il un rôle important?

3 Couplage du mouvement cyclotron et du mouvement axial

On étudie dans cette partie une méthode de détection du mouvement cyclotron. Cette méthode utilise un petit couplage entre ce mouvement et le mouvement axial. Ce couplage est induit par un champ magnétique inhomogène et on le décrit par l'hamiltonien additionnel :

$$\hat{W} = \frac{\epsilon}{2} M \omega_z^2 \, \hat{N}_d \, \hat{z}^2 \; .$$

Les conditions expérimentales sont choisies pour avoir $\epsilon = 4 \times 10^{-7}$.

- **3.1.** Écrire l'hamiltonien $\hat{H}_c = \hat{H} + \hat{W}$ en fonction de \hat{N}_d , \hat{N}_g , \hat{p}_z et \hat{z} .
- **3.2.** Montrer que les nombres d'excitations du mouvement cyclotron (\hat{N}_d) et du mouvement magnétron (\hat{N}_g) sont des constantes du mouvement.
- **3.3.** On considère le sous-espace propre \mathcal{E}_{n_d,n_g} de \hat{N}_d et \hat{N}_g , associé aux valeurs propres n_d et n_g .
- (a) Ecrire la forme de \hat{H}_c à l'intérieur de ce sous-espace.
- (b) Montrer que le mouvement axial est harmonique si le système est préparé dans un état appartenant à \mathcal{E}_{n_d,n_g} . Donner la fréquence de ce mouvement en fonction de n_d et n_g .
- (c) Déterminer les valeurs propres et les états propres de \hat{H}_c à l'intérieur de \mathcal{E}_{n_d,n_q} .
- **3.4.** Déduire que la question précédente que les états propres de \hat{H}_c peuvent être repérés par trois nombres quantiques n_d, n_g, n_z . On notera ces états $|n_d, n_g, n_z\rangle$. Donner les valeurs propres de l'énergie en fonction de n_d, n_g, n_z et de $\omega_d, \omega_g, \omega_z$ et ϵ .
- **3.5.** On mesure le battement entre le courant induit dans le circuit électrique par le mouvement axial, proportionnel à $\langle p_z \rangle_t$, et un oscillateur de haute stabilité, de fréquence $\omega_z/(2\pi)$ fournissant un signal proportionnel à $\sin(\omega_z t)$.
- (a) Déterminer l'évolution des valeurs moyennes des opérateurs position \hat{z} et impulsion \hat{p}_z en supposant que l'état de l'électron est dans le sous-espace E_{n_q,n_q} . On prendra $\langle \hat{z} \rangle_0 = z_0$ et $\langle \hat{p_z} \rangle_0 = 0$.
- (b) Quel est, au premier ordre en ϵ , le déphasage φ entre le courant détecté et l'oscillateur après une durée τ ? Montrer que la mesure de ce déphasage conduit à une mesure du nombre d'excitation du mouvement cyclotron.
- 3.6. On suppose maintenant que l'électron est dans un état quelconque

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_d,n_g,n_z} c_{n_d,n_g,n_z} |n_d,n_g,n_z\rangle \ .$$

- (a) On mesure le déphasage φ sur l'intervalle de temps allant de t=0 à $t=\tau$. Quels sont les résultats de mesure φ_k possibles? Montrer que l'on peut ainsi déterminer le nombre d'excitation associé au mouvement cyclotron.
- (b) Quel est l'état de l'électron après une mesure donnant le résultat φ_k ?
- (c) On choisit $\tau=0.1$ s et on suppose que la mesure de φ se fait avec une précision de $\pi/10$. En reprenant les paramètres physiques précédents, montrer que cette précision permet de déterminer sans ambiguïté le nombre d'excitation associé au mouvement cyclotron.
- (d) Après la mesure donnant le résultat φ_k , on laisse évoluer le système sous l'action de l'hamiltonien \hat{H}_c pendant une durée T, puis on effectue une nouvelle mesure. A quel(s) résultat(s) peut-on s'attendre?

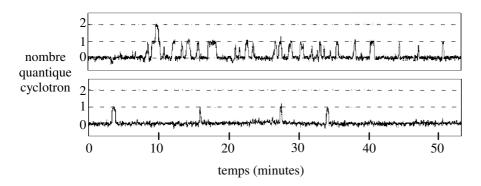


FIG. 1: Evolution temporelle du nombre quantique n_d associé au mouvement cyclotron pour deux températures T_a et T_b .

4 Un thermomètre quantique

En pratique, le mouvement cyclotron est en équilibre thermique avec un thermostat à température T. On rappelle que, dans cette situation, les fluctuations thermiques peuvent exciter le système dans un niveau d'énergie E_n , avec une probabilité p_n .

On procède à des mesures successives du déphasage φ au cours des intervalles $[0,\tau], [\tau,2\tau], \ldots, [(N-1)\tau,N\tau]$. La durée totale $N\tau$ de cette série de mesures pour une température T donnée est de $N\tau=3000$ secondes, soit un nombre total de résultats de mesure $N=3\times 10^4$ pour $\tau=0,1$ s. On peut suivre ainsi la variation de n_d pendant la durée $N\tau$, avec une résolution en temps égale à τ .

- **4.1.** Deux enregistrements de cette mesure sont représentés sur la figure 1 pour deux températures différentes. Commenter ces enregistrements en précisant en particulier :
- le phénomène auquel sont associés les changements brusques du signal;
- la fraction du temps pendant laquelle l'électron se trouve dans les niveaux $n_d = 0$, $n_d = 1$, $n_d = 2$, ... (la précision obtenue en utilisant une règle graduée ordinaire est suffisante).
- **4.2.** La probabilité p_n qu'un système se trouve dans un état d'énergie E_n est donnée par le facteur de Boltzmann $p_n = \mathcal{N} \exp(-E_n/k_BT)$, où \mathcal{N} est un facteur de normalisation. Montrer que pour un oscillateur harmonique à une dimension, le rapport p_{n+1}/p_n est indépendant de n.
- ${\bf 4.3.}\,$ Estimer les températures correspondant aux deux enregistrements de la figure 1.
- **4.4.** La figure 2 représente des mesures plus précises des probabilités d'occupation des différents niveaux cyclotron, effectuées pour plusieurs températures du cryostat contenant le piège de Penning. Déterminer le facteur de normalisa-

tion \mathcal{N} de la loi de probabilité p_n pour un oscillateur harmonique à une dimension de pulsation ω en équilibre thermique avec un thermostat à température T. Calculer le nombre moyen d'excitations \bar{n} . On posera $\gamma = \hbar \omega/(k_B T)$.

- **4.5.** Justifier l'aspect des courbes de la figure 2 et évaluer les températures correspondant à ces mesures.
- **4.6.** Quel est l'ordre de grandeur de la plus basse température que l'on peut mesurer avec ce dispositif? Comment pourrait-on améliorer encore la sensibilité de ce « thermomètre quantique »?



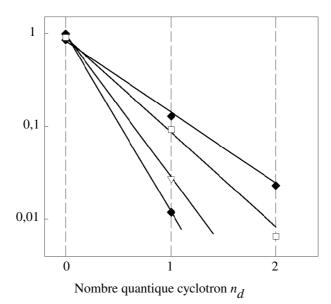


Fig. 2: Probabilités d'occupation des états d'énergie du mouvement cyclotron. Chaque droite correspond à une température donnée (l'échelle verticale est logarithmique).

5 Corrigé

1. Le piège de Penning en mécanique classique

1.1. On trouve que le champ électrique $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ vaut :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{M\omega_z^2}{2q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Par conséquent, on a $\Delta\Phi=-{\bf \nabla}\cdot{\bf E}=-\left(M\omega_z^2/(2q)\right)(1+1-2)=0$. Le potentiel vérifie bien l'équation de Laplace dans le vide. Les surfaces équipotentielles

sont des hyperboloïdes de révolution d'axe z.

 ${\bf 1.2.}\,$ En utilisant l'expression (2) du champ électrique, l'équation du mouvement s'écrit :

$$M \left(\begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right) = \frac{M\omega_z^2}{2} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ -2z \end{array} \right) + q \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ B \end{array} \right) \ ,$$

soit, en posant $\omega_c = -qB/M$:

$$\ddot{x} + \omega_c \dot{y} - \frac{\omega_z^2}{2} x = 0 \qquad \qquad \ddot{y} - \omega_c \dot{x} - \frac{\omega_z^2}{2} y = 0 \qquad \qquad \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 .$$

- 1.3. Selon l'axe z, le mouvement est harmonique, de fréquence $\omega_z/2\pi$.
- 1.4. Mouvement dans le plan xy.
- (a) L'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ s'écrit :

$$\ddot{\alpha} - i\omega_c \dot{\alpha} - \frac{\omega_z^2}{2}\alpha = 0 .$$

(b) En cherchant une solution sous la forme α_0 $e^{i\omega t}$, on trouve que ω est donnée par l'équation du second degré :

$$-\omega^2 + \omega_c \omega - \frac{\omega_z^2}{2} = 0 .$$

(c) Les racines de cette équation du second degré sont :

$$\omega_d = \frac{1}{2} \left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right) , \quad \omega_g = \frac{1}{2} \left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right) .$$

Par hypothèse, on a $\omega_z \ll \omega_c$, soit $\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \simeq \omega_c \left(1 - \omega_z^2/\omega_c^2\right)$. Les deux racines ω_d et ω_g sont donc données de manière approchée par :

$$\omega_d \simeq \omega_c \qquad \qquad \omega_g \simeq \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} \ .$$

- 1.5. Mouvement à trois dimensions.
- (a) On a vu plus haut que le mouvement selon z était harmonique de fréquence $\omega_z/2\pi$. Pour obtenir le mouvement dans le plan xy, on intégre l'équation du mouvement de α :

$$\alpha(t) = \alpha_g \; e^{i(\omega_g t + \phi_g)} + \alpha_d \; e^{i(\omega_d t + \phi_d)} \; , \label{eq:alpha}$$

où α_g et α_d sont deux nombres réels positifs, et ϕ_g et ϕ_d deux phases arbitraires. On déduit x(t) et y(t) en prenant la partie réelle et imaginaire de cette expression :

$$x(t) = \alpha_q \cos(\omega_q t + \phi_q) + \alpha_d \cos(\omega_d t + \phi_d)$$

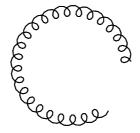
$$y(t) = \alpha_q \sin(\omega_q t + \phi_q) + \alpha_d \sin(\omega_d t + \phi_d) .$$

Le mouvement dans le plan xy résulte donc de la composition de deux mouvements harmoniques de fréquence $\omega_d/2\pi$ et $\omega_g/2\pi$.

(b) On trouve d'abord $\omega_c/2\pi=1,48\times10^{11}$ Hz. Les fréquences de ces trois mouvements valent donc :

$$\omega_g/2\pi \simeq 14 \; \mathrm{kHz} \qquad \omega_z/2\pi = 64 \; \mathrm{MHz} \qquad \omega_d/2\pi \simeq 150 \; \mathrm{GHz} \; .$$

(c) Le mouvement dans le plan xy est la composition de deux mouvements circulaires, l'un de rayon α_d et parcouru à fréquence élevée (ω_d) et l'autre de rayon α_g , et parcouru à fréquence beaucoup plus basse (ω_g) . En supposant $\alpha_d \ll \alpha_g$, on obtient la trajectoire typique représentée sur la figure suivante :



2. Le piège de Penning en mécanique quantique

2.1. Le développement de l'hamiltonien donne $\hat{H} = \hat{H}_{xy} + \hat{H}_z$ avec :

$$\hat{H}_{xy} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{\hat{p}_y^2}{2M} + \frac{M}{8}(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z \qquad \hat{H}_z = \frac{\hat{p}_z^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_z^2\hat{z}^2 \ .$$

On a introduit la composante selon z de l'opérateur moment cinétique : $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$. Puisque \hat{H}_{xy} ne fait intervenir que les opérateurs \hat{x}, \hat{y} et \hat{p}_x, \hat{p}_y , et \hat{H}_z que les opérateurs \hat{z}, \hat{p}_z , ces deux opérateurs \hat{H}_{xy} et \hat{H}_z commutent, et ils commutent chacun avec l'hamiltonien total \hat{H} :

$$[\hat{H}_{xy},\hat{H}_z] = 0 \qquad [\hat{H}_{xy},\hat{H}] = 0 \qquad [\hat{H}_z,\hat{H}] = 0 \ .$$

On peut donc chercher une base de vecteurs propres de \hat{H} sous forme d'une base propre commune à \hat{H}_{xy} et \hat{H}_z .

- 2.2. Mouvement axial.
- (a) L'hamiltonien \hat{H}_z correspond à un mouvement harmonique de pulsation ω_z . On trouve simplement son spectre en posant :

$$\hat{a}_z = \sqrt{\frac{M\omega_z}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2M\hbar\omega_z}}$$
 et $\hat{N}_z = \hat{a}_z^{\dagger}\hat{a}_z$,

l'hamiltonien s'écrivant alors : $\hat{H}_z = \hbar \omega_z (\hat{N}_z + 1/2)$.

- (b) De la relation de commutation $[\hat{a}_z, \hat{a}_z^{\dagger}] = 1$, on déduit que les valeurs propres de \hat{N}_z sont les entiers n_z positifs ou nuls. Les valeurs propres de \hat{H}_z s'écrivent donc $\hbar\omega_z(n_z+1/2)$.
- 2.3. Commençons par calculer le commutateur générique :

$$\mathcal{C} = \left[\sqrt{\frac{M\Omega}{4\hbar}} (\hat{x} - i\eta \hat{y}) + \xi \frac{i}{\sqrt{4\hbar M\Omega}} (\hat{p}_x - i\eta \hat{p}_y) , \right.$$
$$\left. \sqrt{\frac{M\Omega}{4\hbar}} (\hat{x} + i\eta' \hat{y}) - \xi' \frac{i}{\sqrt{4\hbar M\Omega}} (\hat{p}_x + i\eta' \hat{p}_y) \right]$$

où les quatre nombres η, ξ, η' et ξ' valent ± 1 . En utilisant $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$, on trouve :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{4} \left(\xi + \xi' \right) \left(1 + \eta \eta' \right) \,.$$

- (a) Le commutateur $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^{\dagger}]$ correspond à $\eta = \eta' = +1$ et $\xi = \xi' = 1$, d'où $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^{\dagger}] = 1$. De même, on obtient $[\hat{a}_g, \hat{a}_g^{\dagger}] = 1$ à partir de $\eta = \eta' = -1$ et $\xi = \xi' = 1$.
- (b) Le commutateur $[\hat{a}_d, \hat{a}_g]$ correspond à $\xi = 1$ et $\xi' = -1$, d'où $[\hat{a}_d, \hat{a}_g] = 0$. De même, $[\hat{a}_d, \hat{a}_g^{\dagger}]$ est nul car il correspond à $\eta = -\eta' = 1$. On en déduit que les deux autres commutateurs donnés dans l'énoncé $([\hat{a}_d^{\dagger}, \hat{a}_g]$ et $[\hat{a}_d^{\dagger}, \hat{a}_g^{\dagger}]$ sont également nuls, en considérant les quantités conjuguées hermitiques des commutateurs précédents.
- (c) La relation de commutation $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^{\dagger}] = 1$ entraı̂ne que les valeurs propres de \hat{N}_d sont les entiers positifs ou nuls, et il en va de même pour \hat{N}_g .
- (d) Les opérateurs \hat{N}_d et \hat{N}_q se développent en :

$$\hat{N}_{d,g} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{4\hbar M\Omega} + \frac{M\Omega}{4\hbar} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{1}{2} \pm \frac{\hat{L}_z}{2\hbar} ,$$

où le signe + (resp.-) correspond à \hat{N}_d (resp. \hat{N}_g). Par ailleurs, la somme et la différence des racines de l'équation $\omega^2 - \omega_c \omega + \omega_z^2/2 = 0$ valent :

$$\omega_d + \omega_g = \omega_c$$
 $\omega_d - \omega_g = \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} = 2\Omega$.

On en déduit le résultat annoncé :

$$\hat{H}_{xy} = \hbar \omega_d (\hat{N}_d + 1/2) - \hbar \omega_g (\hat{N}_g + 1/2)$$
.

(e) Les vecteurs propres de \hat{H}_{xy} sont donc repérés par les deux nombres quantiques n_d et n_g (entiers positifs ou nuls), correspondant aux valeurs propres de \hat{N}_d et \hat{N}_g . Les états propres correspondants seront notés $|n_d, n_g\rangle$; la valeur propre de \hat{H}_{xy} associée à $|n_d, n_g\rangle$ est $\hbar\omega_d(n_d+1/2)-\hbar\omega_g(n_g+1/2)$.

2.4. On a :

$$[\hat{a}_d, \hat{H}] = \hbar \omega_d \ [\hat{a}_d, \hat{a}_d^{\dagger} \hat{a}_d] = \hbar \omega_d \ \hat{a}_d$$
.

Le théorème d'Ehrenfest entraı̂ne donc : $\dot{A}_d=-i\omega_dA_d$. On trouve de même $\dot{A}_g=+i\omega_gA_g$. Ces deux équations s'intègrent en :

$$A_d(t) = A_d(0) e^{-i\omega_d t} \qquad A_g(t) = A_g(0) e^{+i\omega_g t}$$

On en déduit alors la position moyenne dans le plan xy en utilisant :

$$A_d + A_g = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \langle x \rangle + \frac{i}{\sqrt{\hbar M\Omega}} \langle p_x \rangle$$
$$i(A_d - A_g) = \sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}} \langle y \rangle + \frac{i}{\sqrt{\hbar M\Omega}} \langle p_y \rangle$$

soit:

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \operatorname{Re} \left(A_d(t) + A_g(t) \right)$$

 $\langle y \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \operatorname{Re} \left(i A_d(t) - i A_g(t) \right) .$

Posons $A_d(0) = \rho_d \ e^{-i\phi_d}$ et $A_g(0) = \rho_g \ e^{i\phi_g}$; on obtient :

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \left(\rho_d \cos(\omega_d t + \phi_d) + \rho_g \cos(\omega_g t + \phi_g) \right)$$

$$\langle y \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}} \left(\rho_d \sin(\omega_d t + \phi_d) + \rho_g \sin(\omega_g t + \phi_g) \right)$$

Tout comme pour le mouvement classique, les coordonnées $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ sont sommes de deux fonctions sinusoïdales de pulsation ω_d et ω_g , les composantes selon x et selon y de chacune de ces fonctions étant de même amplitude et déphasées de $\pi/2$ l'une par rapport à l'autre. Le mouvement moyen dans le plan xy est donc la composition de deux mouvements circulaires uniformes, de pulsation ω_d et ω_g : la figure obtenue à la question 1.5 reste valable.

2.5. (a) La fonction d'onde $\phi_0(\mathbf{r})$ associée aux nombres quantiques $n_d = n_g = n_z = 0$ s'écrit comme une fonction factorisée des trois variables x + iy, x - iy et z. Plus précisément, cette fonction doit vérifier $\hat{a}_{\mu}\phi_0(\mathbf{r}) = 0$, avec $\mu = d, g, z$. On en déduit, en posant $\eta = +$ et $\eta = -$ pour \hat{a}_d et \hat{a}_g respectivement :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\eta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{M\Omega}{\hbar}(x - i\eta y)\right)\phi_0(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{M\omega_z}{\hbar}z\right)\phi_0(\boldsymbol{r}) = 0 \ .$$

En additionnant et en soustrayant les deux équations pour $\eta=\pm,$ on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{M\Omega}{\hbar}x\right)\phi_0(\mathbf{r}) = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{M\Omega}{\hbar}y\right)\phi_0(\mathbf{r}) = 0.$$

La fonction $\phi_0(\mathbf{r})$ solution est donc un produit de trois fonctions gaussiennes par rapport aux variables x, y, z:

$$\phi_0(\mathbf{r}) \propto e^{-(x^2+y^2)/4r_0^2} e^{-z^2/4z_0^2}$$

avec

$$r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \ , \quad z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_z}} \ .$$

- (b) La distribution de probabilité $|\phi_0(r)|^2$ est centrée en r=0. Son extension (écart-type) selon les axes x et y est $\Delta x=\Delta y=r_0\simeq 11$ nm. Selon l'axe z, on a $\Delta z=z_0\simeq 380$ nm.
- **2.6.** Le rapport $k_BT/\hbar\omega_\mu$ pour $\mu=d,g,z$ vaut pour le domaine de température envisagé :

$$\frac{k_BT}{\hbar\omega_d}=0.014\ldots0.6 \qquad \frac{k_BT}{\hbar\omega_g}=1.5\times10^5\ldots6\times10^6 \qquad \frac{k_BT}{\hbar\omega_z}=30\ldots1300$$

Le caractère discret du spectre d'énergie jouera un rôle important uniquement pour le mouvement cyclotron (correspondant à $\hat{a}_d,\hat{a}_d^\dagger)$: seuls les premiers niveaux de ce mouvement $n_d=0,1,2,3$ seront occupés de manière appréciable dans ce domaine de très basse température. Pour les deux autres mouvements, de fréquence beaucoup plus basse que le mouvement cyclotron, on peut s'attendre à ce que les fluctuations liées au bruit thermique entraînent l'occupation d'un grand nombre de niveaux. Le caractère quantique des mouvements correspondants sera donc masqué par ce bruit thermique.

3. Couplage du mouvement cyclotron et du mouvement axial

3.1. En présence du couplage cyclotron-axial, l'hamiltonien \hat{H}_c s'écrit :

$$\hat{H}_c = \hbar \omega_d \; (\hat{N}_d + 1/2) - \hbar \omega_g \; (\hat{N}_g + 1/2) + \frac{\hat{p}_z^2}{2M} + \frac{M \omega_z^2}{2} \left(1 + \epsilon \hat{N}_d \right) \; \hat{z}^2 \; .$$

- **3.2.** Il est immédiat de vérifier que \hat{N}_d et \hat{N}_g commutent avec \hat{H}_c . Les quantités physiques correspondantes (nombres d'excitation des mouvements cyclotron et magnétron) sont donc des constantes du mouvement.
- **3.3.** (a) À l'intérieur du sous-espace \mathcal{E}_{n_d,n_g} , l'hamiltonien \hat{H}_c ne fait intervenir que les opérateurs \hat{z} et \hat{p}_z :

$$\hat{H}_{c}^{(n_d, n_g)} = \frac{\hat{p}_z^2}{2M} + \frac{M\omega_z^2}{2} (1 + \epsilon n_d) \hat{z}^2 + E_{n_d, n_g} ,$$

avec $E_{n_d,n_g} = \hbar \omega_d (n_d + 1/2) - \hbar \omega_g (n_g + 1/2)$.

(b) Si le système est préparé dans un état du sous-espace \mathcal{E}_{n_d,n_g} , il va y rester puisque n_d et n_g sont des constantes du mouvement. Son mouvement est décrit par l'hamiltonien $\hat{H}_c^{(n_d,n_g)}$, qui correspond à un oscillateur harmonique selon z, de pulsation $\omega_z\sqrt{1+\epsilon n_d}$.

(c) Les valeurs propres de $\hat{H}_c^{(n_d,n_g)}$ sont $\hbar\omega_z (n_z + 1/2)\sqrt{1 + \epsilon n_d} + E_{n_d,n_g}$. Les états propres correspondants sont les fonctions de Hermite $\psi_n(Z)$, où on a posé :

$$Z = z\sqrt{M\omega_z(1+\epsilon n_d)^{1/2}/\hbar} \ .$$

3.4. L'opération précédente peut être menée à l'intérieur de chacun des sous-espaces propres de \hat{N}_d et \hat{N}_g . On obtient ainsi une base d'états propres de \hat{H}_c que l'on note $|n_d,n_g,n_z\rangle$. La valeur propre associée à chaque vecteur de base est :

$$E_{n_d,n_g,n_z} = \hbar \omega_d (n_d + 1/2) - \hbar \omega_g (n_g + 1/2) + \hbar \omega_z (n_z + 1/2) \sqrt{1 + \epsilon n_d}$$
.

Contrairement au résultat de la section 2, cette base ne correspond plus à des fonctions factorisées des variables $x \pm iy$ et z: le couplage entre mouvement axial et mouvement cyclotron a induit une corrélation entre la fréquence du mouvement axial et l'état du mouvement cyclotron.

3.5. (a) Si le système est préparé dans le sous-espace \mathcal{E}_{n_d,n_g} , l'hamiltonien du mouvement axial correspond à un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_z \sqrt{1+\epsilon n_d}$. Le théorème d'Ehrenfest donne alors immédiatement :

$$\langle z \rangle_t = z_0 \cos\left(\omega_z t \sqrt{1 + \epsilon n_d}\right)$$

 $\langle p_z \rangle_t = -M\omega_z z_0 \sqrt{1 + \epsilon n_d} \sin\left(\omega_z t \sqrt{1 + \epsilon n_d}\right)$

puisque les équations d'évolution de la position moyenne et de l'impulsion moyenne trouvées en mécanique quantique coïncident avec les équations classiques pour un oscillateur harmonique.

(b) Le déphasage accumulé pendant une durée τ entre le courant détecté, proportionnel à $\langle p_z \rangle_t$, et l'oscillateur extérieur est :

$$\varphi = \omega_z \tau \sqrt{1 + \epsilon n_d} - \omega_z \tau \simeq \frac{\epsilon}{2} \omega_z \tau n_d$$
.

Connaissant la durée τ , la pulsation ω_z et la constante de couplage ϵ , on en déduit le nombre d'excitation cyclotron n_d .

3.6. (a) Les résultats de mesure possibles sont les nombres

$$\varphi_k = \frac{\epsilon}{2} \omega_z \tau k \; ,$$

où $k=n_d$ est un entier positif ou nul. Un résultat de mesure donné détermine sans ambiguïté le nombre d'excitation du mouvement cyclotron.

(b) Le postulat concernant la mesure en mécanique quantique indique que l'état du système après mesure $|\Psi'\rangle$ correspond à la projection du vecteur d'état avant mesure $|\Psi\rangle$ sur le sous-espace correspondant à la mesure :

$$|\Psi'\rangle \propto \sum_{n_q,n_z} c_{n_d^{(0)},n_g,n_z} |n_d^{(0)},n_g,n_z\rangle$$

où l'entier $n_d^{(0)}$ correspond au résultat de mesure de φ . Il faut ensuite normer le membre de droite pour obtenir le vecteur d'état $|\Psi'\rangle$.

- (c) Pour les paramètres indiqués dans l'énoncé, on trouve $\phi_1 = \epsilon \omega_z \tau/2 \simeq 2\pi \times 1,28$. La précision de $\pi/10$ est donc bien meilleure que l'écart entre les déphasages correspondant à n_d et n_d+1 , et on peut effectivement mesurer sans ambiguïté les nombres d'excitation $n_d=0,1,2,\ldots$
- (d) Une mesure de n_d prépare le système dans un sous-espace propre de \hat{N}_d . Comme \hat{N}_d commute avec l'hamiltonien \hat{H}_c , n_d est une constante du mouvement. Toute nouvelle mesure du nombre d'excitation du mouvement cyclotron redonnera donc le même résultat n_d , correspondant au même déphasage φ_k . Cette conclusion n'est bien sûr pas valable si le système n'est pas complètement isolé et interagit avec son environnement. Ce couplage avec l'environnement peut alors causer des transitions entre les différents états propres de \hat{H}_c , comme on le verra dans la partie 4.

4. Un thermomètre quantique

3.1. Les sauts brusques du signal sont associés à un changement du nombre d'excitation du mouvement cyclotron, changement dû au couplage de l'électron piégé avec le thermostat. Rappelons qu'en l'absence de ce couplage, n_d serait une constante du mouvement.

Pour la première courbe expérimentale de la figure 1, les fractions de temps passées sur les niveaux $n_g=0,1$ et 2 sont respectivement 80%, 19% et 1%. Pour la seconde courbe expérimentale, on trouve que les fractions du temps passées sur $n_q=0$ et $n_q=1$ sont approximativement 97% et 3%.

3.2. Pour un oscillateur harmonique à une dimension de pulsation $\omega,$ on trouve :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{e^{-(n+3/2)\hbar\omega/k_B T}}{e^{-(n+1/2)\hbar\omega/k_B T}} = e^{-\hbar\omega/k_B T} ,$$

qui est indépendant de n.

- **3.3.** Pour les courbes de la figure 1, on trouve :
- Courbe supérieure : $p_1/p_0 = 0.24$, soit $k_B T_a = \hbar \omega_c / |\ln(0.24)| \simeq 0.7 \hbar \omega_c$. Ceci correspond à $T_a \simeq 5$ K. En principe, la détermination de la température peut aussi se faire à partir de p_2/p_1 , mais la précision obtenue est en l'occurrence beaucoup moins bonne qu'en partant de p_1/p_0 .
- Courbe inférieure : $p_1/p_0=0.03$, soit $k_BT_b=\hbar\omega_c/\left|\ln(0.03)\right|\simeq0.29~\hbar\omega_c$. Ceci correspond à $T_b\simeq2$ K.
- 3.4. (a) Le facteur de normalisation se détermine à partir de :

$$1 = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\hbar\omega/k_B T} .$$

On voit apparaître la somme d'une série géométrique de raison $e^{-\gamma}$:

$$1 = \mathcal{N} \frac{e^{-\gamma/2}}{1 - e^{-\gamma}} \qquad \to \qquad \mathcal{N} = 2 \sinh(\gamma/2) \ .$$

Le nombre moyen d'excitation vaut :

$$\bar{n} = \sum_{n} nP_n = \frac{\sum_{n} ne^{-n\gamma}}{\sum_{n} e^{-n\gamma}} = -\frac{d}{d\gamma} \ln \left(\sum_{n} e^{-n\gamma} \right) ,$$

ou encore:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\gamma} - 1} \ .$$

(b) On voit sur l'expression précédente que \bar{n} est une fonction rapidement croissante de la température. Quand la température est telle que $\gamma \sim 1$, c'est-à-dire $k_B T \sim \hbar \omega_c$ (soit $T \sim 7.1$ K pour cette expérience), le nombre d'excitation est de l'ordre de $(e-1)^{-1} \sim 0.6$. Au dessous de cette température, l'occupation du niveau $n_g = 0$ devient prépondérante, comme on le voit sur les courbes de la figure 1.

La variation de $\ln p_n$ en fonction de n est linéaire :

$$\ln p_n = -n \frac{\hbar \omega_c}{k_B T} + \text{Cte}$$

La pente de cette droite est d'autant plus grande que la température est faible. Les courbes de la figure 2 montrent clairement cette variation linéaire. Elles correspondent à des rapports p_1/p_0 égaux respectivement à : 0,16 , 0,092 , 0,028 , 0,012 , soit des températures de 1,6 K, 2 K, 3 K et 3,9 K.

(c) Pour mesurer une température avec ce dispositif, il faut disposer d'une distribution statistiquement significative pour l'occupation du niveau $n_g=1$. Il est expérimentalement difficile d'aller en dessous d'une probabilité d'occupation de 10^{-2} pour le niveau $n_d=1$, ce qui correspond à une température $T\simeq 1,5$ K.

Pour améliorer encore la sensibilité de ce thermomètre, on peut :

- allonger de manière significative le temps de mesure pour détecter des probabilités d'occupation du niveau $n_d = 1$ nettement inférieur à 10^{-2} ;
- réduire la valeur du champ magnétique B, de manière à réduire la fréquence cyclotron ω_c , et augmenter (à température donnée) la probabilité d'occupation du niveau $n_q=1$.

Pour en savoir plus

S. Peil and G. Gabrielse, Observing the Quantum Limit of an Electron Cyclotron: QND Measurements of Quantum Jumps between Fock States, Phys. Rev. Lett. 83, p. 1287 (1999).

C. Systèmes complexes

13. Le problème à trois corps

Le problème à trois corps est un grand classique de la mécanique. Newton était agacé de ne pas trouver une solution analytique au problème Soleil-Terre-Lune, qu'il n'avait pu calculer qu'approximativement. Henri Poincaré a été le premier a démontrer des résultats exacts sur cette question, ce qui a beaucoup contribué à sa célébrité. Le but du problème est d'obtenir des résultats rigoureux sur le problème à trois corps en mécanique quantique. Ce qui nous intéresse ici est de trouver des bornes inférieures pour l'énergie de l'état fondamental de systèmes à trois corps à partir des systèmes à deux corps. Les bornes supérieures sont plus faciles à obtenir grâce aux méthodes variationnelles. Nous verrons que nos bornes inférieures constituent de bonnes approximations aux résultats exacts.

1 Rappels sur le problème à deux corps

Soit un système de deux particules de même masse m, d'impulsions p_1 et p_2 , interagissant par un potentiel $V(r_{12})$ où $r_{12} = |r_1 - r_2|$.

1.1. Écrire l'hamiltonien \hat{H} du système. Soient $P = p_1 + p_2$ et $p = (p_1 - p_2)/2$ les impulsions totale et relative. Séparer l'hamiltonien du centre de masse et l'hamiltonien relatif \hat{H}_{12} sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_{cm} + \hat{H}_{12} , \quad \hat{H}_{cm} = \frac{\hat{P}^2}{2M} , \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{12} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(\hat{r}_{12}) , \quad (1)$$

où M=2m est la masse totale, et donner l'expression de la masse réduite μ en fonction de m.

1.2. On note $E^{(2)}(\mu)$ le niveau fondamental de \hat{H}_{12} . Rappeler l'expression de $E^{(2)}(\mu)$ dans les deux cas $V(r) = -b^2/r$ et $V(r) = \kappa r^2/2$.

2 Méthode variationnelle

On note $\{|n\rangle\}$ les états propres orthonormés d'un hamiltonien \hat{H} et $\{E_n\}$ la suite ordonnée des valeurs propres correspondantes : $E_0 < E_1 < E_2...$

- **2.1.** Montrer que $\langle n|\hat{H}|n\rangle = E_n$.
- **2.2.** Soit un vecteur quelconque $|\psi\rangle$ de l'espace de Hilbert du système. En développant $|\psi\rangle$ sur la base $\{|n\rangle\}$, démontrer l'inégalité

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \ge E_0 \langle \psi | \psi \rangle \ .$$
 (2)

2.3. Montrer que le résultat précédent reste vrai si \hat{H} est l'hamiltonien d'un sous-système à deux corps et $|\psi\rangle$ un état à trois corps. Pour cela, on notera \hat{H}_{12} l'hamiltonien du sous-système à deux corps (1,2) dans le système à trois corps de fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$. On considérera d'abord une valeur fixe de \mathbf{r}_3 , puis on intégrera sur cette variable.

3 Relation entre le problème à trois corps et le problème à deux corps

On considère un système de 3 particules de même masse m interagissant deux à deux :

$$V = V(r_{12}) + V(r_{23}) + V(r_{31}) .$$

3.1. Vérifier l'identité

$$3(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3)^2+(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)^2+(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3)^2+(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_1)^2\ .$$

En déduire que l'hamiltonien à trois corps $\hat{H}^{(3)}$ s'écrit

$$\hat{H}^3 = \hat{H}_{cm} + \hat{H}_{rel}^{(3)}, \quad \hat{H}_{cm} = \hat{P}^2 / 6m,$$

où $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2 + \hat{\boldsymbol{p}}_3$ est l'impulsion totale et où l'hamiltonien relatif $\hat{H}_{\mathrm{rel}}^{(3)}$ est une somme d'hamiltoniens relatifs à deux particules du type défini dans (1),

$$\hat{H}_{\rm rel}^{(3)} = \hat{H}_{12} + \hat{H}_{23} + \hat{H}_{31} ,$$

avec une nouvelle masse réduite μ' que l'on déterminera en fonction de m.

- **3.2.** Les hamiltoniens à deux corps \hat{H}_{ij} commutent-ils *a priori*? Quel résultat obtiendrait-on s'ils commutaient?
- **3.3.** On note $|\Omega\rangle$ l'état fondamental normé de $\hat{H}_{\rm rel}^{(3)}$, et $E^{(3)}$ l'énergie correspondante. Montrer que l'énergie du système à trois corps est reliée à l'énergie des sous-système à deux corps par l'inégalité

$$E^{(3)} \ge 3E^{(2)}(\mu')$$
 . (3)

3.4. Quelles bornes inférieures sur $E^{(3)}$ obtient-on pour les deux cas

$$V(r) = -b^2/r$$
 et $V(r) = \kappa r^2/2$?

Dans le premier cas, le calcul exact (obtenu numériquement) donne la valeur $E^{(3)} \simeq -1,067~mb^4/\hbar^2$. Comment cela se compare-t-il avec la borne (3)?

4 Oscillateur harmonique à trois corps

On sait résoudre exactement le problème à trois corps pour des interactions harmoniques $V(r) = \kappa r^2/2$. Pour ce faire, on introduit les variables suivantes :

$${m R}_1 = ({m r}_1 - {m r}_2)/\sqrt{2} \; , \quad {m R}_2 = (2{m r}_3 - {m r}_1 - {m r}_2)/\sqrt{6} \; , \quad {m R}_3 = ({m r}_1 + {m r}_2 + {m r}_3)/\sqrt{3} \; ,$$

$$Q_1 = (p_1 - p_2)/\sqrt{2}$$
, $Q_2 = (2p_3 - p_1 - p_2)/\sqrt{6}$, $Q_3 = (p_1 + p_2 + p_3)/\sqrt{3}$.

- **4.1.** Quelles sont les relations de commutation des composantes \hat{R}_j^{α} et \hat{Q}_k^{β} des $\hat{\boldsymbol{R}}_j$ et des $\hat{\boldsymbol{Q}}_k(\alpha=1,2,3,\text{ et }\beta=1,2,3)$?
- **4.2.** Montrer que l'on a $Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ et

$$3(R_1^2 + R_2^2) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3)^2 + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)^2$$
.

4.3. Récrire l'hamiltonien à trois corps en fonction de ces variables pour $V(r) = \kappa r^2/2$. En déduire l'énergie du fondamental à trois particules pour $V(r) = \kappa r^2/2$. Montrer que dans ce cas la borne (3) est atteinte. Cette borne, valable quel que soit le potentiel, peut-elle être améliorée?

5 Des mésons aux baryons dans le modèle des quarks

En physique des particules élémentaires, ces résultats sont particulièrement intéressants parce que les *mésons* sont des états liés de deux quarks, alors que les *baryons* (comme le proton) sont des états liés de trois quarks. Par ailleurs, on constate empiriquement que la spectroscopie des mésons et des baryons est reproduite en très bonne approximation par des modèles non relativistes d'interaction des quarks.

Ainsi, la masse m du méson φ , état lié du quark étrange s et de son antiquark \bar{s} , tous deux de même masse m_s , est : $m_{\varphi} = 2m_s + E^{(2)}(\mu)/c^2$, où $\mu = m_s/2$, c est la vitesse de la lumière, $E^{(2)}$ est l'énergie du fondamental du système $s\bar{s}$ lié par un potentiel $V_{q\bar{q}}(r)$.

Le baryon Ω^- est formé de trois quarks étranges s. Sa masse est $M_\Omega=3m_s+E^{(3)}/c^2$, où $E^{(3)}$ est l'énergie de l'état fondamental d'un système à trois corps dans lequel les trois quarks interagissent deux à deux par un potentiel $V_{qq}(r)$. Ces deux potentiels sont reliés par

$$V_{qq}(r) = \frac{1}{2} V_{q\overline{q}}(r) .$$

C'est une propriété étonnante et fondamentale de la théorie des quarks que $V_{qq}(r)$ est le même pour tous les types de quarks.

5.1. Montrer que, dans ces conditions, on a :

$$E^{(3)} \ge \frac{3}{2} E^{(2)}(\mu')$$
.

Déterminer μ' en fonction de $\mu = m_s/2$.

5.2. On considère le potentiel $V_{q\bar{q}}(r) = g \ln(r/r_0)$, et deux hamiltoniens à deux corps $\hat{H}^{(2)}(\mu)$ et $\hat{H}^{(2)}(\tilde{\mu})$ correspondant à ce même potentiel V, mais avec des masses réduites μ et $\tilde{\mu}$ différentes. Montrer que l'on peut transformer $\hat{H}^{(2)}(\tilde{\mu})$ en $\hat{H}^{(2)}(\mu) + C$ par une homothétie sur r (C est une constante).

Calculer la valeur de la constante C. En déduire que les valeurs propres $E_n^{(2)}(\mu)$ de $\hat{H}^{(2)}(\mu)$ et $E_n^{(2)}(\tilde{\mu})$ de $\hat{H}^{(2)}(\tilde{\mu})$ sont reliées par la relation simple

$$E_n^{(2)}(\tilde{\mu}) = E_n^{(2)}(\mu) + \frac{g}{2} \ln \frac{\mu}{\tilde{\mu}}$$
.

- **5.3.** Une caractéristique frappante de l'espacement des niveaux d'énergie dans des sytèmes quark-antiquark différents est d'être approximativement indépendant de la nature, donc des masses, des quarks constituants. En quoi cela justifie-t-il l'essai du potentiel $V_{q\overline{q}}(r)=g\,\ln(r/r_0)$?
- **5.4.** Montrer qu'entre les masses M_Ω du Ω^- et m_φ du φ , on a la relation

$$M_\Omega \geq \frac{3}{2} m_\varphi \ + \ a \ ,$$

et exprimer a en fonction de la constante de couplage g.

5.5. Les masses observées sont $m_\varphi c^2=1019~{\rm MeV}$ et $M_\Omega c^2=1672~{\rm MeV}$. La constante g vaut 650 MeV. Comparer l'inégalité précédente au résultat expérimental.

6 Corrigé

- 1. Rappels sur le problème à deux corps
- 1.1. L'hamiltonien à deux corps est

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + V(\hat{r}_{12}) \ .$$

Le mouvement relatif se sépare comme d'habitude

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(\hat{r}) ,$$

où la masse totale est M=2m et la masse réduite $\mu=m/2$.

1.2. Pour un potentiel coulombien $V(r) = -b^2/r$, on obtient

$$E^{(2)}(\mu) = -\frac{\mu b^4}{2\hbar^2} \ .$$

Pour un potentiel harmonique $V(r) = \kappa r^2/2$, on obtient

$$E^{(2)}(\mu) = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \ .$$

2. Méthode variationnelle

- **2.1.** Par définition, $\langle n|\hat{H}|n\rangle = E_n\langle n|n\rangle = E_n$.
- **2.2.** Puisque $\{|n\rangle\}$ est une base hilbertienne, on peut développer $|\psi\rangle$ suivant $|\psi\rangle = \sum c_n |n\rangle$ et le carré de sa norme est $\langle \psi | \psi \rangle = \sum |c_n|^2$. On a donc $\hat{H} |\psi\rangle = \sum c_n E_n |n\rangle$ et $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \sum E_n |c_n|^2$. Par conséquent, en écrivant simplement

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle - E_0 \langle \psi | \psi \rangle = \sum_n (E_n - E_0) |c_n|^2$$

on obtient, puisque $E_n \ge E_0$ et $|c_n|^2 \ge 0$,

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \ge E_0 \langle \psi | \psi \rangle$$
.

2.3. Si $\hat{H} = \hat{H}_{12}$, pour \mathbf{r}_3 fixé, $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ est une fonction d'onde non normalisée à deux particules. Par conséquent

$$\int \psi^*(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) \, \hat{H}_{12} \, \psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) \, d^3r_1 \, d^3r_2 \, \geq \, E_0 \int |\psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)|^2 \, d^3r_1 \, d^3r_2 \, .$$

En intégrant cette inégalité sur r_3 , on obtient bien le résultat voulu.

3. Relation entre le problème à trois corps et le problème à deux corps

3.1. L'identité est évidente car les termes croisés s'éliminent dans le terme de droite. Par conséquent : $\hat{H} = \hat{P}^2/(6m) + \hat{H}_{12} + \hat{H}_{13} + \hat{H}_{23}$ avec

$$\hat{H}_{ij} = \frac{(\hat{\pmb{p}}_i - \hat{\pmb{p}}_j)^2}{6m} + V(\hat{r}_{ij}) = \frac{\left[(\hat{\pmb{p}}_i - \hat{\pmb{p}}_j)/2\right]^2}{2u'} + V(\hat{r}_{ij}) \ ,$$

où la masse réduite est $\mu' = 3m/4$.

- **3.2.** \hat{H}_{12} et \hat{H}_{13} ne commutent évidemment pas : par exemple $(\hat{p}_1 \hat{p}_3)^2$ ne commute pas avec $V(|\hat{r}_1 \hat{r}_2|)$. Si les \hat{H}_{ij} commutaient, l'énergie à trois corps serait tout simplement la *somme* des énergies à deux corps pour une masse réduite $\mu' = 3m/4$.
- **3.3.** Par définition, $E^{(3)} = \langle \Omega | \hat{H}_{\rm rel}^{(3)} | \Omega \rangle = \sum \langle \Omega | \hat{H}_{ij} | \Omega \rangle$. Mais, en vertu des questions 2.2 et 2.3, on a $\langle \Omega | \hat{H}_{ij} | \Omega \rangle \geq E^{(2)}(\mu')$, soit par symétrie évidente de $|\Omega\rangle$ par permutation des paires :

$$E^{(3)} \ge 3E^{(2)}(\mu')$$
 avec $\mu' = 3m/4$.

3.4. Pour un potentiel coulombien, on obtient

$$E^{(3)} \ge -\frac{3}{2} \frac{\mu' b^4}{\hbar^2} = -\frac{9}{8} \frac{m b^4}{\hbar^2} ,$$

à 6% de la valeur exacte $-1{,}067\;mb^4/\hbar^2$

Pour un potentiel harmonique $V(r) = \kappa r^2/2$, on obtient

$$E^{(3)} \geq 3 \; \frac{3}{2} \; \hbar \sqrt{\frac{\kappa}{\mu'}} = 3\sqrt{3} \; \hbar \; \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \; . \label{eq:energy}$$

4. Oscillateur harmonique à trois corps

- **4.1.** Les variables de Jacobi introduites dans l'énoncé ont des relations de commutation canoniques $[\hat{R}^{\alpha}_{j},\hat{Q}^{\beta}_{k}]=i\hbar~\delta_{jk}~\delta_{\alpha\beta}$.
- 4.2. Les relations demandées s'obtiennent sans difficulté.
- 4.3. On trouve

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}_1^2}{2m} + \frac{3}{2}\kappa\hat{R}_1^2 + \frac{Q_2^2}{2m} + \frac{3}{2}\kappa\hat{R}_2^2 + \frac{\hat{Q}_3^2}{2m} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{cm} ,$$

où $\hat{H}_{\rm cm} = \hat{Q}_3^2/(2m) = \hat{P}^2/(6m)$ est l'hamiltonien du centre de masse. Les trois hamiltoniens \hat{H}_1 , \hat{H}_2 et $\hat{H}_{\rm cm}$ commutent. L'énergie de l'état fondamental (avec le centre de masse au repos) est donc :

$$E^{(3)} = 2 \; \frac{3}{2} \; \hbar \; \sqrt{\frac{3\kappa}{m}} = 3\sqrt{3} \; \hbar \; \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \; .$$

Le résultat exact coïncide avec la borne trouvée plus haut, qui est donc saturée dans le cas de l'oscillateur harmonique. En fait, cette borne est saturée si et seulement si le potentiel est harmonique. En effet, l'inégalité variationnelle utilisée ne devient une égalité que si la fonction d'essai coïncide avec l'état fondamental exact de l'hamiltonien. En raison de la symétrie particulière des formes quadratiques, les variables de Jacobi assurent que c'est le cas uniquement pour des interactions harmoniques.

Pour améliorer cette borne, il faudrait donc spécifier des conditions sur l'interaction considérée et elle cesserait d'être vraie pour tout potentiel.

5. Des mésons aux baryons dans le modèle des quarks

5.1. L'hamiltonien relatif $s\bar{s}$ est

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{\hat{p}^2}{m_s} + V_{q\bar{q}}(\hat{r}) \ .$$

L'hamiltonien relatif sss est (cf. § 3):

$$\hat{H}^{(3)} = \sum_{i < j} \left(\frac{(\hat{p}_i - \hat{p}_j)^2}{6m_s} + \frac{1}{2} V_{q\overline{q}}(\hat{r}_{ij}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i < j} \left(\frac{(\hat{p}_i - \hat{p}_j)^2}{3m_s} + V_{q\overline{q}}(\hat{r}_{ij}) \right) .$$

Par conséquent,

$$2\hat{H}^{(3)} = \sum_{i < j} \hat{H}_{ij} \quad \text{avec} \quad \hat{H}_{ij} = \frac{((\hat{p}_i - \hat{p}_j)/2)^2}{2\mu'} + V_{q\bar{q}}(\hat{r}_{ij}) ,$$

où $\mu' = 3m_s/8 = 3\mu/4$. On en déduit

$$2E^{(3)} \ge 3E^{(2)}(\mu')$$
 avec $\mu' = 3\mu/4$.

5.2. Par la transformation $r \to \alpha r$ on obtient

$$\hat{H}^{(2)}(\tilde{\mu}) = \frac{\hat{p}^2}{2\alpha^2\tilde{\mu}} + g \; \ln\frac{\hat{r}}{r_0} + g \; \ln\alpha \; .$$

Le choix $\alpha=(\mu/\tilde{\mu})^{1/2}$ entraı̂ne $\hat{H}^{(2)}(\tilde{\mu})=\hat{H}^{(2)}(\mu)+g\,\ln\alpha,$ de sorte que

$$E_n^{(2)}(\tilde{\mu}) = E_n^{(2)}(\mu) + \frac{g}{2} \ln \frac{\mu}{\tilde{\mu}}$$
.

- **5.3.** Dans un potentiel logarithmique, l'espacement des niveaux d'énergie est donc indépendant de la masse. C'est ce qu'on observe en première approximation pour les quarks, ce qui justifie l'essai d'un tel potentiel.
- 5.4. Les énergies de liaison satisfont

$$E^{(3)} \ge \frac{3}{2} \left(E^{(2)} + \frac{g}{2} \ln \frac{4}{3} \right)$$

avec

$$M_{\Omega} = 3m_s + \frac{E^{(3)}}{c^2} , \quad m_{\varphi} = 2m_s + \frac{E^{(2)}}{c^2} .$$

On obtient donc

$$M_{\Omega} \ge \frac{3}{2} m_{\varphi} + \frac{3g}{4c^2} \ln \frac{4}{3} .$$

La constante demandée est donc $a = (3g/(4c^2)) \ln(4/3)$.

5.5. Pour g = 650 MeV et $ac^2 = 140 \text{ MeV}$, on obtient

$$Mc^2 = 1672 \text{ MeV } \ge 1669 \text{ MeV },$$

qui est remarquablement précis.

De fait, le potentiel n'est logarithmique qu'à des distances inférieures au Fermi, ce qui correspond au rayon moyen du φ . Au-delà, il croît plus rapidement (linéairement à grande distance). En pratique, l'inégalité sert de garde-fou dans le choix du potentiel phénoménologique V(r) et de son domaine de validité.

Références

- J-L. Basdevant, J-M. Richard et A. Martin, Nuclear Physics **B343**, 60,69 (1990).
- J-L. Basdevant, J-M. Richard, A. Martin et Tai Tsun Wu, Nuclear Physics **B393**, 111 (1993).

14. Étude d'un condensat de Bose-Einstein

En refroidissant une assemblée d'atomes de spin entier à une température très basse (de l'ordre du microkelvin), on peut observer le phénomène de condensation de Bose-Einstein. On obtient ainsi une situation dans laquelle une grande partie des atomes occupent le même état quantique, ce qui confère au système des propriétés de cohérence remarquables. On étudie ici de manière approchée l'état fondamental de ce système à N particules que nous appellerons dorénavant « condensat » ; on montre en particulier que sa nature dépend crucialement du type d'interaction – répulsive ou attractive – entre les atomes.

1 Particule dans un piège harmonique

On considère une particule de masse m en mouvement dans un potentiel harmonique de pulsation ω . L'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\boldsymbol{r}}^2 \; ,$$

où $\hat{\boldsymbol{r}}=(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ et $\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z)$ représentent respectivement les opérateurs position et impulsion de la particule. On pose $a_0=\sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

- **1.1.** Rappeler sans démonstration les niveaux d'énergies du système et la fonction d'onde $\phi_0(\mathbf{r})$ de l'état fondamental?
- 1.2. On se propose de déterminer une borne supérieure de l'énergie du niveau fondamental de l'oscillateur par la méthode variationnelle. On prend pour cela une fonction d'essai gaussienne :

$$\psi_{\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{3/4}} \exp(-r^2/(2\sigma^2)) \quad \text{avec} \quad \sigma > 0 .$$
 (1)

En faisant varier la longueur σ , trouver une borne supérieure pour l'énergie du niveau fondamental. Comparer cette borne au résultat exact et commenter le résultat obtenu.

Formulaire:

$$\int |\psi_{\sigma}(\boldsymbol{r})|^2 dx dy dz = 1 \quad ; \qquad \int |\psi_{\sigma}(\boldsymbol{r})|^4 dx dy dz = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sigma^3} ;$$
$$\int x^2 |\psi_{\sigma}(\boldsymbol{r})|^2 dx dy dz = \frac{\sigma^2}{2} \quad ; \qquad \int \left| \frac{\partial \psi_{\sigma}(\boldsymbol{r})}{\partial x} \right|^2 dx dy dz = \frac{1}{2\sigma^2} .$$

2 Interaction entre deux particules confinées

On considére dans cette partie deux particules de même masse m, en mouvement dans le potentiel harmonique de pulsation ω . On note $\hat{\boldsymbol{r}}_1$, $\hat{\boldsymbol{r}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{p}}_1$, $\hat{\boldsymbol{p}}_2$ les opérateurs position et impulsion de ces deux particules.

2.1. En l'absence d'interaction entre les particules, l'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\pmb{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\pmb{p}}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\pmb{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\pmb{r}}_2^2 \; .$$

- (a) Quelles sont les niveaux d'énergie de l'hamiltonien \hat{H} ?
- (b) Quelle est la fonction d'onde $\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ de l'état fondamental?
- **2.2.** On suppose maintenant que les deux particules interagissent entre elles par un potentiel $v(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)$ de courte portée. Autrement dit, on suppose qu'à l'échelle de a_0 , ce potentiel est très piqué au voisinage de l'origine. Par conséquent, pour deux fonctions $f(\mathbf{r})$ et $g(\mathbf{r})$ variant faiblement sur un intervalle de l'ordre de a_0 , on a :

$$\iint f(\boldsymbol{r}_1) g(\boldsymbol{r}_2) v(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \simeq \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int f(\boldsymbol{r}) g(\boldsymbol{r}) d^3 r.$$
 (2)

La grandeur a, appelée longueur de diffusion, est caractéristique de l'espèce atomique considérée. Elle peut être positive (interaction répulsive) ou négative (interaction attractive). On mesure par exemple a=3,4 nm pour les atomes de sodium (isotope 23 Na) et a=-1,5 nm pour les atomes de lithium (isotope 7 Li).

- (a) En utilisant la théorie des perturbations, évaluer au premier ordre en a le déplacement du niveau d'énergie fondamental de \hat{H} du fait des interactions entre les deux atomes. Commenter le signe de ce déplacement.
- (b) À quelle condition portant sur a et a_0 cette approche perturbative estelle valable?

3 Énergie d'un condensat de Bose-Einstein

On considère maintenant N particules confinées dans le piège harmonique de pulsation ω . Ces particules interagissent deux à deux par le potentiel $v(\vec{r})$ défini par (2). L'hamiltonien du système total s'écrit :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{r}_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \ j \neq i}}^{N} v(\hat{r}_i - \hat{r}_j) .$$

Pour trouver une estimation (borne supérieure) de l'énergie du niveau fondamental, on utilise la méthode variationnelle avec des fonctions d'essai factorisées du type :

$$\Psi_{\sigma}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N) = \psi_{\sigma}(\boldsymbol{r}_1) \ \psi_{\sigma}(\boldsymbol{r}_2) \dots \psi_{\sigma}(\boldsymbol{r}_N) \ ,$$

où $\psi_{\sigma}(\mathbf{r})$ est définie en (1).

3.1. Calculer les valeurs moyennes de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie d'interaction si le système à N particules est préparé dans l'état $|\Psi_{\sigma}\rangle$:

$$E_{c}(\sigma) = \langle \Psi_{\sigma} | \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_{i}^{2}}{2m} | \Psi_{\sigma} \rangle , \qquad E_{p}(\sigma) = \langle \Psi_{\sigma} | \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \omega^{2} \hat{\boldsymbol{r}}_{i}^{2} | \Psi_{\sigma} \rangle ,$$

$$E_{int}(\sigma) = \langle \Psi_{\sigma} | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} v(\hat{\boldsymbol{r}}_{i} - \hat{\boldsymbol{r}}_{j}) | \Psi_{\sigma} \rangle .$$

On pose $E(\sigma) = \langle \Psi_{\sigma} | \hat{H} | \Psi_{\sigma} \rangle$.

3.2. On introduit les quantités sans dimension $\tilde{E}(\sigma) = E(\sigma)/(N\hbar\omega)$ et $\tilde{\sigma} = \sigma/a_0$. Donner l'expression de \tilde{E} en fonction de $\tilde{\sigma}$. On mettra le résultat sous la forme :

$$\tilde{E}(\sigma) = \frac{3}{4} \, \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \right) + \frac{\eta}{\tilde{\sigma}^3}$$

et on exprimera la quantité η en fonction de N, a et a_0 . On supposera dans la suite $N \gg 1$.

3.3. Pour a=0, rappeler l'énergie de l'état fondamental de \hat{H} .

4 Condensat avec interactions répulsives

On suppose dans cette partie que l'interaction entre atomes est répulsive (a > 0).

- **4.1.** Tracer qualitativement \tilde{E} en fonction de $\tilde{\sigma}$ et discuter la variation avec η de son minimum \tilde{E}_{\min} .
- **4.2.** On se place dans la situation $\eta\gg 1$. Montrer que la contribution de l'énergie cinétique à $\tilde E$ est négligeable. En déduire une valeur approchée de $\tilde E_{\min}$.
- **4.3.** Comment l'énergie du condensat calculée par cette méthode variationnelle varie-t-elle avec le nombre d'atomes N? Comparer cette prédiction avec le résultat expérimental présenté sur la figure 1.
- **4.4.** La figure 1 a été obtenue avec un condensat de sodium (masse $m = 3.8 \times 10^{-26}$ kg) dans un piège harmonique de fréquence $\omega/(2\pi) = 142$ Hz.
- (a) Calculer a_0 et $\hbar\omega$ pour ce piège.
- (b) À partir de quelle valeur de N l'approximation $\eta\gg 1$ devient-elle valable ?
- (c) Dans le cadre du modèle précédent, déduire des données de la figure 1 la valeur de la longueur de diffusion a pour l'atome de sodium. Comparer

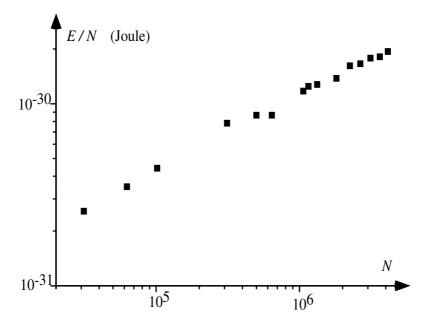


Fig. 1: Énergie par atome E/N dans un condensat de sodium, en fonction du nombre d'atomes N présents dans le condensat.

ce résultat à la valeur connue par ailleurs $a=3,4\,\,\mathrm{nm}.$ Est-il possible a priori d'améliorer la précision de la méthode variationnelle?

5 Condensat avec interactions attractives

On suppose dans cette partie que la longueur de diffusion a est négative.

- **5.1.** Tracer qualitativement \tilde{E} en fonction de $\tilde{\sigma}$.
- **5.2.** Commenter l'approximation (2) dans la région $\sigma \to 0$.
- **5.3.** Montrer qu'il existe une valeur critique η_c de $|\eta|$ au dessus de laquelle \tilde{E} n'admet plus de minimum local en un point tel que $\tilde{\sigma} \neq 0$. Calculer la taille σ_c correspondante, en fonction de a_0 .
- **5.4.** Dans une expérience menée avec des atomes de lithium, de masse $m=1,17\times 10^{-26}$ kg, on a constaté que le nombre d'atomes présents dans le condensat ne dépassait jamais 1200 pour un piège de fréquence $\omega/(2\pi)=145$ Hz. Expliquer ce résultat.

6 Corrigé

1. Particule dans un piège harmonique

1.1. L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à trois dimensions peut s'écrire

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z \; ,$$

où \hat{H}_i représente l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique de même pulsation à une dimension le long de l'axe i=x,y,z. On peut donc chercher une base de fonctions propres de \hat{H} sous forme de produits de fonctions propres de \hat{H}_x , \hat{H}_y , \hat{H}_z , c'est-à-dire $\phi(x,y,z)=\chi_{n_x}(x)$ $\chi_{n_y}(y)$ $\chi_{n_z}(z)$ où $\chi_n(x)$ est la n-ième fonction de Hermite. Les énergies propres de \hat{H} s'écrivent donc $E_n=(n+3/2)\hbar\omega$, où $n=n_x+n_y+n_z$ est un entier positif ou nul. La fonction d'onde de l'état fondamental, d'énergie $(3/2)\hbar\omega$, est obtenue en prenant $n_x=n_y=n_z=0$, soit :

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(a_0^2 \pi)^{3/4}} \exp\left[-r^2/(2a_0^2)\right] .$$

1.2. Les fonctions d'essai ψ_{σ} sont normées. Pour obtenir une borne supérieure de l'énergie de l'état fondamental de \hat{H} , il suffit donc de calculer $E(\sigma) = \langle \psi_{\sigma} | \hat{H} | \psi_{\sigma} \rangle$ et de minimiser cette quantité. En utilisant le formulaire, on trouve :

$$\langle \psi_\sigma | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_\sigma \rangle = 3 \; \frac{\hbar^2}{2m} \; \frac{1}{2\sigma^2} \; , \quad \langle \psi_\sigma | \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 | \psi_\sigma \rangle = 3 \; \frac{m \omega^2}{2} \; \frac{\sigma^2}{2} \; , \label{eq:power_power}$$

soit

$$E(\sigma) = \frac{3}{4} \, \hbar \omega \, \left(\frac{a_0^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{a_0^2} \right) \; . \label{eq:epsilon}$$

Cette fonction est minimum pour $\sigma = a_0$, et on trouve alors $E_{min}(\sigma) = (3/2) \hbar \omega$. La borne supérieure trouvée dans ce cas particulier est égale au résultat exact. Cela provient du fait que l'ensemble des fonctions d'essai contient la fonction d'onde de l'état fondamental de \hat{H} .

2. Interaction entre deux particules confinées

- **2.1.** (a) L'hamiltonien \hat{H} peut s'écrire $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, où \hat{H}_1 et \hat{H}_2 concernent respectivement la particule 1 et la particule 2. Une base de fonctions propres de \hat{H} est obtenue en prenant les produits des fonctions propres de \hat{H}_1 (fonctions de variable r_1) et des fonctions propres de \hat{H}_2 (fonctions de variable r_2). Les énergies propres s'écrivent $E_n = (n+3)\hbar\omega$, où n est un entier positif ou nul.
- (b) L'état fondamental de \hat{H} est :

$$\Phi_0(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \phi_0(\boldsymbol{r}_1) \; \phi_0(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{a_0^3 \pi^{3/2}} \; \exp\left[-(r_1^2 + r_2^2)/(2a_0^2)\right] \; .$$

2.2. (a) Puisque l'état fondamental de \hat{H} est non dégénéré, son déplacement au premier ordre en a s'écrit :

$$\Delta E = \langle \Phi_0 | \tilde{v} | \Phi_0 \rangle = \iint |\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2$$

$$\simeq \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \int |\phi_0(\mathbf{r})|^4 d^3 r = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{a_0^3} ,$$

ou encore

$$\frac{\Delta E}{\hbar \omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \frac{a}{a_0} \; .$$

Pour une interaction répulsive (a > 0), il y a augmentation de l'énergie du système (il faut fournir de l'énergie pour maintenir les deux constituants proches l'un de l'autre). Au contraire, pour une interaction attractive (a < 0), l'énergie du niveau fondamental est abaissée.

(b) L'approche perturbative est valable si le déplacement ΔE est petit devant l'écart $\hbar \omega$ entre les niveaux de \hat{H} . Il faut donc que $|a| \ll a_0$: la longueur de diffusion doit être petite devant l'extension caractéristique de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

3. Énergie d'un condensat de Bose-Einstein

3.1. L'utilisation du formulaire donne :

$$E_c(\sigma) = N \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m\sigma^2}$$
 $E_p(\sigma) = N \frac{3}{4} m\omega^2 \sigma^2$

et

$$E_{\rm int}(\sigma) = \frac{N(N-1)}{2} \; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \hbar \omega \; \frac{a a_0^2}{\sigma^3} \; . \label{eq:entropy}$$

Il y a en effet N termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, et N(N-1)/2 paires contribuant à l'énergie d'interaction.

3.2. Avec le changement de variable indiqué dans l'énoncé, on trouve :

$$\tilde{E}(\sigma) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \right) + \frac{N-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{a_0} \frac{1}{\tilde{\sigma}^3}$$

soit

$$\eta = \frac{N-1}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{a}{a_0} \; .$$

3.3. Si la longueur de diffusion est nulle, il n'y a pas d'interaction entre les particules. L'état fondamental du système est le produit des N fonctions $\phi_0(\mathbf{r}_i)$ et son énergie est $E=(3/2)N\hbar\omega$.

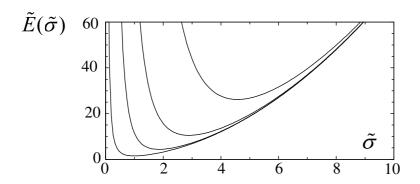


Fig. 2: Variation de $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ avec $\tilde{\sigma}$ pour $\eta = 0, 10, 100, 1000$ (de bas en haut).

Condensat avec interactions répulsives

4.1. La figure 2 donne la variation de $\tilde{E}(\sigma)$ avec σ pour des valeurs croissantes de η . La valeur de la fonction en un point σ donné augmente quand η augmente. Pour σ grand, le comportement de \tilde{E} ne dépend pas de η . Il est dominé par le terme d'énergie potentielle $3\tilde{\sigma}^2/4$.

Le minimum \tilde{E}_{\min} augmente quand η augmente. Ce minimum correspond au point où le terme d'énergie potentielle, qui tend à favoriser des petites valeurs de σ , s'équilibre avec les termes d'énergie cinétique et d'interaction, qui tendent au contraire à favoriser de grandes tailles σ . Comme les interactions sont répulsives, la taille du système à l'équilibre est plus grande qu'en l'absence d'interaction, et l'énergie correspondante est également augmentée.

4.2. Supposons η grand devant 1 et négligeons a priori le terme d'énergie cinétique $1/\tilde{\sigma}^2$. La fonction $(3/4)\tilde{\sigma}^2 + \eta/\tilde{\sigma}^3$ est minimum pour $\tilde{\sigma}_{\min} = (2\eta)^{1/5}$ où elle a pour valeur

$$\tilde{E}_{\min} = \frac{5}{4} (2\eta)^{2/5}$$
.

On peut vérifier a posteriori qu'il est légitime de négliger le terme d'énergie cinétique $1/\tilde{\sigma}^2$. En effet il est toujours petit devant l'une des deux autres contributions à \tilde{E} :

- Pour $\tilde{\sigma} < \tilde{\sigma}_{\min}$, on a $1/\tilde{\sigma}^2 \ll \eta/\tilde{\sigma}^3$. Pour $\tilde{\sigma} > \tilde{\sigma}_{\min}$, on a $1/\tilde{\sigma}^2 \ll \tilde{\sigma}^2$.

4.3. Pour un nombre d'atomes $N \gg 1$, on trouve donc que l'énergie du système trouvée par la méthode variationnelle s'écrit :

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4}\hbar\omega \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} N \frac{a}{a_0}\right)^{2/5} . \tag{3}$$

Cette variation de E/N en $N^{2/5}$ est très bien reproduite par les données expérimentales. Nous avons représenté sur la figure 3 un ajustement des

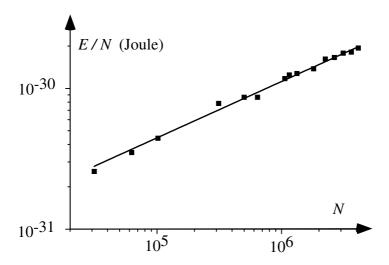


Fig. 3: Ajustement des données expérimentales par une loi en $N^{2/5}$.

données par cette loi. On trouve $E/N \simeq \alpha N^{2/5}$ avec $\alpha = 8.2 \times 10^{-33}$ Joule.

- **4.4.** (a) On trouve $a_0 = 1{,}76~\mu\mathrm{m}$ et $\hbar\omega = 9{,}4~10^{-32}$ Joule.
- (b) Prenons la valeur a=3,4 nm proposée par l'énoncé. L'approximation $\eta\gg 1$ sera valable si $N\gg 1300$. C'est bien le cas pour les données de la figure 1 de l'énoncé.
- (c) Le coefficient $\alpha=8.2\times 10^{-33}$ Joule trouvé par l'ajustement des données conduit à a=2.8 nm. Cette valeur est légèrement plus basse que la valeur annoncée a=3.4 nm. Cela est dû au fait que le résultat (3), $E/(N\hbar\omega)\simeq 1.142~(Na/a_0)^{2/5}$, obtenu par l'approche variationnelle avec des fonctions gaussiennes simples, ne fournit pas une valeur très précise de l'énergie de l'état fondamental du système. Avec davantage de paramètres dans les fonctions d'essai, on peut obtenir, toujours dans l'approximation du champ moyen et dans la limite $\eta\gg 1:E_{\rm fond}/(N\hbar\omega)\simeq 1.055~(Na/a_0)^{2/5}$. L'ajustement des données expérimentales est alors en très bon accord avec la valeur annoncée pour la longueur de diffusion.

5. Condensat avec interactions attractives

- **5.1.** La fonction $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ est représentée sur la figure 4. On constate qu'elle n'admet un minimum local non nul que si η est assez petit. Pour $\eta < 0$, il y a toujours un minimum en 0, la fonction tendant vers $-\infty$ en ce point.
- **5.2.** Le minimum absolu en $\sigma=0$ correspond à un nuage atomique très fortement comprimé. Pour des nuages d'aussi petite taille, l'approximation (2) d'un potentiel de « courte portée » n'a guère de sens. Physiquement, on doit prendre en compte les processus de formation de molécules et d'aggrégats

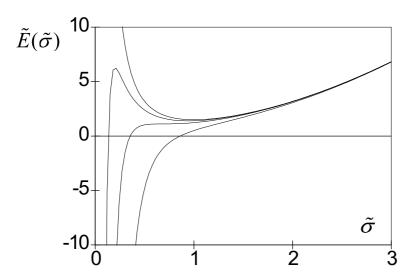


Fig. 4: Tracé de $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ pour $\,\eta=0\,$; $\,\eta=-0,\!1\,$; $\,\eta=-0,\!27\,$; $\,\eta=-1\,$ (de haut en bas).

d'atomes qui ont été oubliés dans tout ce qui précède.

5.3. Le minimum local en $\tilde{\sigma} \neq 0$ disparaît quand $\tilde{E}(\tilde{\sigma})$ un point d'inflexion à tangente horizontale. Ceci se produit pour une valeur critique de η qu'il s'agit de déterminer. Les deux conditions :

$$\frac{d\tilde{E}}{d\tilde{\sigma}} = 0 \ , \qquad \quad \frac{d^2\tilde{E}}{d\tilde{\sigma}^2} = 0 \ ,$$

conduisent au système :

$$0 = -\frac{1}{\tilde{\sigma}^4} + 1 - \frac{2\eta}{\tilde{\sigma}^5} ,$$

$$0 = \frac{3}{\tilde{\sigma}^4} + 1 + \frac{8\eta}{\tilde{\sigma}^5} ,$$

d'où l'on tire:

$$|\eta_c| = \frac{2}{5^{5/4}} \simeq 0.27$$
 , $\tilde{\sigma}_c = \frac{1}{5^{1/4}} \simeq 0.67$,

soit encore $\sigma_c \simeq 0,67~a_0$. Tant que ce minimum local existe, autrement dit pour $|\eta| < |\eta_c|$, on peut espérer obtenir un condensat métastable, dont la taille sera de l'ordre du minimum trouvé par cette approche variationnelle. En revanche, si on part d'une valeur trop grande pour $|\eta|$, par exemple en essayant de mettre trop d'atomes, le condensat va s'effondrer sur lui-même, et les processus conduisants à la formation de molécules entrent en jeu.

5.4. Pour les données expérimentales, on trouve $a_0=3,1~\mu\mathrm{m}$, soit un nombre critique d'atomes :

 $N_c = \sqrt{2\pi} \, \eta_c \, \frac{a_0}{|a|} \simeq 1400 \, .$

Cette valeur critique est en bon accord avec l'observation expérimentale. L'utilisation d'une classe de fonctions d'essai plus vaste que les fonctions gaussiennes permet là aussi d'améliorer l'accord entre théorie et expérience.

Remarques complémentaires :

Le premier condensat de Bose-Einstein d'un gaz atomique dilué a été observé à Boulder (USA) en 1995 (M. H. Anderson *et al*, Science **269**, 198 (1995)) avec des atomes de rubidium.

Les données expérimentales présentées dans ce problème pour un condensat de sodium ont été obtenues à partir des résultats publiés par M.-O. Mewes et al, Phys. Rev. Lett. 77, 416 (1996). La mesure de l'énergie E/N se fait en coupant brusquement le potentiel confinant les atomes et en mesurant l'expansion balistique qui en résulte. La vitesse des atomes lors de l'expansion résulte essentiellement de la conversion de l'énergie d'interaction entre atomes au sein du piège, en énergie cinétique.

Les expériences sur le lithium ont été menées dans le groupe de R. Hulet au Texas (voir C. Bradley et al, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997)).

On pourra également lire les conférences Nobel de E. Cornell, W. Ketterle, et C. Wieman (Prix Nobel 2001 pour leur contribution à ce domaine de recherche): Rev. Mod. Phys. **74**, p. 875 et p. 1131 (2002).

Signalons enfin la photographie de couverture de ce livre, qui illustre les propriétés spectaculaires de ces condensats quand on cherche à les mettre en rotation : contrairement à un fluide classique, dont le champ de vitesse à l'équilibre correspond simplement à la rotation rigide $\Omega \times r$, ces condensats tournent grâce à la nucléation de vortex quantifiés qui correspondent aux trous de densité visibles sur la photographie.

15. lons moléculaires colorés

Certains pigments sont constitués d'ions moléculaires linéaires, le long desquels les électrons se déplacent librement. Nous analysons ici les niveaux d'énergie de tels systèmes, et nous expliquons ainsi la coloration observée pour ces pigments.

Considérons un ion moléculaire de formule brute $(C_n H_{n+2})^-$. Il est obtenu à partir de molécules de polyéthylène à nombre pair d'atomes de carbone (comme l'hexatriène $CH_2 = CH - CH = CH - CH = CH_2$), en enlevant à ces molécules un groupement (CH)⁺. Dans un ion de ce genre, les liaisons se réarrangent pour conduire à une structure linéaire du type

$$(CH_2 \cdots CH \cdots CH \cdots CH \cdots CH_2)^-$$
, (1)

comportant une nombre impair n d'atomes de carbone équidistants séparés de d = 1,40 Å. Dans cette structure, on peut considérer que les n+1 électrons des doubles liaisons initiales du polyéthylène se déplacent indépendamment les uns des autres dans un puits de potentiel infini à une dimension de longueur $L_n = nd$:

$$V(x) = +\infty$$
 si $x < 0$ ou $x > L_n$
= 0 si $0 \le x \le L_n$.

En toute rigueur, on devrait choisir $L_n = (n-1)d + 2b$, b représentant les effets de bord; l'expérience montre que le choix b = d/2 est acceptable.

Couleur d'un ion linéaire dérivant d'un polyéthylène 1

- **1.1.** Quels sont les niveaux d'énergie ε_k d'un électron dans ce potentiel?
- **1.2.** À cause du principe de Pauli, les n+1 électrons ne peuvent pas se ranger à plus de deux par niveau d'énergie de l'hamiltonien à une particule. Quelles sont les énergies E_0 et E_1 de l'état fondamental et du premier état excité de l'ensemble des n+1 électrons ? On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

- 1.3. Quelle est la longueur d'onde λ_n de la lumière absorbée lors d'une transition de l'état fondamental au premier état excité?
- **1.4.** On observe expérimentalement que les ions n=9, n=11 et n=13absorbent respectivement dans le bleu ($\lambda_9 \simeq 4700 \text{ Å}$), le jaune orangé ($\lambda_{11} \simeq$ 6000 Å) et le rouge ($\lambda_{13} \simeq 7300$ Å). Le modèle développé aux questions

précédente en rend-il compte? Les ions correspondant à $N \leq 7$ ou $N \geq 15$ sont-ils colorés?

2 Couleur d'un ion azoté

On peut remplacer le groupement CH central par un atome d'azote pour former des ions azotés du type

$$(CH_2 \cdots CH \cdots N \cdots CH \cdots CH_2)^-$$
 (2)

La présence de l'atome d'azote ne change pas les distances interatomiques, mais perturbe le puits de potentiel indiqué ci-dessus. La modification consiste en une petite contribution $\delta V(x)$, attractive et localisée au voisinage de l'atome d'azote :

$$\delta V(x) = 0 \qquad \text{si } |x - L_n/2| > \alpha/2 ,$$

$$= -V_0 \qquad \text{si } |x - L_n/2| \le \alpha/2 ,$$

où $\alpha/d \ll 1$ et $V_0 > 0$.

- **2.1.** Exprimer par la méthode des perturbations au premier ordre la perturbation $\delta \varepsilon_k$ du niveau d'énergie ε_k d'un électron dans le puits. Calculer le résultat en se limitant, par commodité, au premier ordre du développement en α/d .
- **2.2.** On observe expérimentalement qu'à nombre d'atomes n égal, le spectre des ions azotés (2) est semblable à celui des ions (1), mais que les longueurs d'onde $\lambda_n^{\rm A}$ de (2) sont systématiquement plus courtes (déplacement « vers le bleu ») si n=4p+1, et plus longues (déplacement « vers le rouge ») si n=4p+3, que les valeurs λ_n^0 trouvées pour les hydrocarbures (1) correspondants. Expliquer ce phénomène. Montrer que $\lambda_n^{\rm A}$ et λ_n^0 sont reliées par

$$\frac{\lambda_n^0}{\lambda_n^A} = 1 - (-1)^{(n+1)/2} \gamma \frac{n}{n+2}$$
,

où γ est un paramètre à déterminer.

- **2.3.** L'ion azoté n=11 absorbe dans le rouge $(\lambda_{11}^{\rm A} \simeq 6700 \ {\rm Å})$. Vérifier que l'ion n=9 absorbe dans le violet $(\lambda_9^{\rm A} \simeq 4300 \ {\rm Å})$. Quelle est la couleur du pigment azoté n=13?
- **2.4.** Pour n suffisamment grand, si l'atome d'azote est placé non pas en position centrale, mais dans l'un des deux sites adjacents au centre de la chaîne, on observe un effet inverse à celui de la question 2.2 : décalage vers le rouge pour n=4p+1 et vers le bleu pour n=4p+3. Donner une explication simple de cet effet.

3 Corrigé

1. Couleur d'un ion linéaire dérivant d'un polyéthylène

1.1. Les niveaux d'énergie sont

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2 \hbar^2 k^2}{2mL_n^2} \qquad k = 1, 2...$$

 ${\bf 1.2.}\,$ L'énergie de l'état fondamental des n+1 électrons est

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m L_n^2} \sum_{k=1}^{(n+1)/2} k^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{24 m L_n^2} (n+1)(n+2)(n+3) .$$

L'énergie du premier état excité est

$$E_1 = E_0 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 m L_n^2} \left[(n+3)^2 - (n+1)^2 \right] = E_0 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m L_n^2} (n+2) .$$

1.3. On a $h\nu=E_1-E_0=\pi^2\hbar^2(n+2)/(2mL_n^2)$. Puisque $\lambda=c/\nu$, on obtient une longueur d'onde d'absorption

$$\lambda_n = \frac{8d^2}{\lambda_C} \, \frac{n^2}{n+2} \; .$$

1.4. À partir de la forme générale $\lambda_n=646,33$ $n^2/(n+2)$, on obtient $\lambda_9=4760$ Å, $\lambda_{11}=6020$ Å, $\lambda_{13}=7280$ Å, en bon accord avec l'expérience.

Pour n plus petit, les longueur d'onde $\lambda_7 = 3520$ Å et $\lambda_5 = 2310$ Å se situent dans l'ultraviolet. Les ions $n \leq 7$ n'absorbent pas dans le visible et ne sont pas colorés.

Pour $n \geq 15$, les longueurs d'onde $\lambda_{15} = 8550$ Å et $\lambda_{17} = 9830$ Å se situent dans l'infrarouge. Ces ions n'absorbent pas dans le visible lors de transitions de l'état fondamental vers le premier état excité. Ils sont néanmoins colorés par absorption dans des transitions vers des états plus excités.

2. Couleur d'un ion azoté

2.1. Les fonctions propres normalisées sont $\psi_k(x) = \sqrt{2/L_n} \sin{(k\pi x/L_n)}$. On a

$$\delta \varepsilon_k = \int \delta V(x) |\psi_k(x)|^2 dx = -V_0 \int_{L_n - \alpha/2}^{L_n + \alpha/2} |\psi_k(x)|^2 dx$$
.

Posons $y = x - L_n/2$; nous obtenons:

$$\delta \varepsilon_k = -\frac{2V_0}{L_n} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi y}{nd}\right) dy .$$

Deux cas sont à considérer :

- Si k est pair :

$$\delta \varepsilon_k = -\frac{2V_0}{L_n} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin^2\left(\frac{k\pi y}{nd}\right) dy$$
, soit $\delta \varepsilon_k = 0((\alpha/d)^3)$.

La perturbation est négligeable.

- Si k est impair :

$$\delta \varepsilon_k = -\frac{2V_0}{L_n} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos^2\left(\frac{k\pi y}{nd}\right) dy ,$$

soit, au premier ordre en α/d

$$\delta \varepsilon_k = -\frac{2V_0\alpha}{nd} < 0 \ .$$

Les formules exactes sont

$$\delta \varepsilon_k = -\frac{V_0}{L_n} \left[\alpha - (-1)^k \frac{L_n}{k\pi} \sin \left(\frac{k\pi\alpha}{L_n} \right) \right] .$$

Les niveaux (à une particule) correspondant à une valeur paire de k ne sont pratiquement pas affectés par la perturbation; seuls les niveaux correspondant à k impair sont déplacés. Cela se comprend fort bien : pour k pair, le milieu de la chaîne est un nœud de la fonction d'onde, et l'intégrale définissant $\delta \varepsilon_k$ est petite. Pour k impair, le centre de la chaîne est au contraire un ventre de $\psi_k(x)$ et l'intégrale est maximale.

2.2. La perturbation à l'énergie d'excitation $E_1 - E_0$ vue en question 1.2 est

$$\delta E = \delta \varepsilon_{(n+3)/2} - \delta \varepsilon_{(n+1)/2}$$

- Si (n+1)/2 pair, c'est-à-dire n=4p+3, $\delta\varepsilon_{(n+1)/2}=0$, soit

$$\delta E = \delta \varepsilon_{(n+3)/2} = -\frac{2V_0 \alpha}{nd} < 0$$
.

– Si (n+1)/2 impair, c'est-à-dire $n=4p+1, \delta \varepsilon_{(n+3)/2}=0$, soit

$$\delta E = -\delta \varepsilon_{(n+1)/2} = \frac{2V_0 \alpha}{nd} > 0$$
.

On peut écrire ces résultats sous forme compacte :

$$E_1 - E_0 + \delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m d^2} \frac{n+2}{n^2} \left(1 - (-1)^{(n+1)/2} \gamma \frac{n}{n+2} \right) ,$$

avec $\gamma = 4V_0 \alpha md/(\pi \hbar)^2$. On obtient donc la relation voulue

$$\frac{\lambda_n^0}{\lambda_n^A} = 1 - (-1)^{(n+1)/2} \gamma \frac{n}{n+2} .$$

Pour n=4p+1, la perturbation augmente l'énergie d'excitation, donc diminue λ_n . Pour n=4p+3, elle diminue l'énergie d'excitation, donc augmente λ_n .

lons moléculaires colorés 155

2.3. À partir de l'ion n=11, on a $1-11\gamma/13=6000/6700$, soit $\gamma\simeq 0,12$ et $\lambda_9^{\rm A}=4330$ Å, en bon accord avec l'expérience. On obtient également $\lambda_{13}^{\rm A}=6600$ Å, qui correspond à une absorption dans le rouge, donc à une coloration verte du pigment correspondant. On note que la présence de l'atome d'azote fait que $\lambda_{13}^{\rm A}<\lambda_{11}^{\rm A}$ alors que $\lambda_{13}^0>\lambda_{11}^0$.

2.4. La distance entre un nœud et un ventre de $\psi_k(x)$ est $\delta x = nd/(2k)$. Pour k = (n+1)/2 et k = (n+3)/2 qui sont les états qui nous intéressent, on aura respectivement $\delta x = nd/(n+1)$ et $\delta x = nd/(n+3)$, c'est-à-dire $\delta x \sim d$ si n est grand. Par conséquent, si ces fonctions d'onde ont un nœud au centre de la chaîne, elles ont un ventre au voisinage des deux sites adjacents au centre et vice versa. Le raisonnement est alors parfaitement semblable à celui des questions 2.1 et 2.2, avec des conséquences inversées. L'énergie d'excitation $E_1 - E_0$ est diminuée (déplacement vers le rouge) par la perturbation δV si n = 4p + 1. Elle est au contraire augmentée (déplacement vers le bleu) dans le cas inverse n = 4p + 3.

16. Etude d'une boîte quantique

On sait réaliser depuis quelques années des « boîtes quantiques », de dimensions nanométriques, qui confinent les électrons de conduction d'un solide à basse température. La possibilité de contrôler les états d'énergie d'un tel dispositif ouvre des perspectives très riches en micro- et en opto-électronique.

Une boîte quantique est constituée d'un matériau A jouant le rôle de puits, autour duquel on dépose un matériau B, qui forme une barrière de potentiel autour de A. Un ensemble de boîtes est présenté sur la figure 1 ci-dessous, qui montre des plots de In As (matériau A) déposés sur un substrat de Ga As (matériau B).

Nous nous intéressons dans ce problème au mouvement d'un électron dans une boîte bi-dimensionnelle. On note $q_e=-q$ la charge de l'électron (q>0) et on néglige tout effet associé au spin. On admettra que, dans un solide, la dynamique d'un électron est décrite par l'équation de Schrödinger usuelle, où :

- (i) la masse de l'électron est remplacée par une masse effective μ ,
- (ii) l'ensemble des atomes des matériaux A et B crée un potentiel effectif V(x,y) qui varie lentement à l'échelle atomique.

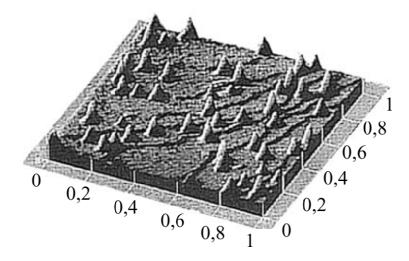


Fig. 1: Photographie par microscopie tunnel d'un ensemble de boîtes quantiques. Le côté du carré mesure 1 μ m et l'échelle verticale sera étudiée dans le problème.

1 Rappel: l'oscillateur harmonique uni-dimensionnel

Une particule de masse μ est soumise au potentiel harmonique $V(x)=\mu\omega^2x^2/2$. On rappelle la définition des opérateurs de création d'annihilation \hat{a}_x et de création \hat{a}_x^{\dagger} de l'oscillateur harmonique en fonction des opérateurs position \hat{x} et impulsion \hat{p}_x de la particule :

$$\hat{a}_x = \hat{x}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}} + i\frac{\hat{p}_x}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}} \qquad \qquad \hat{a}_x^{\dagger} = \hat{x}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}} - i\frac{\hat{p}_x}{\sqrt{2\hbar\mu\omega}} \ . \tag{1}$$

L'hamiltonien du problème s'écrit :

$$\hat{H}_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{n}_x + \frac{1}{2}\right)$$
 avec $\hat{n}_x = \hat{a}_x^{\dagger}\hat{a}_x$. (2)

On rappelle également que les valeurs propres de \hat{n}_x sont les entiers naturels. En notant $|n_x\rangle$ le vecteur propre associé à l'entier n_x , on a :

$$\hat{a}_x^{\dagger} | n_x \rangle = \sqrt{n_x + 1} | n_x + 1 \rangle \qquad \hat{a}_x | n_x \rangle = \sqrt{n_x} | n_x - 1 \rangle .$$
 (3)

1.1. On rappelle que la fonction d'onde de l'état fondamental est

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

Quelle est l'extension caractéristique ℓ_0 de la distribution en position d'un électron dans cet état ?

- **1.2.** La masse effective μ de l'électron dans la boîte quantique est $\mu=0.07~m_0$, où m_0 est la masse de l'électron libre. On suppose que $\hbar\omega=0.060~{\rm eV}$, soit $\omega/(2\pi)=1.45\times 10^{13}~{\rm Hz}$.
- (a) Evaluer numériquement ℓ_0 .
- (b) A une température de 10 K, quel est le nombre de niveaux de l'oscillateur ayant une population significative?
- (c) Quelle est la longueur d'onde d'absorption de rayonnement entre deux niveaux successifs?

2 La boîte quantique

On suppose que le potentiel effectif à deux dimensions vu par un électron dans la boîte quantique est :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 (x^2 + y^2) . {4}$$

On note $\hat{H}_0 = (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)/2\mu + V(x,y)$ l'hamiltonien de l'électron.

- **2.1.** On définit les opérateurs \hat{a}_y , \hat{a}_y^{\dagger} et \hat{n}_y d'une manière analogue à (1) et (2). Justifier que les états $|n_x, n_y\rangle$, qui sont états propre de \hat{n}_x et \hat{n}_y avec les valeurs propres entières n_x et n_y , forment une base propre de \hat{H}_0 . Donner les niveaux d'énergie E_N de \hat{H}_0 en fonction de n_x et n_y .
- **2.2.** Quelle est la dégénérescence g_N de chaque niveau E_N où $N=0,1,2\dots$?
- **2.3.** Exprimer l'opérateur $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y \hat{y}\hat{p}_x$ en fonction des opérateurs \hat{a}_x , \hat{a}_x^{\dagger} , \hat{a}_y , \hat{a}_y^{\dagger} .
- **2.4.** Ecrire l'action de \hat{L}_z sur les états propres $|n_x, n_y\rangle$ de \hat{H}_0 . Les états $|n_x, n_y\rangle$ ont-ils un moment cinétique L_z bien défini?
- ${\bf 2.5.}\,$ On s'intéresse maintenant à une autre base propre de \hat{H}_0 .
- (a) Montrer que \hat{H}_0 et \hat{L}_z commutent. Interpréter physiquement ce résultat.
- (b) On introduit les opérateurs d'annihilation « gauche » et « droit » :

$$\hat{a}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y) , \quad \hat{a}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y) ,$$
 (5)

et les opérateurs de création $\hat{a}_g^\dagger, \hat{a}_d^\dagger$ associés. Quelles sont les relations de commutation entre ces quatre opérateurs?

- (c) Montrer que $\hat{n}_g = \hat{a}_g^{\dagger} \hat{a}_g$ et $\hat{n}_d = \hat{a}_d^{\dagger} \hat{a}_d$ commutent. En utilisant la valeur des commutateurs $[\hat{a}_g, \hat{a}_g^{\dagger}]$ et $[\hat{a}_d, \hat{a}_d^{\dagger}]$, et en s'inspirant de la quantification de l'oscillateur harmonique habituel, justifier que les valeurs propres n_g et n_d de \hat{n}_g et \hat{n}_d sont des entiers. On admettra que $\{\hat{n}_g, \hat{n}_d\}$ forment un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC) pour le problème considéré et on notera $\{|n_g, n_d\rangle\}$ la base propre correspondante.
- (d) Écrire l'expression de \hat{n}_g et de \hat{n}_d en fonction de \hat{a}_x , \hat{a}_x^{\dagger} , \hat{a}_y et \hat{a}_y^{\dagger} . En déduire l'expression des opérateurs \hat{H}_0 et \hat{L}_z en fonction de \hat{n}_g et \hat{n}_d . Justifier ainsi que les états $|n_g, n_d\rangle$ forment une base propre commune à \hat{H}_0 et \hat{L}_z .
- (e) On note $m\hbar$ et E_N les valeurs propres de \hat{L}_z et de \hat{H}_0 . Quelles sont les valeurs permises pour le nombre quantique m dans un niveau d'énergie donné E_N ?
- (f) Représenter par des points dans le plan (L_z, E_N) , les couples de nombres quantiques (m, N) permis. Retrouver ainsi la dégénérescence des niveaux de \hat{H}_0 .
- **2.6.** On considère le sous-espace propre de \hat{H}_0 engendré par $|n_x=1,n_y=0\rangle$ et $|n_x=0,n_y=1\rangle$ définis à la question (1) de cette partie. Ecrire les états propres de \hat{L}_z dans cette base et donner les valeurs propres correspondantes.

3 Boîte quantique dans un champ magnétique

On applique sur la boîte quantique un champ magnétique uniforme B, parallèle à l'axe z. Ce champ dérive du potentiel vecteur $A(r) = -(yB/2)u_x + (xB/2)u_y$ où u_x et u_y sont les vecteurs unitaires le long de x et y. L'hamiltonien de l'électron dans la boîte quantique est alors :

$$\hat{H}_B = \frac{1}{2\mu} (\hat{p}_x + qA_x(\hat{r}))^2 + \frac{1}{2\mu} (\hat{p}_y + qA_y(\hat{r}))^2 + \frac{1}{2\mu} \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) ,$$

avec, comme d'habitude, $[\hat{x},\hat{p}_x]=[\hat{y},\hat{p}_y]=i\hbar$ et $[\hat{x},\hat{p}_y]=[\hat{y},\hat{p}_x]=0$. On introduit la fréquence cyclotron $\omega_c=qB/\mu$, avec $\omega_c>0$.

- **3.1.** Développer \hat{H}_B et montrer que l'on peut toujours trouver une base du système pour laquelle énergie totale et moment cinétique selon z sont simultanément bien déterminés.
- **3.2.** On pose $\Omega=\sqrt{\omega^2+\omega_c^2/4}$. En redéfinissant de nouveaux opérateurs semblables à ceux de la partie 2, donner les niveaux d'énergie E_{n_g,n_d} du système à partir des deux entiers n_q et n_d .
- **3.3.** Pour simplifier, on soustrait aux énergies E_{n_g,n_d} l'énergie de point zéro $\hbar\Omega$ et on pose $\tilde{E}_{n_g,n_d}=E_{n_g,n_d}-\hbar\Omega$.
- (a) Donner l'expression approximative des niveaux \tilde{E}_{n_g,n_d} en champ faible et en champ fort, en définissant ces deux régimes.
- (b) Tracer, en fonction du champ magnétique, la position des niveaux \tilde{E}_{n_g,n_d} issus des niveaux N=0,1,2 en l'absence de champ.
- (c) Montrer que deux de ces niveaux se croisent pour une valeur de B telle que $\omega_c = \omega/\sqrt{2}$ et préciser lesquels.
- **3.4.** On suppose dans toute la suite de ce problème que $\omega_c < \omega/\sqrt{2}$. En reprenant les valeurs de ω et de la masse effective μ données dans la partie § 1 du problème, déterminer les valeurs du champ magnétique correspondant à cette inégalité.
- 3.5. Montrer que les trois premiers états propres de \hat{H}_B ont pour énergie

$$E_0 = \hbar\Omega$$
, $E_- = 2\hbar\Omega - \frac{\hbar\omega_c}{2}$, $E_+ = 2\hbar\Omega + \frac{\hbar\omega_c}{2}$.

On note $|u_0\rangle, |u_-\rangle, |u_+\rangle$ les trois états propres correspondants. Quelle est la valeur du moment cinétique L_z de l'électron dans ces états?

4 Etude expérimentale

L'étude des niveaux d'énergie d'un électron dans une boîte quantique se fait par spectroscopie : on mesure l'absorption d'un faisceau lumineux en fonction de sa fréquence. Des pics d'absorption apparaissent aux fréquences

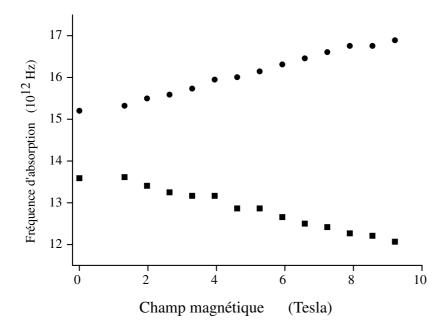


Fig. 2: Fréquence $\nu=\omega/2\pi$ des deux premiers pics d'absorption d'une boîte quantique, en fonction du champ magnétique B.

de Bohr $(E_f - E_i)/h$ de la boîte, correspondant à une excitation qui porte l'électron d'un niveau $|u_i\rangle$ vers un niveau final $|u_f\rangle$.

- **4.1.** A une température de 10 K, on constate que seul le niveau $|u_i\rangle = |u_0\rangle$ contribue de manière significative au signal d'absorption. Justifier ce fait à partir du résultat de la question § 1.2.
- **4.2.** La valeur expérimentale des fréquences des deux premiers pics d'absorption d'une boîte quantique est présentée sur la figure 2 pour différentes valeurs du champ magnétique. Vérifier que le modèle développé précédemment permet de retrouver la pente de ces deux courbes pour des valeurs suffisamment élevées de B, mais pas le comportement à l'origine.

4.3. Rôle de la dimension z.

Le confinement dans la direction z peut être modélisé par un puits carré infini de taille D.

- (a) Rappeler les niveaux d'énergie d'une particule de masse μ dans un puits infini de largeur D. Quel est l'écart entre les deux niveaux les plus bas?
- (b) A quelle condition reliant D et ω est-il légitime de considérer que le mouvement de l'électron selon z est « gelé », et que l'on peut ne s'intéresser qu'aux premiers niveaux du mouvement harmonique dans le plan x,y?

(c) Sur la photo 1, l'échelle de la direction verticale n'est pas la même que l'échelle dans le plan xy. Pour que l'approximation consistant à ignorer le mouvement selon z soit valide, faut-il que cette échelle soit dilatée ou contractée? On se servira de la valeur de l_0 calculée en (1.2).

5 Anisotropie d'une boîte quantique

Pour rendre compte de la position des pics d'absorption aux faibles champs magnétiques (figure 2), on suppose que le confinement de l'électron dans la boîte quantique est légèrement anisotrope. On remplace donc l'expression (4) du potentiel de confinement par :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\mu\omega^2(1+\epsilon)x^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2(1-\epsilon)y^2 \quad \text{avec} \quad \epsilon \ll 1. \quad (6)$$

On traite le problème perturbativement. On suppose dans la suite que le champ magnétique est petit $(\omega_c \ll \omega)$. L'hamiltonien $\hat{H}_{B,\epsilon}$ s'écrit alors :

$$\hat{H}_{B,\epsilon} = \hat{H}_0 + \hat{W} ,$$

avec

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) , \qquad \hat{W} = \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z + \epsilon \frac{\mu\omega^2}{2}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) .$$

Dans cette expression, \hat{W} constitue la perturbation, et nous négligeons les termes en B^2 . On travaillera dans la base $\{|n_x, n_y\rangle\}$.

- **5.1.** En utilisant la forme du potentiel donnée dans l'équation (6), déterminer les niveaux d'énergie de l'électron quand B=0.
- **5.2.** En appliquant la théorie des perturbations, évaluer au premier ordre en B et en ϵ le déplacement du niveau fondamental de la boîte quantique, par rapport à la valeur déterminée en partie 2.
- **5.3.** On s'intéresse maintenant à la position des deux états d'énergie issus du premier niveau excité de \hat{H}_0 trouvé en partie 2.
- (a) Écrire la restriction de l'hamiltonien $H_{B,\epsilon}$ dans la base $\{|n_x=1,n_y=0\rangle,\,|n_x=0,n_y=1\rangle\}$ de ce sous-espace.
- (b) En déduire l'expression approchée des énergies recherchées $E_{-}(B, \epsilon)$ et $E_{+}(B, \epsilon)$ (avec $E_{-} < E_{+}$).
- (c) Donner l'expression des états propres correspondants $|u_{-}(B,\epsilon)\rangle$ et $|u_{+}(B,\epsilon)\rangle$. On introduira l'angle α tel que $\tan(2\alpha) = \omega_c/(\epsilon\omega)$.
- **5.4.** On reprend l'étude des données expérimentales de la figure 2.
- (a) La transition de la région des grandes valeurs de B vers B=0 est-elle correctement décrite par ce modèle de boîte quantique anisotrope?
- (b) Quelle valeur de l'anisotropie ϵ déduit-on de la position des deux premiers pics d'absorption en champ nul?

6 Corrigé

1. L'oscillateur harmonique uni-dimensionnel

- **1.1.** L'extension caractéristique de la distribution en position est $\ell_0 = \sqrt{\hbar/(\mu\omega)}$. Plus précisément $\ell_0/\sqrt{2}$ représente l'écart-type de la loi de probabilité $|\psi_0(x)|^2$ pour la distribution en position.
- **1.2.** (a) On trouve une distance caractéristique $\ell_0 = 4,3$ nm.
- (b) Le rapport entre les populations du premier niveau excité n=1 et du niveau fondamental n=0 est donné par la loi de Boltzmann

$$r = \exp(-\hbar\omega/(k_B T)) = \exp(-70) = 5 \times 10^{-31}$$
,

ce qui est négligeable. La population des autres niveaux excités est encore plus faible (la population du niveau n est le nième terme de la suite géométrique de raison r). Par conséquent, à T=10 K, le seul niveau peuplé est le niveau fondamental.

(c) On trouve $\lambda=2\pi c/\omega=21~\mu\mathrm{m},$ qui correspond à un rayonnement infrarouge.

2. La boîte quantique

- **2.1.** L'hamiltonien s'écrit $\hat{H}_0 = \hbar \omega(\hat{n}_x + \hat{n}_y + 1)$, et les opérateurs \hat{n}_x et \hat{n}_y commutent. On peut donc chercher une base propre commune à ces deux opérateurs. Dire d'une fonction $\Psi(x,y)$ qu'elle est état propre de \hat{n}_x précise complètement sa dépendance en x (fonction de Hermite de la variable $x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, correspondant à $|n_x\rangle$). De même, le fait que $\Psi(x,y)$ soit état propre de \hat{n}_y précise complètement sa dépendance en y (fonction de Hermite de la variable $y\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, correspondant à $|n_y\rangle$). L'ensemble $\{\hat{n}_x,\hat{n}_y\}$ forme donc un ECOC, de base propre $|n_x,n_y\rangle$. Cette base est également base propre de \hat{H}_0 , la valeur propre associée à $|n_x,n_y\rangle$ étant $E_N=\hbar\omega(N+1)$ avec $N=n_x+n_y$.
- **2.2.** Le niveau d'énergie $E_N = \hbar \omega(N+1)$ correspond à N+1 couples possibles pour $(n_x, n_y) : (N, 0), (N-1, 1), \ldots, (0, N)$. On trouve donc la dégénérescence $g_N = N+1$.
- **2.3.** On remplace $\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y$ par leur valeur :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \left(\hat{a}_x^{\dagger} + \hat{a}_x \right) \qquad \hat{p}_x = i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}} \left(\hat{a}_x^{\dagger} - \hat{a}_x \right) \qquad \dots$$

ce qui conduit à :

$$\hat{L}_z = \frac{i\hbar}{2} \left(\left(\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x \right) \left(\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y \right) - \left(\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y \right) \left(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x \right) \right) = i\hbar \left(\hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \right) .$$

2.4. En utilisant l'action des opérateurs création et annihilation, on trouve :

$$\hat{L}_z |n_x, n_y\rangle = i\hbar \Big(\sqrt{n_x(n_y+1)} |n_x - 1, n_y + 1\rangle$$
$$-\sqrt{(n_x+1)n_y} |n_x + 1, n_y - 1\rangle \Big) .$$

Un état $|n_x,n_y\rangle$ n'est en général pas état propre de \hat{L}_z et n'a donc pas un moment cinétique bien défini. La seule exception est l'état obtenu pour $n_x=n_y=0$, et pour lequel on trouve $\hat{L}_z|0,0\rangle=0$; c'est donc un état de moment cinétique L_z nul.

2.5. Recherche d'une autre base propre de \hat{H}_0 .

(a) Le commutateur de \hat{H}_0 et \hat{L}_z peut être évalué à partir de leur expression en termes des opérateurs création et annihilation. On calcule d'abord $[\hat{n}_x, \hat{a}_x^{\dagger}] = \hat{a}_x^{\dagger}$ et $[\hat{n}_x, \hat{a}_x] = -\hat{a}_x$, et des relations équivalentes pour y. On en déduit :

$$\begin{split} [\hat{H}_{0}, \hat{L}_{z}] &= i\hbar^{2}\omega \; [\hat{n}_{x} + \hat{n}_{y}, \hat{a}_{x}\hat{a}_{y}^{\dagger} - \hat{a}_{x}^{\dagger}\hat{a}_{y}] \\ &= i\hbar^{2}\omega \; \left([\hat{n}_{x}, \hat{a}_{x}]a_{y}^{\dagger} - [\hat{n}_{x}, \hat{a}_{x}^{\dagger}]\hat{a}_{y} + \hat{a}_{x}[\hat{n}_{y}, a_{y}^{\dagger}] - \hat{a}_{x}^{\dagger}[\hat{n}_{y}, \hat{a}_{y}] \right) \\ &= i\hbar^{2}\omega \; \left(-\hat{a}_{x}a_{y}^{\dagger} - \hat{a}_{x}^{\dagger}\hat{a}_{y} + \hat{a}_{x}a_{y}^{\dagger} + \hat{a}_{x}^{\dagger}\hat{a}_{y} \right) \\ &= 0 \; . \end{split}$$

Ce résultat est la conséquence de l'invariance par rotation autour de l'axe z du potentiel V(x,y). On aurait d'ailleurs pu le démontrer en utilisant l'expression en coordonnées polaires $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ de \hat{L}_z , qui commute avec les deux contributions à \hat{H}_0 (énergie cinétique et énergie potentielle).

(b) Il y a quatre opérateurs et donc six relations de commutation à considérer. On remarque d'abord que deux opérateurs de création commutent toujours entre eux, ainsi que deux opérateurs de destruction. Par conséquent :

$$[\hat{a}_g^{\dagger}, \hat{a}_d^{\dagger}] = 0 , \qquad [\hat{a}_g, \hat{a}_d] = 0 .$$

Par ailleurs, un calcul simple donne :

Enfin on trouve:

$$\begin{split} \left[\hat{a}_g, \hat{a}_d^\dagger \right] &= & \frac{1}{2} [\hat{a}_x + i \hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger + i \hat{a}_y^\dagger] = \frac{1}{2} [\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] - \frac{1}{2} [\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = 0 \ , \\ \left[\hat{a}_d, \hat{a}_g^\dagger \right] &= & \frac{1}{2} [\hat{a}_x - i \hat{a}_y, \hat{a}_x^\dagger - i \hat{a}_y^\dagger] = \frac{1}{2} [\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] - \frac{1}{2} [\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = 0 \ . \end{split}$$

Il y a donc commutation entre un opérateur « gauche » et un opérateur « droit » quelconques. Les relations de commutation entre opérateurs de création et d'annihilation « gauche » (ou « droit ») sont les mêmes que celles trouvées pour un oscillateur 1D.

- (c) La commutation des opérateurs hermitiens \hat{n}_g et de \hat{n}_d est immédiate, puisque tout opérateur gauche commute avec tout opérateur droit. On peut donc trouver une base de vecteurs propres communs à ces deux opérateurs. D'autre part, la quantification de l'oscillateur harmonique 1D est fondée uniquement sur la relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$, qui entraîne que les valeurs propres de $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ sont les entiers positifs ou nuls. Il en va de même ici avec les opérateurs \hat{n}_g et \hat{n}_d , les valeurs propres associées étant les couples d'entiers (n_g, n_d) . Comme suggéré par l'énoncé, nous admettrons pour le moment que la base propre commune à \hat{n}_g et \hat{n}_d est unique, et nous noterons $|n_g, n_d\rangle$ le vecteur propre associé au couple de valeurs propres (n_g, n_d) .
- (d) On trouve:

$$\begin{split} \hat{n}_g &= \frac{1}{2} (\hat{a}_x^\dagger - i \hat{a}_y^\dagger) \left(\hat{a}_x + i \hat{a}_y \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{n}_x + \hat{n}_y + i (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar \omega} - 1 - \frac{\hat{L}_z}{\hbar} \right) \; , \\ \hat{n}_d &= \frac{1}{2} (\hat{a}_x^\dagger + i \hat{a}_y^\dagger) \left(\hat{a}_x - i \hat{a}_y \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{n}_x + \hat{n}_y - i (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{H}_0}{\hbar \omega} - 1 + \frac{\hat{L}_z}{\hbar} \right) \; , \end{split}$$

soit

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(\hat{n}_g + \hat{n}_d + 1\right) , \quad \hat{L}_z = \hbar \left(\hat{n}_d - \hat{n}_g\right) .$$

Les opérateurs \hat{H}_0 et \hat{L}_z peuvent s'exprimer en fonction des opérateurs \hat{n}_g et \hat{n}_d uniquement. La base propre commune à \hat{n}_g et \hat{n}_d est donc également une base propre commune à \hat{H}_0 et \hat{L}_z .

- (e) Le vecteur $|n_g,n_d\rangle$ est état propre de \hat{H}_0 et de \hat{L}_z , avec les valeurs propres $E=\hbar\omega(n_g+n_d+1)$ et $L_z=\hbar(n_d-n_g)$. On a donc $N=n_g+n_d$ et $m=n_d-n_g$. On retrouve bien des valeurs entières pour le moment cinétique orbital, comme attendu. Pour N fixé, la valeur de m appartient à l'ensemble $\{-N,-N+2,\ldots,N-2,N\}$, soit N+1 valeurs possibles. On note que, dans un niveau d'énergie E_N , m a la même parité que N. Cela provient de l'invariance par parité du problème considéré.
- (f) La représentation graphique est donnée sur la figure 3. Sur une ligne horizontale donnée, correspondant à une valeur de l'énergie, on trouve N+1 points, ce qui correspond précisément à la dégénérescence d'un niveau d'énergie de \hat{H}_0 trouvée précédemment. Ceci justifie a posteriori le fait que $\{\hat{n}_g, \hat{n}_d\}$ forme un ECOC. Si deux états distincts du système correspondaient

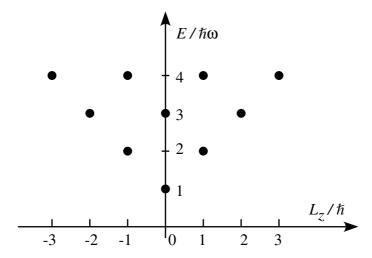


Fig. 3: Nombres quantiques autorisés pour le couple L_z, E .

au même couple de valeurs propres (n_g,n_d) , le point correspondant du diagramme serait de dégénérescence 2, et la dégénérescence du niveau d'énergie E_N serait supérieure à N+1.

2.6. D'après ce qui précède, on sait que l'on doit trouver dans ce sous-espace deux vecteurs propres de \hat{L}_z correspondant aux deux valeurs propres $\pm\hbar$. Une première méthode pour trouver ces vecteurs propres consiste à calculer l'action de \hat{L}_z sur les vecteurs de la base $\{|n_x,n_y\rangle\}$. En utilisant l'expression \hat{L}_z en fonction de $\hat{a}_x,\hat{a}_y,\ldots$, on trouve :

$$\hat{L}_z | n_x = 1, n_y = 0 \rangle = i\hbar | n_x = 0, n_y = 1 \rangle$$

 $\hat{L}_z | n_x = 0, n_y = 1 \rangle = -i\hbar | n_x = 1, n_y = 0 \rangle$,

soit la matrice 2 × 2 à diagonaliser : $\begin{pmatrix} 0 & -i\hbar \\ i\hbar & 0 \end{pmatrix}$.

Les états propres associés aux valeurs propres $\pm \hat{h}$ sont donc :

$$(|n_x = 1, n_y = 0\rangle \pm i|n_x = 0, n_y = 1\rangle)/\sqrt{2}$$
.

Une autre méthode consiste à partir de l'état fondamental $|n_g=0,n_d=0\rangle$ et à faire agir sur cet état : (i) l'opérateur \hat{a}_d^\dagger pour obtenir l'état propre d'énergie $2\hbar\omega$ et de moment cinétique $+\hbar$, (ii) l'opérateur \hat{a}_g^\dagger pour obtenir l'état propre d'énergie $2\hbar\omega$ et de moment cinétique $-\hbar$. On retrouve bien sûr le résultat précédent.

3. Boîte quantique dans un champ magnétique

3.1. En développant \hat{H}_B , on trouve :

$$\hat{H}_B = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2\mu} + \left(\frac{\mu\omega^2}{2} + \frac{q^2B^2}{8}\right)(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \frac{\omega_c \hat{L}_z}{2} .$$

3.2. Si l'on pose $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2/4}$, on peut récrire $\hat{H}_B = \hat{H}_0^{(\Omega)} + \omega_c \hat{L}_z/2$, où $\hat{H}_0^{(\Omega)}$ est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique bi-dimensionnel de fréquence Ω :

$$\hat{H}_0^{(\Omega)} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{\mu\Omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \ .$$

On peut alors reprendre le traitement de la partie précédente, en remplaçant ω par Ω dans la définition des opérateurs \hat{a}_x , \hat{a}_y ,... On construit alors une base propre commune à $H_0^{(\Omega)}$ et \hat{L}_z , que l'on notera encore $\{|n_g,n_d\rangle\}$, les valeurs propres respectives étant $\hbar\Omega(n_g+n_d+1)$ et $m\hbar$. Chaque vecteur $|n_g,n_d\rangle$ est également état propre de \hat{H}_B , correspondant à l'énergie :

$$E_{n_g,n_d}=\hbar\Omega(n_g+n_d+1)+\hbar\omega_c(n_d-n_g)/2=\hbar(\Omega+\frac{\omega_c}{2})n_d+\hbar(\Omega-\frac{\omega_c}{2})n_g+\hbar\Omega\;.$$

3.3. (a) Deux régimes extrêmes de champ magnétique peuvent être considérés, correspondant aux deux cas limites $\omega_c \ll \omega$ (champ magnétique très faible) et $\omega_c \gg \omega$ (champ magnétique très fort). Dans le premier cas, on a au premier ordre en B:

$$\tilde{E}_{n_q,n_d} \simeq \hbar\omega(n_q + n_d) + \hbar\omega_c(n_d - n_q)/2$$
,

ce qui correspond à une variation linéaire avec B des N+1 niveaux issus du niveau E_N en champ nul. La pente $(\hbar q B/(2\mu) \ (n_d-n_g)$ est différente pour chaque niveau, ce qui signifie que la dégénérescence est totalement levée si B est non nul.

Pour des champs forts, on trouve :

$$\Omega + \frac{\omega_c}{2} \simeq \omega_c \; , \quad \Omega - \frac{\omega_c}{2} \simeq \frac{\omega^2}{\omega_c} \ll \omega \; .$$

On a donc:

$$\tilde{E}_{n_g,n_d} \simeq \hbar \omega_c n_d \quad \text{si} \quad n_d \neq 0 \; , \qquad \text{et} \qquad \tilde{E}_{n_g,0} \simeq \frac{\hbar \omega^2}{\omega_c} n_g \; .$$

Pour n_d non nul, le niveau d'énergie croît linéairement avec B, avec une pente proportionnelle à n_d . Pour $n_d = 0$, l'énergie \tilde{E} tend vers 0 comme 1/B.

(b) Les niveaux d'énergie \tilde{E}_{n_g,n_d} issus de N=0,1,2 sont représentés sur la figure 4.

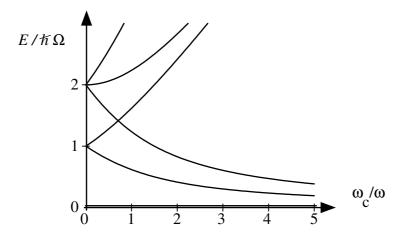


Fig. 4: Variation des niveaux d'énergie \tilde{E}_{n_g,n_d} issus de N=0,1,2 en fonction du champ magnétique B.

(c) On constate sur la figure 4 que les niveaux $n_g=2, n_d=0$ et $n_g=0, n_d=1$ se croisent. Le champ B correspondant est donné par la solution de l'équation :

$$\Omega + \frac{\omega_c}{2} = 2\left(\Omega - \frac{\omega_c}{2}\right) ,$$

soit $3\omega_c = 2\Omega$, ou encore $\omega_c = \omega/\sqrt{2}$.

3.4. Le champ B correspondant à l'égalité $\omega_c=\omega/\sqrt{2}$ vaut $\mu\omega/(q\sqrt{2})\simeq 26$ T.

3.5. Si on suppose que le champ B est inférieur à 21 T, les trois premiers niveaux d'énergie de \hat{H}_B correspondent à $n_g=n_d=0$ (niveau fondamental, d'énergie $\hbar\Omega$), $n_g=1, n_d=0$ (énergie $2\hbar\Omega-\hbar\omega_c/2$), et $n_g=0, n_d=1$ (énergie $2\hbar\Omega+\hbar\omega_c/2$). Ces trois états sont états propres de \hat{L}_z avec la valeur propre $0,-\hbar$ et \hbar respectivement.

4. Etude expérimentale

4.1. Pour un champ magnétique nul, on a vu à la question 1.2 que seul le niveau $n_x=n_y=0$ était appréciablement peuplé pour T=10 K. Quand le champ magnétique croît, l'écart en énergie entre le niveau fondamental et le premier niveau excité diminue, mais reste très grand devant k_BT si ω_c reste inférieur à $\omega/\sqrt{2}$. Pour $\omega_c=\omega/\sqrt{2}$, cet écart vaut $\hbar\omega/\sqrt{2}$. Le rapport entre la population du premier état excité et du niveau fondamental vaut donc en ce point $r'=\exp(-49)=3.7\times 10^{-22}$.

Puisque seul le niveau fondamental est peuplé, toutes les raies d'absorption détectables auront comme état de départ ce niveau.

4.2. Les deux premiers pics d'absorption correspondent aux transitions $|u_0\rangle \leftrightarrow |u_-\rangle$ et $|u_0\rangle \leftrightarrow |u_+\rangle$. Les fréquences correspondantes ν_\pm sont telles que :

$$\nu_{\pm} = \frac{\Omega}{2\pi} \pm \frac{\omega_c}{4\pi} \ .$$

Le domaine de champ B exploré dans la figure expérimentale de l'énoncé correspond à des valeurs ω_c petites devant ω . On peut donc utiliser le développement en champ faible de la question 3.3 pour simplifier cette expression :

$$\nu_{\pm} = \frac{\omega}{2\pi} \pm \frac{\omega_c}{4\pi} \ .$$

On attend donc *a priori* que les fréquences ν_{\pm} varient linéairement avec B, les pentes étant $\pm q/(4\pi\mu)$, et les deux droites se coupant en champ nul à la fréquence $\omega/(2\pi)$.

Cette variation linéaire de ν_{\pm} apparaît effectivement sur la figure de l'énoncé pour les valeurs les plus élevées de B et la pente que l'on mesure est voisine de celle attendue (2 × 10^{11} Hz.T⁻¹). En revanche le comportement trouvé expérimentalement en champ très faible ne correspond pas à notre prédiction théorique. Au lieu de trouver deux raies de même fréquence pour B=0, on mesure un écart $\nu_+ - \nu_-$ non nul.

4.3. Rôle de la dimension z.

- (a) Les niveaux d'énergie dans un puits carré infini de taille D sont donnés par $E_n = \pi^2 \hbar^2 n^2 / (2\mu D^2)$, avec n entier strictement positif, les états propres correspondants étant les fonctions $\chi_n(z) \propto \sin(n\pi z/D)$. L'écart entre le niveau fondamental et le premier niveau excité est $\Delta E = 3\pi^2 \hbar^2 / (2\mu D^2)$.
- (b) Pour considérer que le mouvement selon z est « gelé », il faut que l'écart en énergie ΔE entre les deux premiers niveaux du puits carré soit très grand devant $\hbar \omega$. Si cette condition est satisfaite, les états accessibles à l'électron confiné dans la boîte quantique (dans un domaine raisonnable de température et de longueur d'onde excitatrice) sont simplement des combinaisons des vecteurs $|n_x,n_y\rangle\otimes|\chi_0\rangle$. Il est alors légitime de négliger complètement la dynamique de l'électron selon 0z. Au contraire, si cette condition n'est pas vérifiée, il pourra apparaître dans le spectre d'absorption des raies de fréquence voisine de celles présentées sur la figure expérimentale, et correspondant à l'excitation du mouvement selon z. La condition de « gel » du mouvement selon z s'écrit :

$$\frac{3\pi^2\hbar^2}{2\mu D^2} \gg \hbar\omega$$
 , soit $D \ll \pi\ell_0$. (7)

(c) Pour que l'approximation harmonique du mouvement transverse soit valable, il faut que l'extension transverse ΔL de la boîte quantique soit grande devant ℓ_0 . La condition obtenue à la question précédente $D \ll \pi \ell_0$, jointe à $\ell_0 \ll \Delta L$, impose que la boîte ait une géométrie très aplatie : la hauteur D selon z doit être très petite devant son extension transverse en xy. On en déduit que l'échelle verticale de la photographie présentée dans l'énoncé est très dilatée.

5. Anisotropie d'une boîte quantique

5.1. Pour B nul, l'hamiltonien s'écrit $\hat{H}_x + \hat{H}_y$ avec :

$$\hat{H}_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(1+\epsilon)\hat{x}^2 , \quad \hat{H}_y = \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(1-\epsilon)\hat{x}^2 .$$

On peut trouver une base propre commune à \hat{H}_x et à \hat{H}_y , correspondant aux produits des fonctions de Hermite de la variable $x\sqrt{\mu\omega(1+\epsilon)/\hbar}$ par les fonctions de Hermite de la variable $y\sqrt{\mu\omega(1-\epsilon)/\hbar}$. Les valeurs propres correspondantes s'écrivent :

$$\hbar\omega\sqrt{1+\epsilon} \left(n_x+1/2\right) + \hbar\omega\sqrt{1-\epsilon} \left(n_y+1/2\right) \simeq \hbar\omega \left(n_x+n_y+1\right) + \frac{\epsilon\hbar\omega}{2} \left(n_x-n_y\right)$$

où n_x , n_y sont deux entiers positifs ou nuls.

5.2. Au premier ordre en B et ϵ , le déplacement du niveau d'énergie fondamental est donné par l'élément de matrice :

$$\Delta E_{0,0} = \langle 0, 0 | \hat{W} | 0, 0 \rangle = \frac{\omega_c}{2} \langle 0, 0 | \hat{L}_z | 0, 0 \rangle + \frac{\epsilon \mu \omega^2}{2} \langle 0, 0 | \hat{x}^2 - \hat{y}^2 | 0, 0 \rangle.$$

L'état $|0,0\rangle$ est état propre de \hat{L}_z avec la valeur propre 0. Le premier terme de cette somme est donc nul. D'autre part, on a par symétrie $\langle 0,0|\hat{x}^2|0,0\rangle = \langle 0,0|\hat{y}^2|0,0\rangle$, ce qui entraı̂ne que le second terme est également nul. Le déplacement du niveau fondamental est donc nul, au premier ordre en ϵ et B.

5.3. (a) On a déjà déterminé la matrice de \hat{L}_z dans la base considérée à la question §2.6. Il reste à calculer la matrice de \hat{x}^2 et \hat{y}^2 . Pour cela, le plus simple est d'utiliser l'expression de \hat{x} et \hat{y} en termes d'opérateurs création et annihilation. On a :

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^{\dagger})(\hat{a}_x + \hat{a}_x^{\dagger}) ,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{array}{lcl} \langle 1,0|\hat{x}^2|1,0\rangle & = & \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle 1,0|\hat{a}_x^{\dagger}\hat{a}_x+\hat{a}_x\hat{a}_x^{\dagger}|1,0\rangle \\ & = & \frac{\hbar}{2\mu\omega}(1+2)=\frac{3\hbar}{2\mu\omega} \; , \\ \langle 1,0|\hat{x}^2|0,1\rangle & = & \langle 0,1|\hat{x}^2|1,0\rangle = 0 \; , \\ \langle 0,1|\hat{x}^2|0,1\rangle & = & \frac{\hbar}{2\mu\omega}\langle 0,1|\hat{a}_x\hat{a}_x^{\dagger}|0,1\rangle \\ & = & \frac{\hbar}{2\mu\omega} \; , \end{array}$$

où on a posé pour simplifier $|0,1\rangle \equiv |n_x=0,n_y=1\rangle$, etc. On obtient un résultat similaire en échangeant les rôles de x et y. La restriction de $\hat{H}_{B,\epsilon}$ au sous-espace considéré s'écrit alors :

$$[\hat{H}_{B,\epsilon}] = 2\hbar\omega + \frac{\hbar}{2} \left(\begin{array}{cc} \epsilon\,\omega & -i\omega_c \\ i\omega_c & -\epsilon\,\omega \end{array} \right) \; .$$

(b) Les énergies propres sont obtenues par diagonalisation de cette matrice 2×2 :

$$E_{\pm}(B,\epsilon) = 2\hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \omega_c^2}$$
.

(c) En posant $\tan 2\alpha = \omega_c/(\epsilon \omega)$, la matrice précédente s'écrit :

$$[\hat{H}_{B,\epsilon}] = 2\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \omega_c^2} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -i\sin 2\alpha \\ i\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} ,$$

dont les vecteurs propres sont :

$$|u_{-}(B,\epsilon)\rangle = \begin{pmatrix} i\sin\alpha\\\cos\alpha \end{pmatrix}$$
 $|u_{+}(B,\epsilon)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha\\i\sin\alpha \end{pmatrix}$.

- **5.4.** (a) La variation de $E_{\pm}(B,\epsilon)-E_{0,0}$ avec B reproduit bien les observations expérimentales. Pour les valeurs relativement grandes de B, telles que $\epsilon \omega \ll \omega_c$, on retrouve la variation linéaire des deux fréquences de transition avec B. Quand B tend vers 0, ($\omega_c \ll \epsilon \omega$), on trouve deux fréquences de Bohr distinctes correspondant aux deux transitions possibles $n_x = n_y = 0 \rightarrow n_x = 0$, $n_y = 1$ et $n_x = n_y = 0 \rightarrow n_x = 1$, $n_y = 0$.
- (b) Quand B tend vers 0, on trouve expérimentalement que la limite de $(\nu_+ \nu_-)/(\nu_+ + \nu_-)$ est de l'ordre de 0,06. La prédiction théorique pour ce rapport est de $\epsilon/2$. On en déduit donc $\epsilon \simeq 0,12$.

Remarques complémentaires.

Les boîtes quantiques de semi-conducteurs, dont un modèle simple a été développé dans ce problème, font l'objet de nombreux travaux de recherche, tant académiques (corrélations de Coulomb) qu'appliqués (opto-électronique). Il n'a été question ici que d'excitations électroniques, mais les modes collectifs de vibration des atomes du réseau (phonons) jouent également un rôle important dans la dynamique de ces boîtes. Il a été récemment montré expérimentalement et théoriquement que ces deux types d'excitation sont très fortement couplés. Cela contraste avec la situation rencontrée dans les semi-conducteurs usuels, pour lesquels électrons et phonons sont en couplage faible.

Les données expérimentales du problème sont extraites de l'article de S. Hameau *et al*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4152 (1999).

17. La manipulation d'atomes par laser

En éclairant une assemblée d'atomes ou d'ions avec de la lumière laser, il est possible de refroidir ou de piéger ces particules. Nous étudions dans ce problème un mécanisme de refroidissement simple, fondé sur l'effet Doppler, et nous calculons sa température limite. Nous montrons ensuite que les atomes refroidis peuvent être confinés dans le puits de potentiel créé par un faisceau laser focalisé.

Nous considérons ici un atome « à deux niveaux », dont les états sont notés $|g\rangle$ (état fondamental) et $|e\rangle$ (état excité). Leurs énergies sont respectivement 0 et $\hbar\omega_0$. Cet atome interagit avec une onde électromagnétique de fréquence $\omega_L/2\pi$. On décrit cette onde par la physique classique ; pour un atome localisé en r, l'hamiltonien est donc :

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 |e\rangle \langle e| - \mathbf{d} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|e\rangle \langle g| + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)|g\rangle \langle e|) , \qquad (1)$$

où \boldsymbol{d} représente l'élément de matrice (supposé réel) de l'opérateur dipole électrique atomique entre les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ (c'est-à-dire $\boldsymbol{d}=\langle e|\hat{\boldsymbol{D}}|g\rangle=\langle g|\hat{\boldsymbol{D}}|e\rangle^*$). La quantité $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*$ représente le champ électrique au point \boldsymbol{r} . On pose

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \exp(-i\omega_L t)$$
.

Dans tout le problème, on suppose que le désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_0$ est petit devant ω_L et ω_0 . On traite classiquement le mouvement r(t) du centre de masse de l'atome.

1 Équations de Bloch optiques pour un atome au repos

- 1.1. Écrire les équations d'évolution des quatre composantes de l'opérateur densité de l'atome ρ_{gg} , ρ_{eg} , ρ_{ge} et ρ_{ee} sous l'effet de l'hamiltonien \hat{H} .
- 1.2. On prend en compte le couplage de l'atome avec les modes vides du rayonnement électromagnétique. Ce couplage est responsable en particulier du phénomène d'émission spontanée. On suppose qu'il peut être décrit en ajoutant aux équations trouvées ci-dessus des termes de relaxation suivants :

$$\begin{split} \left(\frac{d}{dt}\rho_{ee}\right)_{\rm relax} &= -\left(\frac{d}{dt}\rho_{gg}\right)_{\rm relax} = -\Gamma\rho_{ee} \\ \left(\frac{d}{dt}\rho_{eg}\right)_{\rm relax} &= -\frac{\Gamma}{2}\rho_{eg} \qquad \left(\frac{d}{dt}\rho_{ge}\right)_{\rm relax} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{ge} \;, \end{split}$$

où Γ^{-1} est la durée de vie radiative de l'état excité. Justifier qualitativement ces termes.

1.3. Vérifier que pour des temps longs devant Γ^{-1} , ces équations ont pour solution stationnaire :

$$\rho_{ee} = \frac{s}{2(s+1)} \qquad \qquad \rho_{eg} = -\frac{\boldsymbol{d}.\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\hbar}{\Delta + i\Gamma/2} \frac{1}{1+s}$$

$$\rho_{gg} = \frac{2+s}{2(s+1)} \qquad \qquad \rho_{ge} = -\frac{\boldsymbol{d}.\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)/\hbar}{\Delta - i\Gamma/2} \frac{1}{1+s} ,$$

où on a posé:

$$s = \frac{2 |\mathbf{d}.\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2/\hbar^2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \ .$$

1.4. Interpréter physiquement la valeur stationnaire de la quantité $\Gamma \rho_{ee}$ en terme de taux d'émission spontanée.

2 La force de pression de radiation

Dans cette partie, on se restreint au cas où le champ électromagnétique est une onde plane progressive :

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})$$
.

Par analogie avec le cas classique, on définit l'opérateur force radiative au point r par :

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \hat{H} \ .$$

- **2.1.** Évaluer la valeur moyenne de $\hat{F}(r)$ en supposant que l'atome est au repos en r et que ses degrés de liberté internes sont dans leur état stationnaire.
- **2.2.** Interpréter physiquement le résultat en terme d'échange d'impulsion entre l'atome et le rayonnement. On introduira la *vitesse de recul*, $v_{\rm rec}=\hbar k/m$.
- **2.3.** Que devient cette force à haute intensité? Donner un ordre de grandeur de l'accélération pour un atome de sodium $^{23}{\rm Na}$, dont la longueur d'onde de résonance vaut $\lambda=0{,}589\times10^{-6}$ m et dont la durée de vie de l'état excité vaut $\Gamma^{-1}=16\times10^{-9}$ s $(d=2{,}1\times10^{-29}~{\rm C}~{\rm m}).$
- **2.4.** On considère maintenant un atome en mouvement uniforme : $r = r_0 + v_0 t$ ($v_0 \ll c$). Donner l'expression de la force agissant sur l'atome.
- **2.5.** L'action de la force sur l'atome va changer sa vitesse. Sous quelle condition est-il légitime de traiter cette vitesse comme constante pour le calcul de la force de pression de radiation, comme on l'a fait ci-dessus? Cette condition est-elle satisfaite dans le cas du sodium?

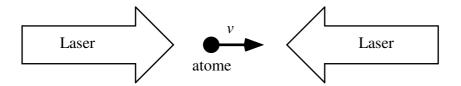


Fig. 1: Refroidissement Doppler à une dimension.

3 Le refroidissement Doppler

L'atome bouge maintenant dans le champ créé par deux ondes planes se propageant dans deux directions opposées (+z and -z) et de même intensité (figure 1). Pour simplifier, nous limitons notre étude au mouvement de l'atome le long de Oz. Nous supposerons que pour des intensités laser suffisamment faibles, on peut ajouter indépendamment les forces créées par les deux ondes.

3.1. Montrer que pour des vitesses suffisamment basses, la force totale est linéaire en vitesse et qu'elle peut s'écrire :

$$f = -\frac{mv}{\tau} \ .$$

- **3.2.** Quelle est la valeur minimale (positive) τ_{\min} du temps τ pour un paramètre de saturation donné s_0 ? Le paramètre s_0 est défini pour une onde progressive et pour un atome au repos. Calculer τ_{\min} pour des atomes de sodium, en supposant qu'on choisit $s_0 = 0,1$.
- **3.3.** Ce mécanisme de refroidissement est en compétition avec le chauffage lié au caractère aléatoire des processus d'émission spontanée. Pour évaluer l'évolution de la distribution en vitesse P(v,t) et pour trouver son état stationnaire, on procédera de la manière suivante :
- (a) Exprimer P(v, t + dt) en terme de P(v, t). On séparera les atomes en trois classes :
 - les atomes qui n'ont subi aucune diffusion de photon entre t et t + dt,
 - les atomes qui ont diffusé un photon de l'onde +z,
 - les atomes qui ont diffusé un photon de l'onde -z.

On choisit dt suffisamment court pour que la probabilité de la première option soit dominante, et pour que les diffusions multiples soient négligeables. On suppose également que les vitesses contribuant à P(v,t) sont suffisamment basses pour que la linéarisation de la force faite cidessus soit valable. Pour simplifier, on supposera que les photons émis spontanément se propagent eux aussi le long de l'axe Oz, un processus d'émission spontanée se produisant avec des probabilités égales dans les directions +z et -z.

(b) Montrer que P(v,t) obéit à l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial v} (vP) + \beta \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} ,$$

et donner l'expression de α et β en terme des paramètres physiques du problème.

- (c) Déterminer la distribution en vitesse stationnaire. Montrer qu'il s'agit d'une distribution de Maxwell-Boltzmann dont on donnera la température effective.
- (d) Pour quel désaccord cette température est-elle minimale? Que vaut cette température minimale pour des atomes de sodium?

4 La force dipolaire

On considère maintenant une onde laser stationnaire (avec une phase constante) $E_0(r) = E_0^*(r)$.

- **4.1.** Évaluer la valeur moyenne de l'opérateur force $\hat{F}(r) = -\nabla_r \hat{H}$, en supposant que l'atome est au repos en r et en supposant que ses degrés de liberté internes sont dans leur état stationnaire.
- **4.2.** Montrer que cette force dérive d'un potentiel et évaluer le puits de potentiel qui peut être réalisé pour des atomes de sodium avec une puissance laser P=1 W, focalisée sur une tache circulaire de rayon 10 μ m, avec une longueur d'onde $\lambda_L=0.650~\mu$ m.

5 Corrigé

1. Équations de Bloch optiques pour un atome au repos

1.1. L'évolution de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ est donnée par :

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] ,$$

de sorte que :

$$\frac{d\rho_{ee}}{dt} = i\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_L t}}{\hbar} \rho_{ge} - i\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_L t}}{\hbar} \rho_{eg}
\frac{d\rho_{eg}}{dt} = -i\omega_0 \rho_{eg} + i\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_L t}}{\hbar} (\rho_{gg} - \rho_{ee})$$

et

$$\frac{d\rho_{gg}}{dt} = -\frac{d\rho_{ee}}{dt} \qquad \qquad \frac{d\rho_{ge}}{dt} = \left(\frac{d\rho_{eg}}{dt}\right)^*.$$

 ${\bf 1.2.}$ Supposons que le système atome+champ soit placé au temps 0 dans l'état

$$|\psi(0)\rangle = (\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle) \otimes |0\rangle$$
,

où $|0\rangle$ représente le vide du champ électromagnétique (pas de photon présent, excepté dans le mode laser, qu'on décrit comme un champ classique). À l'ins-

tant t, l'état du système se calcule par la méthode de Wigner-Weisskopf :

$$|\psi(t)\rangle = \left(\alpha|g\rangle + \beta e^{-(i\omega_0 + \Gamma/2)t}|e\rangle\right) \otimes |0\rangle + |g\rangle \otimes |\phi\rangle ,$$

où l'état du champ $|\phi\rangle$ est la superposition d'états à un photon pour les divers modes du champ électromagnétique. Par conséquent, l'évolution des éléments de la matrice densité est $\rho_{ee}(t) = |\beta|^2 e^{-\Gamma t}$, $\rho_{eg}(t) = \alpha^* \beta e^{-(i\omega_0 + \Gamma)t}$, ou encore :

$$\left(\frac{d\rho_{ee}}{dt}\right)_{\rm relax} = -\Gamma\rho_{ee} \qquad \left(\frac{d\rho_{eg}}{dt}\right)_{\rm relax} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{eg} \ .$$

Les deux autres termes se déduisent de la conservation de la trace de l'opérateur densité $(\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1)$ et du fait qu'il est hermitien $\rho_{eg} = \rho_{ge}^*$. Nous supposerons dans la suite que l'évolution de l'opérateur densité est obtenue en ajoutant l'action du champ laser et la contribution de l'émission spontanée. Puisque Γ varie comme ω_0^3 , ceci est valable tant que le déplacement de la fréquence de transition atomique due à l'excitation laser reste petite devant ω_0 . Ceci nécessite $dE \ll \hbar \omega_0$, ce qui est bien vérifié par les sources laser usuelles.

1.3. L'évolution des composantes de l'opérateur densité est donnée par :

$$\frac{d\rho_{ee}}{dt} = -\Gamma \rho_{ee} + i \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_L t}}{\hbar} \rho_{ge} - i \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}) e^{i\omega_L t}}{\hbar} \rho_{eg} ,$$

$$\frac{d\rho_{eg}}{dt} = \left(-i\omega_0 - \frac{\Gamma}{2}\right) \rho_{eg} + i \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_L t}}{\hbar} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) .$$

Ces équations sont appelées équations de Bloch optiques.

Dans l'état stationnaire, ρ_{ee} et ρ_{gg} tendent vers une valeur constante tandis que ρ_{eg} et ρ_{ge} oscillent respectivement comme $e^{-i\omega_L t}$ et $e^{i\omega_L t}$. Cet état stationnaire est atteint après un temps caractéristique de l'ordre de Γ^{-1} . De la deuxième équation, on extrait la valeur stationnaire de ρ_{eg} comme fonction de $\rho_{gg} - \rho_{ee} = 1 - 2\rho_{ee}$:

$$\rho_{eg} = i \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_L t} / \hbar}{i\Delta + \Gamma/2} (1 - 2\rho_{ee}) .$$

Reportons maintenant cette valeur dans l'équation d'évolution de ρ_{ee} :

$$\rho_{ee} = \frac{s}{2(1+s)}$$
 avec $s(\mathbf{r}) = \frac{2 |\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 / \hbar^2}{\Delta^2 + \Gamma^2 / 4}$.

Les trois autres valeurs données dans le texte pour ρ_{gg}, ρ_{eg} et ρ_{ge} s'en déduisent immédiatement.

1.4. La valeur stationnaire de ρ_{ee} donne la probabilité de trouver l'atome dans l'état interne $|e\rangle$. Cette valeur résulte de la compétition entre le processus d'absorption, qui tend à peupler le niveau $|e\rangle$ et les processus d'émission spontanée et d'émission stimulée, qui dépeuplent $|e\rangle$ au profit de $|g\rangle$.

La quantité $\Gamma \rho_{ee}$ représente le taux d'émission spontanée de photons en régime stationnaire. Pour un petit paramètre de saturation s, ce taux est proportionnel à l'intensité laser $|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$. Quand l'intensité laser augmente, s devient beaucoup plus grand que 1 et la valeur stationnaire de ρ_{ee} est proche de 1/2. Ceci signifie que l'atome passe la moitié du temps dans l'état $|e\rangle$. Dans ce cas, le taux d'émission spontanée tend vers $\Gamma/2$.

2. La force de pression de radiation

2.1. Pour une onde laser plane, l'opérateur force est donné par :

$$\hat{F}(r) = i\mathbf{k} \ \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 \left(e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_L t)} |e\rangle\langle g| - e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_L t)} |g\rangle\langle e| \right) .$$

La valeur moyenne dans l'état stationnaire est $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\pmb{F}})$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= \langle \boldsymbol{F} \rangle &= i \boldsymbol{k} \; \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_0 \; e^{i (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega_L t)} \; \rho_{ge} \; + \; c.c. \\ &= \; \hbar \boldsymbol{k} \; \frac{\Gamma}{2} \; \frac{s_0}{1 + s_0} \; , \end{aligned}$$

avec

$$s_0 = \frac{2 |\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_0|^2 / \hbar^2}{\Delta^2 + \Gamma^2 / 4} \ .$$

- 2.2. L'interprétation de ce résultat est simple. L'atome subit des processus d'absorption, qui le font passer de l'état fondamental à l'état excité, et qui lui font gagner l'impulsion $\hbar k$. Depuis l'état excité, l'atome peut retomber dans l'état fondamental par un processus d'émission stimulée ou spontanée. Lors d'une émission stimulée, l'atome redonne au champ l'impulsion gagnée dans l'absorption, de sorte que la variation d'impulsion au cours du cycle absorption-émission est nulle. Dans une émission spontanée, la direction d'émission du photon est aléatoire. Le changement d'impulsion de l'atome est en moyenne nul, car l'émission spontanée se fait avec la même probabilité dans deux directions opposées. Par conséquent, le gain net d'impulsion dans un processus absorption émission spontanée est $\hbar k$. Puisque ces cycles se produisent avec un taux $(\Gamma/2)s/(1+s)$ (résultat trouvé dans la partie 1), nous retrouvons l'expression de la force obtenue ci-dessus.
- **2.3.** Pour une grande intensité laser, la force sature à la valeur $\hbar k\Gamma/2$. Ceci correspond à une accélération $a_{\rm max}=\hbar k\Gamma/(2m)=9\times 10^5 {\rm m/s^2}$, ce qui est 100 000 fois plus grand que l'accélération de la pesanteur.
- **2.4.** Dans le référentiel au repos de l'atome, le champ laser correspond encore à une onde plane, mais sa fréquence est désormais $\omega_L \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}$ (effet Doppler du premier ordre). Le changement de vecteur d'onde est négligeable pour des vitesses non relativistes. Le résultat précédent devient donc :

$$f = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{s(v)}{1 + s(v)}$$
 avec $s(v) = \frac{2 |d \cdot E_0|^2 / \hbar^2}{(\Delta - k \cdot v)^2 + \Gamma^2 / 4}$.

2.5. La notion de force utilisée ci-dessus est valable si le changement élémentaire de vitesse dans un seul processus d'absorption ou d'émission (la vitesse de recul $v_{\rm rec}=\hbar k/m$) ne modifie que faiblement la valeur de f. C'est le cas si le changement élémentaire d'effet Doppler $kv_{\rm rec}=\hbar k^2/m$ est très petit devant la largeur de la résonance :

$$\frac{\hbar k^2}{m} \ll \Gamma \ .$$

Cette condition est appelée condition de raie large. Elle est bien vérifiée pour les atomes de sodium puisqu'on trouve dans ce cas $\hbar k^2/(m\Gamma) = 5 \times 10^{-3}$.

3. Le refroidissement Doppler

3.1. La force totale agissant sur l'atome de vitesse v est :

$$f(v) = \hbar k \; \Gamma \; \left(\frac{|\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_0|^2 / \hbar^2}{(\Delta - kv)^2 + \Gamma^2 / 4} - \frac{|\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_0|^2 / \hbar^2}{(\Delta + kv)^2 + \Gamma^2 / 4} \right) \; ,$$

où on a utilisé le fait que $s \ll 1$. Pour des faibles vitesses $(kv \ll \Gamma)$, on obtient au premier ordre en v:

$$f(v) = -\frac{mv}{\tau}$$
 avec $\tau = \frac{m}{\hbar k^2 s_0} \frac{\Delta^2 + \Gamma^2/4}{2(-\Delta)\Gamma}$.

Ceci correspond à une force de friction si le désaccord Δ est négatif. Dans ce cas, l'atome est refroidi grâce à l'effet Doppler : l'atome en mouvement ressent une force de pression de radiation plus grande de la part de l'onde qui vient à sa rencontre que de la part de l'onde se propageant dans le même sens que lui. Pour un atome au repos, les deux forces sont de même intensité et de directions opposées ; la force résultante est alors nulle.

3.2. Pour un paramètre de saturation s_0 fixé, le temps de refroidissement est minimal quand $\Delta = -\Gamma/2$, ce qui conduit à :

$$\tau_{\min} = \frac{m}{2\hbar k^2 s_0} \ .$$

Notons que ce temps est toujours beaucoup plus long que la durée de vie Γ^{-1} de l'état excité quand la condition de raie large est vérifiée. Pour des atomes de sodium, ce temps minimal de refroidissement est 16 μ s pour $s_0=0,1$.

3.3. (a) La probabilité qu'un atome de vitesse v diffuse un photon de l'onde $\pm z$ durant l'intervalle de temps dt est :

$$dP_{\pm}(v) = \frac{\Gamma s_0}{2} \left(1 \pm \frac{2\Delta kv}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \right) dt .$$

Puisqu'on suppose que les photons émis spontanément se propagent également le long de z, la moitié des événements ne changent pas la vitesse de l'atome.

Ils correspondent au cas où le photon émis spontanément se propage dans la même direction que le photon absorbé. Pour l'autre moitié des événements, correspondant à un photon émis spontanément dans la direction opposée à la direction d'absorption, le changement de la vitesse atomique est $\pm 2v_{\rm rec}$. Par conséquent, la probabilité pour que la vitesse de l'atome ne change pas pendant le temps dt est $1-(dP_+(v)+dP_-(v))/2$, et la probabilité pour que la vitesse change de $\pm 2v_{\rm rec}$ est $dP_\pm(v)/2$. On a donc :

$$\begin{split} P(v,t+dt) = & \left(1 - \frac{dP_{+}(v) + dP_{-}(v)}{2}\right) P(v,t) \\ + & \frac{dP_{+}(v-2v_{\rm rec})}{2} P(v-2v_{\rm rec},t) \\ + & \frac{dP_{-}(v+2v_{\rm rec})}{2} P(v+2v_{\rm rec},t) \; . \end{split}$$

(b) Supposons que P(v) varie doucement à l'échelle de la vitesse de recul (ce que nous vérifierons en fin de calcul); nous pouvons transformer cette équation aux différences finies en une équation différentielle :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial v} (vP) + \beta \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$

avec

Le terme proportionnel à α correspond au refroidissement Doppler. Le terme en β décrit le chauffage lié au caractère aléatoire des processus d'émission spontanée. Ce coefficient β est une constante de diffusion en vitesse, proportionnelle au carré du pas élémentaire de la marche au hasard $v_{\rm rec}$, et à son taux Γs_0 .

(c) L'état stationnaire de P(v) (en supposant P(v) nulle à l'infini ainsi que sa dérivée) correspond à la solution de :

$$\alpha v P(v) + \beta \frac{dP}{dv} = 0 ,$$

qui est (pour $\alpha > 0$, donc $\Delta < 0$) une distribution de Maxwell :

$$P(v) = P_0 \exp\left(-\frac{\alpha v^2}{2\beta}\right) .$$

La température effective est donc :

$$k_B T = \frac{m\beta}{\alpha} = \frac{\hbar}{2} \; \frac{\Delta^2 + \Gamma^2/4}{-\Delta} \; .$$

(d) La température minimale est obtenue pour $\Delta = -\Gamma/2$:

$$k_B T_{\min} = \frac{\hbar \Gamma}{2} \ .$$

Ceci représente la limite du refroidissement Doppler, qui est indépendante de l'intensité laser. Notons que la condition de raie large est satisfaite, puisque l'échelle de vitesse correspondante v_0 est telle que :

$$v_{\rm rec} \ll v_0 = \sqrt{\hbar \Gamma/m} \ll \Gamma/k$$
.

Les deux hypothèses à la base de notre calcul sont donc valides : (i) P(v) varie doucement à l'échelle de $v_{\rm rec}$ et (ii) la vitesse caractéristique est suffisamment petite pour que la linéarisation des taux de diffusion soit possible.

Pour des atomes de sodium, la température minimale est $T_{\rm min}=240~\mu{\rm K}$, ce qui correspond à $v_0=40~{\rm cm~s^{-1}}$.

4. La force dipolaire

4.1. Pour une amplitude $E_0(r)$ réelle (onde stationnaire), l'opérateur force $\hat{F}(r)$ est :

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}) = \left(\sum_{i=x,y,z} d_i \boldsymbol{\nabla} E_{0i}(\boldsymbol{r})\right) \left(e^{-i\omega_L t} |e\rangle\langle g| + e^{i\omega_L t} |g\rangle\langle e|\right) .$$

Supposons que les degrés de liberté internes ont atteint leur état stationnaire. La valeur moyenne de \hat{F} vaut :

$$\begin{split} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) &= & \langle \boldsymbol{F} \rangle = - \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})) \; \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{1 + s(\boldsymbol{r})} \; \frac{\Delta}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \\ &= & - \frac{\hbar \Delta}{2} \; \frac{\boldsymbol{\nabla} s(\boldsymbol{r})}{1 + s(\boldsymbol{r})} \; . \end{split}$$

4.2. Cette force, appelée force dipolaire, dérive du potentiel $U(\boldsymbol{r})$:

$$f(r) = -\nabla U(r)$$
 avec $U(r) = \frac{\hbar \Delta}{2} \log(1 + s(r))$.

4.3. Pour un champ laser d'intensité P=1 W, focalisé sur une tache de rayon $r=10~\mu\mathrm{m}$, le champ électrique au centre vaut :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\pi \epsilon_0 c r^2}} = 1.6 \times 10^6 \text{ V/m}.$$

Nous supposerons ici que cette tache circulaire est éclairée uniformément. Un traitement plus précis devrait prendre en compte le profil gaussien transverse du faisceau laser, mais ceci ne changerait pas l'ordre de grandeur des résultats qui suivent. La valeur de E_0 trouvée ci-dessus conduit à $dE_0/\hbar = 3.1 \times 10^{11} \ {\rm s^{-1}}$ et le désaccord Δ vaut $3 \times 10^{14} \ {\rm s^{-1}}$. La profondeur du puits de potentiel est égale à 2,4 mK, 10 fois plus grande que la limite du refroidissement Doppler. Du fait du grand désaccord, le taux d'émission spontanée de photons est relativement faible (70 photons/seconde).

Commentaires

Cette possibilité de manipuler, refroidir et piéger des atomes par laser constitue désormais un outil très utilisé en physique atomique et moléculaire. Le refroidissement Doppler n'est qu'une des multiples possibilités pour refroidir les atomes avec de la lumière. En pratique, pour des atomes de structure un peu plus complexe que le modèle à deux niveaux considéré ici, on utilise plutôt l'effet Sisyphe. Ce dernier conduit à des températures notablement plus basses, limitées seulement par l'énergie de recul $\hbar^2 k^2/(2m)$.

Pour en savoir plus, on pourra consulter l'article d'A. Aspect et J. Dalibard, La Recherche, janvier 1994 (page 30) ainsi que les conférences Nobel de S. Chu, C. Cohen-Tannoudji, et W. D. Phillips (prix Nobel 1997 pour leur contribution à ce domaine de recherche): Rev. Mod. Phys. **70**, p. 685-741 (1998).

18. Excitons magnétiques

La théorie quantique des champs traite des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. Ce problème en est un exemple simple; on y étudie les excitations magnétiques d'une longue chaîne de spins couplés. On montre qu'on peut associer aux états excités du système des quasi-particules qui se propagent le long de la chaîne.

On rappelle que, pour k entier :

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi kn/N} = N \text{ si } k = pN, p \text{ entier quelconque},$$

$$= 0 \text{ autrement}.$$

1 La molécule Cs Fe Br₃

On considère un système de moment cinétique égal à 1, c'est-à-dire que j=1 dans la base propre $|j,m\rangle$ commune à \hat{J}^2 et \hat{J}_z .

- **1.1.** Quelles sont les valeurs propres de \hat{J}^2 et \hat{J}_z ?
- **1.2.** On note pour simplifier $|j,m\rangle = |\sigma\rangle$, où $\sigma = m = 1, 0, -1$. Écrire l'action des opérateurs $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ sur les états $|\sigma\rangle$.
- 1.3. Dans la molécule Cs Fe Br₃, l'ion Fe²⁺ possède un moment cinétique intrinsèque, ou spin, égal à 1; on note \hat{J} l'observable vectorielle correspondante et $|\sigma\rangle$ les états propres de \hat{J}_z . La molécule a un plan de symétrie et l'hamiltonien d'interaction magnétique de l'ion Fe²⁺ avec le reste de la molécule est

$$\hat{H}_D = \frac{D}{\hbar^2} \hat{J}_z^2 , \quad D > 0 .$$

Quels sont les états propres de \hat{H}_D et les énergies correspondantes ? Existe-t-il des dégénérescences ?

2 Interactions spin-spin dans une chaîne de molécules

On considère une chaîne fermée unidimensionnelle d'un nombre pair N de molécules Cs Fe Br₃. On ne s'intéresse qu'à l'énergie magnétique de la chaîne, due aux interactions magnétiques des N ions Fe²⁺, tous de spin 1.

due aux interactions magnétiques des N ions Fe^{2+} , tous de spin 1. On note $\{|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle\}$, avec $\sigma_n = 1, 0, -1$, la base propre orthonormée des observables \hat{J}_z^n où $\hat{\boldsymbol{J}}^n$ est l'observable de spin de l'ion n $(n = 1, \dots, N)$. L'hamiltonien magnétique du système est somme de deux termes $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1,$ où

$$\hat{H}_0 = \frac{D}{\hbar^2} \sum_{n=1}^{N} \left(\hat{J}_z^n \right)^2$$

a été introduit en 1.3, et où \hat{H}_1 est un terme d'interaction entre spins voisins

$$\hat{H}_1 = \frac{A}{\hbar^2} \sum_{n=1}^{N} \hat{\boldsymbol{J}}^n \cdot \hat{\boldsymbol{J}}^{n+1} , \quad A > 0 .$$

Pour simplifier l'écriture de \hat{H}_1 , on a posé $\hat{\boldsymbol{J}}^{N+1} \equiv \hat{\boldsymbol{J}}^1$. On suppose que \hat{H}_1 est une petite perturbation par rapport à \hat{H}_0 , c'est-à-dire $A \ll D$, que l'on souhaite traiter au premier ordre.

- **2.1.** Montrer que $|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle$ est état propre de \hat{H}_0 . Donner la valeur correspondante de l'énergie.
- **2.2.** Quel est le niveau fondamental de \hat{H}_0 ? Donner son énergie et sa dégénérescence.
- **2.3.** Quelle est l'énergie du premier niveau excité de \hat{H}_0 ? Quelle est la dégénérescence d de ce niveau? On appellera \mathcal{E}^1 le sous-espace propre correspondant de \hat{H}_0 et on notera d sa dimension.
- **2.4.** Montrer que \hat{H}_1 peut s'écrire

$$\hat{H}_1 = \frac{A}{\hbar^2} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \left(\hat{J}_+^n \, \hat{J}_-^{n+1} + \hat{J}_-^n \, \hat{J}_+^{n+1} \right) + \hat{J}_z^n \, \hat{J}_z^{n+1} \right] .$$

3 Niveaux d'énergie de la chaîne

On travaille ici dans le sous-espace \mathcal{E}^1 . On introduit la notation suivante

$$|n,\pm\rangle = |\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \cdots, \sigma_n = \pm 1, \sigma_{n+1} = 0, \cdots, \sigma_N = 0\rangle$$

et on définit en utilisant la périodicité de la chaîne : $|N+1,\pm\rangle \equiv |1,\pm\rangle$.

3.1. Montrer que

$$\hat{H}_1|n,\pm\rangle = A\left(|n-1,\pm\rangle + |n+1,\pm\rangle\right) + |\psi_n\rangle$$

où $|\psi_n\rangle$ est orthogonal au sous-espace \mathcal{E}^1 . Sans donner la forme complète de $|\psi_n\rangle$, donner un exemple d'une de ses composantes, et donner l'énergie de l'espace propre de \hat{H}_0 auquel $|\psi_n\rangle$ appartient.

3.2. Soient l'opérateur de permutation circulaire \hat{T} et son adjoint $\hat{T}^{\dagger},$ définis par

$$\hat{T}|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle = |\sigma_N, \sigma_1, \cdots, \sigma_{N-1}\rangle
\hat{T}^{\dagger}|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle = |\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_N, \sigma_1\rangle$$

Écrire l'action de \hat{T} et de \hat{T}^{\dagger} sur les états $|n, \pm\rangle$.

- **3.3.** Vérifier que, dans le sous-espace \mathcal{E}^1 , les opérateurs \hat{H}_1 et $A(\hat{T} + \hat{T}^{\dagger})$ ont les mêmes éléments de matrice.
- **3.4.** Montrer que les valeurs propres λ_k de \hat{T} sont les racines N-ièmes de l'unité (on rappelle que N est pair) :

$$\lambda_k = e^{-iq_k}$$
 avec $q_k = -\pi + \frac{2k\pi}{N}$, $k = 0, \dots, N-1$.

3.5. On cherche dans \mathcal{E}^1 les 2N vecteurs propres $|q_k, \pm\rangle$ de \hat{T} correspondant aux valeurs propres λ_k . Chaque vecteur s'écrit sous la forme :

$$|q_k, \pm\rangle = \sum_n c_n(k) |n, \pm\rangle .$$
 (1)

- (a) Écrire la relation de récurrence entre les coefficients $c_n(k)$.
- (b) Montrer que

$$c_n(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{iq_k n} \tag{2}$$

est solution de la relation de récurrence.

- (c) Montrer que les états $|q_k, \pm\rangle$ définis par (1) et (2) sont orthonormés.
- (d) Montrer que les vecteurs $|q_k, \pm\rangle$ sont également vecteurs propres de \hat{T}^{\dagger} et de $\hat{T} + \hat{T}^{\dagger}$. Donner les valeurs propres correspondantes.
- (e) Calculer le produit scalaire $\langle n, \epsilon | q_k, \epsilon' \rangle$ $(\epsilon, \epsilon' = \pm)$ et écrire l'expression des états $|n, \pm\rangle$ dans la base $|q_k, \pm\rangle$.
- **3.6.** On traite l'hamiltonien \hat{H}_1 du paragraphe 2 comme une perturbation par rapport à \hat{H}_0 . On se limite au premier niveau excité de \hat{H}_0 dont on veut calculer la levée de dégénérescence due à la perturbation. On rappelle que, dans le cas dégénéré, la méthode des perturbations au premier ordre consiste à diagonaliser la restriction de l'hamiltonien de perturbation au sous-espace propre dégénéré du terme principal \hat{H}_0 .
- (a) Expliquer pourquoi les résultats des questions 3.3 et 3.5 permettent de résoudre le problème.
- (b) Donner, au premier ordre des perturbations, les niveaux d'énergie issus du premier niveau excité de \hat{H}_0 , et les états propres correspondants.
- (c) Dessiner qualitativement les énergies $E(q_k)$ en fonction de la variable q_k , qu'on traitera comme continue, avec $q_k \in [-\pi, +\pi[$, si N est très grand.
- (d) Quelle est la dégénérescence de chaque niveau d'énergie?

4 Vibrations de la chaîne : Excitons

On étudie maintenant l'évolution d'états de la chaîne de spins.

4.1. Supposons qu'à l'instant initial t=0, le système est dans l'état

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{\epsilon} |q_k, \epsilon\rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{k=0}^{N-1} |\varphi_k^{\epsilon}|^2 = 1 .$$

En posant $\omega = 2A/\hbar$, écrire l'état $|\Psi(t)\rangle$ à un instant ultérieur.

- **4.2.** On suppose que l'état initial est $|\Psi(0)\rangle = |q_k, +\rangle$.
- (a) Écrire l'amplitude de probabilité $\alpha_n(t)$ et la probabilité $P_n(t)$ de trouver à l'instant t que le spin n pointe vers +z, c'est-à-dire $\sigma_n=+1$ et $\sigma_m=0$ pour $m \neq n$. Montrer que $P_n(t)$ est le même en tous les sites de la chaîne.
- (b) Les molécules de la chaîne sont situées en $x_n = na$, a étant la maille du réseau. Montrer que l'amplitude de probabilité $\alpha_n(t)$ est la valeur en $x = x_n$ d'une onde plane monochromatique

$$\Psi_k(x,t) = C e^{i(p(q) x - E(q) t)/\hbar}$$

où C est une constante, $q = q_k$, et x est l'abscisse le long de la chaîne. Exprimer p(q) en fonction de q.

- (c) Montrer que $\Psi_k(x,t)$ est état propre de l'impulsion $\hat{p}_x = (\hbar/i) \partial/\partial x$ le long de la chaîne. Montrer que la valeur de p(q) assure la périodicité de $\Psi_k(x,t)$, c'est-à-dire
- que $\Psi_k(x+L,t) = \Psi_k(x,t)$, L = Na étant la longueur de la chaîne. (d) Montrer que, pour $|q_k| \ll 1$, $\Psi_k(x,t)$ satisfait une équation de Schrödin-
- (d) Montrer que, pour $|q_k| \ll 1$, $\Psi_k(x,t)$ satisfait une équation de Schrödinger pour une particule de masse m négative placée dans un potentiel constant; donner la valeur de m.
- **4.3.** Dans une analyse plus poussée, on montre qu'on peut effectivement associer des quasi-particules aux excitations magnétiques de la chaîne. Nous appellerons excitons magnétiques ces quasi-particules, qui sont pourvues non seulement d'une énergie $E(q_k)$, mais également d'une impulsion $p(q_k)$.

À très basse température, $T \approx 1.4$ K, la chaîne est dans l'état fondamental de \hat{H}_0 . En la bombardant avec des neutrons de basse énergie, on crée des excitons dont on détermine l'énergie et l'impulsion en mesurant le recul des neutrons. Le résultat expérimental pour E(q) en fonction de $q \in [-\pi, 0]$ est représenté en figure 1.

- (a) En déduire les valeurs approchées de D et A.
- (b) Commenter l'approximation $D \gg A$ et l'accord théorie-expérience ? Comment pourrait-on améliorer cet accord ?
- (c) Est-il justifié de supposer qu'à l'équilibre thermique à $1,4~\rm K,$ la chaîne est dans son état fondamental?
- **4.4.** Soit, à l'instant t=0, l'état

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k |q_k, +\rangle$$
 avec $\sum_{k=0}^{N-1} |\varphi_k|^2 = 1$.

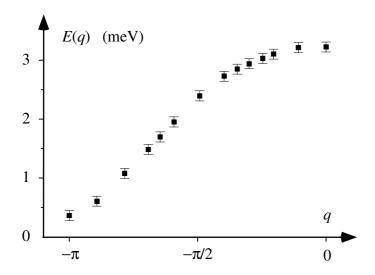


Fig. 1: Mesure de l'énergie d'excitation E(q) en fonction de q entre $-\pi$ et 0.

On suppose que $N \gg 1$, que les coefficients φ_k ne prennent de valeurs appréciables que dans un proche voisinage d'une valeur $k=k_0$, soit $q\approx q_0$, et qu'en bonne approximation, on a dans ce voisinage :

$$E(q) = E(q_0) + (q - q_0)u_0$$
, $u_0 = \frac{dE}{dq}\Big|_{q=q_0}$.

Montrer que la probabilité $P_n(t)$ de trouver $\sigma_n = +1$ à l'instant t est la même que la probabilité $P_{n'}(t')$ de trouver $\sigma_{n'} = +1$ à un autre instant t', que l'on exprimera en fonction de t et de la distance des sites n et n'.

Interpréter le résultat comme la propagation d'une onde d'excitation de spin le long de la chaîne. Calculer la vitesse de propagation de cette onde et donner sa valeur numérique pour a=0,7 nm et $q_0=-\pi/2$.

4.5. On suppose maintenant que l'état initial est $|\Psi(0)\rangle = |n=1,+\rangle$.

- (a) Écrire la probabilité $P_m(t)$ de trouver $\sigma_m = +1$ à un instant ultérieur t?
- (b) Calculer les probabilités $P_1(t)$ et $P_2(t)$ dans le cas N=2. Interpréter le résultat.
- (c) Calculer $P_1(t)$ dans le cas N=8. L'évolution de $P_1(t)$ est-elle périodique?
- (d) Pour $N \gg 1$, on peut transformer les sommes écrites ci-dessus en intégrales. Les probabilités sont alors $P_m(t) \approx |J_{m-1}(\omega t)|^2$, où les $J_n(x)$ sont les fonctions de Bessel, qui satisfont $\sum_n |J_n(x)|^2 = 1$ et $J_n = (-)^n J_{-n}$.

Pour $x \gg 1$, on a :

$$J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4)$$
 si $x > |2n|/\pi$,
 $\simeq 0$ si $x < |2n|/\pi$.

Quels sont les sites atteints de manière appréciable par l'onde de probabilité à un instant t tel que $\omega t\gg 1$?

(e) Interpréter le résultat comme la propagation d'une onde de probabilité le long de la chaîne. Calculer la vitesse de cette onde et comparer avec le résultat obtenu en question 4.4 .

5 Corrigé

- 1. La molécule Cs Fe Br₃
- **1.1.** Les résultats sont \hat{J}^2 : $2\hbar^2$ et \hat{J}_z : $m\hbar$ avec m=1,0,-1.
- **1.2.** On a

$$J_{+}|1\rangle = 0 \qquad J_{+}|0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1\rangle \qquad J_{+}|-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|0\rangle ,$$

$$J_{-}|1\rangle = \hbar\sqrt{2}|0\rangle \qquad J_{-}|0\rangle = \hbar\sqrt{2}|-1\rangle \qquad J_{-}|-1\rangle = 0 .$$

1.3. Les états propres sont les états $|\sigma\rangle$. L'état $|0\rangle$ correspond à l'énergie E=0, les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ à E=D (niveaux dégénérés).

2. Interactions spin-spin dans une chaîne de molécules

2.1. On a :

$$\hat{H}_0|\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N\rangle = D\sum_{n=1}^N (\sigma_n)^2 |\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N\rangle$$

la valeur propre étant donc $E = D \sum_{n} \sigma_n^2$.

- **2.2.** Dans l'état fondamental, tous les σ sont nuls, donc E=0. Cet état est non dégénéré.
- **2.3.** Le premier niveau excité correspond à tous les σ nuls sauf un, σ_n , égal à ± 1 . L'énergie est D et la dégénérescence 2N, car il y a N choix de l'indice n pour l'élément non nul σ_n , et deux valeurs ± 1 de cet élément σ_n .
- **2.4.** On a $J_{\pm}=J_x\pm iJ_y.$ Un calcul élémentaire mène au résultat.

3. Niveaux d'énergie de la chaîne

3.1. L'action de la perturbation sur les états de base est $(\epsilon = \pm)$:

$$\hat{H}_{1}|n,\epsilon\rangle = A(|n-1,\epsilon\rangle + |n+1,\epsilon\rangle)
+ A \sum_{n'\neq n} (|0,\dots,0,\sigma_{n}=\epsilon,0,\dots,0,\sigma_{n'}=-1,\sigma_{n'+1}=+1,0,\dots,0)
+ |0,\dots,0,\sigma_{n}=\epsilon,0,\dots,0,\sigma_{n'}=+1,\sigma_{n'+1}=-1,0,\dots,0))$$

Le vecteur $|\psi\rangle = |\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, 0, \cdots, 0, \sigma_n = \epsilon, 0, \cdots, 0\rangle$ fait partie de cet ensemble; il est vecteur propre de \hat{H}_0 avec énergie 3D.

3.2. Par définition de \hat{T} , de \hat{T}^{\dagger} et de $|n,\pm\rangle$, on trouve :

$$\hat{T}|n,\pm\rangle = |n+1,\pm\rangle$$
, $\hat{T}^{\dagger}|n,\pm\rangle = |n-1,\pm\rangle$.

3.3. On obtient alors

$$A(\hat{T} + \hat{T}^{\dagger})|n,\pm\rangle = A(|n-1,\pm\rangle + |n+1,\pm\rangle)$$
.

Étant donné que

$$\hat{H}_1|n,\pm\rangle = A\left(|n-1,\pm\rangle + |n+1,\pm\rangle\right) + |\psi_n\rangle$$
, avec $\langle n',\pm|\psi_n\rangle = 0$,

on en déduit que \hat{H}_1 et $A(\hat{T} + \hat{T}^{\dagger})$ ont mêmes éléments de matrices dans \mathcal{E}_1 .

- **3.4.** Puisque $\hat{T}^N = \hat{I}$, une valeur propre λ_k satisfait $(\lambda_k)^N = 1$, ce qui prouve que chaque valeur propre est racine N-ième de l'unité. Réciproquement, nous verrons un peu plus loin que toute racine N-ième de l'unité est valeur propre.
- **3.5.** (a) Les vecteurs propres correspondants satisfont

$$|q_k, \pm\rangle = \sum_n c_n |n, \pm\rangle , \quad \hat{T}|q_k, \pm\rangle = \lambda_k |q_k, \pm\rangle ,$$

d'où

$$\sum_{n} c_n |n+1, \pm\rangle = \lambda_k \sum_{n} c_n |n, \pm\rangle .$$

On en déduit la relation de récurrence et sa solution

$$\lambda_k c_n = c_{n-1} , \quad c_n = \frac{1}{\lambda_k^{n-1}} c_1 = e^{iq_k(n-1)} c_1 .$$

- (b) La condition de normalisation $\sum_n |c_n|^2 = 1$ donne $N|c_1|^2 = 1$. Si on choisit $c_1 = e^{iq_k}/\sqrt{N}$, on trouve bien la solution proposée dans l'énoncé.
- (c) Le produit scalaire de deux de ces vecteurs se calcule aisément :

$$\langle q_{k'}, \epsilon' | q_k, \epsilon \rangle = \delta_{\epsilon, \epsilon'} \frac{1}{N} \sum_{\sigma} e^{2i\pi n(k-k')/N} = \delta_{\epsilon, \epsilon'} \delta_{k, k'}$$
.

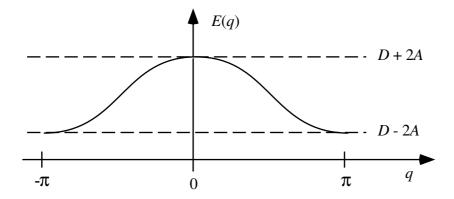


Fig. 2: Niveaux d'énergie E(q) en fonction de q.

- (d) Les $|q_k, \pm\rangle$ sont vecteurs propres de \hat{T}^{\dagger} avec les valeurs propres λ_k^* . Ils sont donc vecteurs propres de $(\hat{T} + \hat{T}^{\dagger})$ avec les valeurs propres $\lambda_k + \lambda_k^* = 2\cos q_k = -2\cos(2k\pi/N)$.
- (e) Par définition des vecteurs, on a :

$$\langle n, \epsilon | q_k, \epsilon' \rangle = \frac{e^{iq_k n}}{\sqrt{N}} \, \delta_{\epsilon, \epsilon'} \, ,$$

et, en utilisant la relation de fermeture,

$$|n,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-iq_k n} |q_k,\pm\rangle$$
.

3.6. La restriction de \hat{H}_1 au sous-espace \mathcal{E}_1 s'identifie à $A(\hat{T} + \hat{T}^{\dagger})$ (question 3.3). Dans \mathcal{E}_1 , l'opérateur $A(\hat{T} + \hat{T}^{\dagger})$ est diagonal dans la base $|q_k, \pm\rangle$. Par conséquent, la restriction de \hat{H}_1 est elle aussi diagonale dans cette base. Les niveaux d'énergie sont $E(q_k) = D + 2A\cos(q_k)$, correspondant aux états propres $|q_k, \pm\rangle$. La dégénérescence de spin est 2 pour tous les niveaux (le spin peut valoir +1 ou -1); de plus, pour tous les niveaux sauf $q=-\pi$ et q=0, il y a dégénérescence entre q_k et $-q_k$ (symétrie du cosinus). En général, la dégénérescence d'un niveau d'énergie est donc 4.

4. Vibrations de la chaîne : Excitons

4.1. Au temps t, l'état de la chaîne s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iDt/\hbar} \sum_{\epsilon} \sum_k \varphi_k^\epsilon \; e^{-i\omega t \cos q_k} \; |q_k,\epsilon\rangle \; . \label{eq:psi_total}$$

4.2. Nous considérons maintenant un état initial $|q_k,\pm\rangle$, qui évolue selon $e^{-iE(q)t/\hbar}\,|q_k,\pm\rangle$.

(a) On obtient donc une amplitude

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i(q_k n - E(q_k)t/\hbar)}$$

et une probabilité $P_n(t) = |\alpha_n(t)|^2 = 1/N$, qui a la même valeur en tout site.

(b) Dans l'expression

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i(q_k x_n/a - E(q_k)t/\hbar)} ,$$

 $\alpha_n(t)$ est bien la valeur en $x=x_n$ de la fonction $\psi_k(x,t)=\exp[i(px-Et)/\hbar]/\sqrt{N}$, avec $E(q)=D+\hbar\omega\cos(q)$ et $p(q)=\hbar q/a$.

(c) La fonction Ψ_k est fonction propre de \hat{p}_x avec valeur propre $\hbar q_k/a$. Puisque N est pair, on obtient $e^{iq_kL/a}=e^{iNq_k}=e^{2\pi ik}=1$, ce qui prouve la périodicité de Ψ_k .

(d) Pour $|q_k| \ll 1$, $\cos q_k = 1 - q_k^2/2$. Par conséquent, $E = E_0 + p^2/2m$ avec

$$E_0 = D + 2A \quad \text{ et } \quad m = -\frac{\hbar^2}{2Aa^2} = -\frac{\hbar}{\omega a^2} \ .$$

La fonction Ψ_k satisfait alors l'équation d'onde

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_0 \psi ,$$

c'est-à-dire une équation de Schrödinger pour une particule de masse négative (en théorie du solide, il s'agit de la propagation de trous – par opposition à celle d'électrons – et en théorie des champs, la propagation d'antiparticules).

4.3. (a) Avec les données de la figure, qui ressemblent grosso modo à la courbe E(q) dessinée en figure 2, on trouve $D+2A\simeq 3.2\times 10^{-3}$ eV et $D-2A\simeq 0.4\times 10^{-3}$ eV, soit $D\simeq 1.8\times 10^{-3}$ eV , $A\simeq 7\times 10^{-4}$ eV.

(b) L'approximation $D\gg A$ est sujette à caution. La théorie ne doit être considérée correcte qu'à l'ordre $(A/D)^2\sim 10\%$ près. Le deuxième ordre des perturbations est nécessaire pour rendre compte quantitativement de la courbe qui est plus creusée qu'une sinusoïde au voisinage de $q=-\pi$.

(c) Pour T=1.4 K, $k_BT\simeq 1.2\times 10^{-4}$ eV et $\exp(-(D-2A)/k_BT)\simeq 0.04$. À quelques % près, le système est dans son état fondamental.

4.4. Avec l'approximation $E(q) = E(q_0) + (q - q_0)u_0$ au voisinage de q_0 , on obtient

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i(q_0 n - \omega_0 t)} \sum_k \varphi_k \, e^{i(q_k - q_0)(n - u_0 t/\hbar)} \ . \label{eq:alphan}$$

Le facteur de phase global ne contribue pas à la probabilité et on obtient $P_n(t) = P_{n'}(t')$ avec $t' = t + (n' - n)\hbar/u_0$. Ceci correspond à la propagation

d'une onde le long de la chaîne, à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{u_0 a}{\hbar} = \frac{a}{\hbar} \left. \frac{dE}{dq} \right|_{q=q_0} = -\frac{2a A}{\hbar} \sin q_0 .$$

Pour $q_0=-\pi/2$ et a=0,7 nm, on trouve $v_g\sim 1500$ m/s. On peut également évaluer $u_0\simeq 1,2$ meV directement sur la courbe expérimentale, ce qui conduit à $v_g\sim 1300$ m/s.

- **4.5.** Si $|\Psi(0)\rangle = |n=1,+\rangle$ alors $\varphi_k^+ = e^{-iq_k}/\sqrt{N}$ et $\varphi_k^- = 0$.
- (a) La probabilité est $P_m(t) = |\langle m, +|\Psi(t)\rangle|^2$, avec

$$\langle m, + |\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-iDt/\hbar}}{N} \sum_{k} e^{iq_k(m-1)} e^{-i\omega t \cos q_k} .$$

- (b) N=2. Il y a deux valeurs possibles pour $q_k: q_0 = -\pi$ et $q_1 = 0$. Ceci conduit à $P_1 = \cos^2 \omega t$, $P_2 = \sin^2 \omega t$. C'est l'oscillation usuelle d'un système à deux états, comme l'inversion de la molécule d'ammoniac.
- (c) N=8.

$$q_k$$
 $-\pi$ $-\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{4}$ 0 $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\cos(q_k)$ -1 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

La probabilité P_1 de retrouver l'excitation sur le site initial est

$$P_1(t) = \frac{1}{4} \left(\cos^2(\omega t/2) + \cos(\omega t/\sqrt{2}) \right)^2.$$

Le système n'est plus périodique en temps. Il n'existe aucun $t \neq 0$ pour lequel $P_1(t) = 1$, sinon il existerait des entiers n et n' tels que $\sqrt{2} = n'/n$.

(d) Puisque $J_n \sim 0$ pour $\omega t < |2n|/\pi$, seuls les sites tels que $|m-1| < \pi \omega t/2$ sont atteints à l'instant t. Pour ωt grand, l'amplitude est la même pour tous les sites de même parité :

$$P_m(t) = \frac{2}{\pi \omega t} \cos^2 \left(\omega t - (m-1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) .$$

On a notamment $P_m(t)+P_{m+1}(t)=2/(\pi\omega t)$, ce qui est indépendant de m et qui varie lentement avec t.

(e) L'onde de probabilité est constituée deux ondes planes progressives dans chaque sens le long de la chaîne et se délocalise très vite sur la chaîne. La vitesse de propagation est $v=\pi\omega a/2$, ce qui est comparable au résultat trouvé en 4.4 avec un paquet d'onde pour $q\sim\pi/2$.

Commentaire

Les données expérimentales proviennent de B. Dorner *et al.*, Zeitschrift für Physik B **72**, 487 (1988)).

19. Preuve de la quantification du champ

Nous considérons dans ce problème un atome modélisé par un système à deux niveaux, en interaction avec un mode du champ électromagnétique. En utilisant des résultats expérimentaux obtenus récemment dans des expériences d'électrodynamique en cavité, nous montrons que lorsque ce mode est traité quantiquement, des propriétés spécifiques apparaissent dans la dynamique de l'atome, comme l'amortissement et la résurgence des oscillations de Rabi.

1 Quantification d'un mode du champ électromagnétique

On rappelle qu'en mécanique classique, un oscillateur harmonique matériel de masse m et de pulsation ω a pour équations du mouvement

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \; , \quad \dot{p} = -m\omega^2 x \; ,$$

où x est sa position et p son impulsion. En introduisant les variables réduites $X(t)=x(t)\sqrt{m\omega/\hbar}$ et $P(t)=p(t)/\sqrt{\hbar m\omega}$, on obtient les équations du mouvement

$$\dot{X} = \omega P \; , \quad \dot{P} = -\omega X \; , \tag{1}$$

et l'énergie totale de l'oscillateur vaut

$$U(t) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(X^2(t) + P^2(t) \right) . \tag{2}$$

1.1. On considère une cavité pour ondes électromagnétiques de volume V. Dans tout ce problème, on ne s'intéresse qu'à un seul mode spatial du champ électromagnétique, de la forme :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = e(t)\sin(kz)\,\boldsymbol{u}_x$$
, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = b(t)\cos(kz)\,\boldsymbol{u}_y$,

où $u_x, u_y u_z$ forment un repère orthonormé direct. On rappelle les équations de Maxwell dans le vide :

$$egin{aligned} oldsymbol{
abla} \cdot oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t) &= 0 \quad , \quad & oldsymbol{
abla} \wedge oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t) &= -rac{\partial oldsymbol{B}(oldsymbol{r},t)}{\partial t} \ , \ & oldsymbol{
abla} \cdot oldsymbol{B}(oldsymbol{r},t) &= 0 \quad , \quad & oldsymbol{
abla} \wedge oldsymbol{B}(oldsymbol{r},t) &= rac{1}{c^2} rac{\partial oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t)}{\partial t} \ , \end{aligned}$$

ainsi que l'expression de l'énergie du champ électromagnétique dans la cavité :

$$U(t) = \int_{V} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r}, t) \right) d^3r \quad \text{avec } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 .$$
 (3)

- (a) Exprimer de/dt et db/dt en fonction de k, c, e(t), b(t).
- (b) Écrire U(t) en fonction de V, e(t), b(t), ϵ_0 , μ_0 . On prendra

$$\int_{V} \sin^{2} kz \ d^{3}r = \int_{V} \cos^{2} kz \ d^{3}r = \frac{V}{2} \ .$$

(c) On pose $\omega = ck$ et on introduit les variables réduites

$$\chi(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\hbar\omega}}\,e(t)\ , \quad \Pi(t) = \sqrt{\frac{V}{2\mu_0\hbar\omega}}\,b(t)\ .$$

Montrer que les expressions de $d\chi/dt$, $d\Pi/dt$ et U(t) en fonction de χ , Π et ω coïncident formellement avec les équations (1) et (2).

1.2. La quantification du mode considéré du champ électromagnétique est calquée sur celle d'un oscillateur harmonique usuel. On associe aux grandeurs physiques χ et Π des opérateurs hermitiens $\hat{\chi}$ et $\hat{\Pi}$ pour lesquels on impose la relation de commutation

$$[\hat{\chi}, \hat{\Pi}] = i$$
.

L'hamiltonien du champ dans la cavité est

$$\hat{H}_C = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\hat{\chi}^2 + \hat{\Pi}^2 \right) .$$

L'énergie du champ dans la cavité est quantifiée : $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ (n entier positif ou nul) ; on note $|n\rangle$ l'état propre associé à E_n .

Les états quantiques du champ dans la cavité sont engendrés par la base $\{|n\rangle\}$. L'état $|0\rangle$, d'énergie $E_0 = \hbar\omega/2$, est appelé vide de photons et l'état $|n\rangle$ d'énergie $E_n = E_0 + n\hbar\omega$ est appelé état à n photons. Un photon correspond à une excitation élémentaire du champ, d'énergie $\hbar\omega$.

On introduit les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon $\hat{a}^{\dagger} = (\hat{X} - i\hat{\Pi})/\sqrt{2}$ et $\hat{a} = (\hat{X} + i\hat{\Pi})/\sqrt{2}$, qui satisfont, comme pour un oscillateur harmonique usuel :

$$\begin{split} \hat{a}^\dagger | n \rangle &= \sqrt{n+1} | n+1 \rangle \ , \\ \hat{a} | n \rangle &= \sqrt{n} | n-1 \rangle \ \ \text{si} \ \ n \neq 0 \qquad \ \ \, \text{et} \ \ \hat{a} | 0 \rangle = 0 \ . \end{split}$$

(a) Exprimer \hat{H}_C en termes de \hat{a}^\dagger et \hat{a} . L'observable $\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ est appelée nombre de photons.

Les observables champ électrique et champ magnétique au point \boldsymbol{r} sont définies par :

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}_x \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger} \right) \sin kz ,
\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) = i\boldsymbol{u}_y \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar\omega}{V}} \left(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a} \right) \cos kz .$$

L'interprétation physique de la théorie en termes d'états et d'observables est la même qu'en mécanique quantique habituelle.

- (b) Calculer les valeurs moyennes $\langle \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \rangle$, $\langle \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) \rangle$, et $\langle \hat{H}_C \rangle$ dans un état à n photons.
- 1.3. On appelle état quasi-classique du champ la superposition

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle ,$$
 (4)

où α est un nombre complexe quelconque.

- (a) Vérifier que $|\alpha\rangle$ est état propre normalisé de l'opérateur d'annihilation \hat{a} et donner la valeur propre correspondante. Calculer la valeur moyenne $\langle n \rangle$ du nombre de photons dans cet état.
- (b) Vérifier que si l'état du champ à l'instant initial est $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$, alors $|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}|(\alpha e^{-i\omega t})\rangle$.
- (c) Calculer les valeurs moyennes $\langle \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \rangle_t$ et $\langle \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) \rangle_t$ à l'instant t dans un état quasi-classique; on supposera α réel.
- (d) Vérifier que $\langle \hat{E}(r) \rangle_t$ et $\langle \hat{B}(r) \rangle_t$ satisfont les équations de Maxwell.
- (e) Calculer l'énergie d'un champ classique tel que $E_{\rm cl}(\boldsymbol{r},t) = \langle \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \rangle_t$ et $B_{\rm cl}(\boldsymbol{r},t) = \langle \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) \rangle_t$. Comparer le résultat avec la valeur moyenne de \hat{H}_C dans cet état quasi-classique.
- (f) En quoi ces résultats justifient-ils l'appellation d'états quasi-classiques du champ pour $|\alpha| \gg 1$?

2 Le couplage atome-champ

On considère un atome placé au point r_0 dans la cavité. On traite classiquement la dynamique du centre de masse de cet atome et on se restreint au sous-espace à deux dimensions des états atomiques internes, engendré par l'état fondamental $|f\rangle$ et un état excité $|e\rangle$. On choisit l'origine des énergies de l'atome de telle façon que les énergies de $|f\rangle$ et $|e\rangle$ soient respectivement $-\hbar\omega_A/2$ et $+\hbar\omega_A/2$ ($\omega_A>0$). Dans la base $\{|f\rangle,|e\rangle\}$, on introduit les opérateurs :

$$\hat{\sigma}_z = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \qquad \hat{\sigma}_+ = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \qquad \hat{\sigma}_- = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \ ,$$

c'est-à-dire $\hat{\sigma}_+|f\rangle=|e\rangle$ et $\hat{\sigma}_-|e\rangle=|f\rangle$. L'hamiltonien atomique s'écrit : $\hat{H}_A=-(\hbar\omega_A/2)~\hat{\sigma}_z$.

Une base du système physique atome+photons est alors constituée par l'ensemble des états $\{|f,n\rangle,|e,n\rangle,n\geq 0\}$, où $|f,n\rangle\equiv|f\rangle\otimes|n\rangle$ et $|e,n\rangle\equiv|e\rangle\otimes|n\rangle$.

2.1. Vérifier que cette base est une base propre de $\hat{H}_0 = \hat{H}_A + \hat{H}_C$, et donner les énergies correspondantes.

- **2.2.** On suppose dans toute la suite du problème que la fréquence de la cavité est accordée à la fréquence de Bohr de l'atome, c'est-à-dire $\omega = \omega_A$. Tracer qualitativement la position des 5 premiers niveaux d'énergie de \hat{H}_0 . Montrer qu'à l'exception de l'état fondamental, les états propres de \hat{H}_0 se groupent par paires dégénérées que l'on spécifiera.
- 2.3. Le couplage du dipole électrique atomique avec le champ s'écrit :

$$\hat{W} = \gamma \left(\hat{a}\hat{\sigma}_{+} + \hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-} \right) ,$$

où $\gamma = -d\sqrt{\hbar\omega/\epsilon_0 V}\sin kz_0$, le moment dipolaire d étant déterminé expérimentalement.

- (a) Déterminer l'action de \hat{W} sur les états $|f, n\rangle$ et $|e, n\rangle$.
- (b) À quels processus physiques correspondent les opérateurs $\hat{a}\hat{\sigma}_{+}$ et $\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}$?
- **2.4.** Déterminer les états propres de $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{W}$ et les énergies correspondantes. On montrera que ce problème se ramène à la diagonalisation de matrices 2×2 et on posera :

$$\begin{split} |\phi_n^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|f,n+1\rangle \pm |e,n\rangle\right) \;, \\ \frac{\hbar\Omega_0}{2} &= \gamma = -d\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \sin kz_0 \;, \quad \Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1} \;. \end{split}$$

On notera E_n^{\pm} les énergies correspondant aux états propres $|\phi_n^{\pm}\rangle$.

3 Interaction de l'atome avec une cavité « vide »

Dans la suite du problème, on supposera que l'atome traverse la cavité selon une ligne le long de laquelle $\sin kz_0 = 1$.

Un atome excité dans l'état $|e\rangle$ est envoyé dans la cavité préparée dans l'état vide de photons $|0\rangle$. À l'instant t=0 d'entrée dans la cavité, l'état du système est $|e,n=0\rangle$.

- **3.1.** Quel est l'état du système à un instant ultérieur t?
- **3.2.** Quelle est la probabilité $P_f(T)$ de détecter l'atome dans l'état f à l'instant T auquel l'atome sort de la cavité. Montrer que $P_f(T)$ est une fonction périodique de T (T est ajusté en changeant la vitesse de l'atome).
- **3.3.** L'expérience a été menée avec des atomes de rubidium pour un couple de niveaux (f, e) tels que $d = 1.1 \times 10^{-26}$ C.m et $\omega/2\pi = 5.0 \times 10^{10}$ Hz. Le volume de la cavité est 1.87×10^{-6} m³. On rappelle que $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$ S.I. La courbe $P_f(T)$, ainsi que la partie réelle de sa transformée de Fourier

$$J(\nu) = \int_0^\infty \cos(2\pi\nu T) P_f(T) dT ,$$

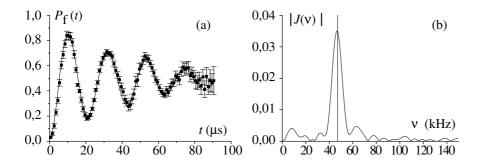


FIG. 1: (a) Probabilité $P_f(T)$ de détecter l'atome dans l'état fondamental après le passage dans une cavité vide de photons; (b) transformée de Fourier de cette probabilité.

sont représentées sur la figure 1; on observe une oscillation amortie, l'amortissement étant dû aux imperfections de la cavité.

Comment se comparent théorie et expérience?

On rappelle que la transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie en temps présente un pic à la fréquence de cette sinusoïde, d'une largeur inversement proportionnelle à la constante de temps de l'amortissement.

4 Interaction d'un atome avec un état quasi-classique

L'atome initialement dans l'état $|e\rangle$ est maintenant envoyé dans une cavité dans laquelle on a préparé un état quasi-classique $|\alpha\rangle$ du champ. À l'instant d'entrée t=0 dans la cavité, l'état du système est $|e\rangle\otimes|\alpha\rangle$.

- **4.1.** Calculer la probabilité $P_f(T,n)$ pour qu'à l'instant T on mesure l'atome dans l'état $|f\rangle$ et le champ dans l'état $|n+1\rangle$, pour $n \geq 0$. Quelle est la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|f\rangle$ et le champ dans l'état $|0\rangle$?
- **4.2.** Écrire la probabilité $P_f(T)$ de trouver l'atome dans l'état $|f\rangle$, indépendamment de l'état du champ, sous forme d'une série infinie de fonctions oscillantes.
- **4.3.** Sur la figure 2 sont indiquées une mesure expérimentale de $P_f(T)$ et la partie réelle de sa transformée de Fourier $J(\nu)$. La cavité utilisée pour cette mesure est la même que pour la figure 1, mais on a cette fois préparé le champ dans un état quasi-classique avant d'envoyer l'atome.
- (a) Déterminer les trois fréquences ν_0, ν_1, ν_2 contribuant principalement à $P_f(T)$.
- (b) Les rapports ν_1/ν_0 et ν_2/ν_0 correspondent-ils aux valeurs attendues?
- (c) À partir des valeurs $J(\nu_0)$ et $J(\nu_1)$, déterminer une valeur approchée du nombre moyen de photons $|\alpha|^2$ dans la cavité.

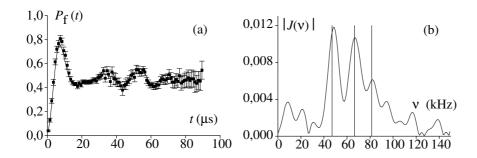


FIG. 2: (a) Probabilité $P_f(T)$ de détecter l'atome dans l'état fondamental lors du passage dans une cavité contenant un état quasi-classique du champ électromagnétique; (b) transformée de Fourier de cette probabilité.

5 État à grand nombre de photons : brouillage et résurgences

On considère un état quasi-classique $|\alpha\rangle$ du champ correspondant à un grand nombre moyen de photons : $|\alpha|^2 \simeq n_0 \gg 1$, où n_0 est un entier. Dans ce cas, la probabilité $\pi(n)$ de détecter n photons se met en bonne approximation sous la forme :

$$\pi(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}} \exp\left(-\frac{(n-n_0)^2}{2n_0}\right) .$$

On obtient cette forme gaussienne en utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ et en développant $\ln \pi(n)$ au voisinage de $n = n_0$.

- **5.1.** Montrer que cette loi de probabilité ne prend des valeurs significatives que pour n dans un voisinage δn de n_0 . Préciser la valeur relative $\delta n/n_0$.
- **5.2.** On cherche à évaluer pour un état quasi-classique la probabilité $P_f(T)$ de détecter l'atome dans l'état f après son interaction avec le champ. Pour cela,
- on linéarise la dépendance en n de Ω_n au voisinage de n_0 :

$$\Omega_n \simeq \Omega_{n_0} + \Omega_0 \frac{n - n_0}{2\sqrt{n_0 + 1}} ; \qquad (5)$$

- on remplace la somme discrète intervenant dans $P_f(T)$ par une intégrale.
- (a) Montrer dans ces approximations que $P_f(T)$ est une fonction oscillante de T pour les temps courts, l'oscillation se brouillant en un temps caractéristique T_B . On rappelle que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \cos(\alpha x) \ dx = e^{-\alpha^2\sigma^2/2} \cos(\alpha x_0) \ .$$

(b) Ce temps d'amortissement dépend-il du nombre moyen de photons n_0 ?

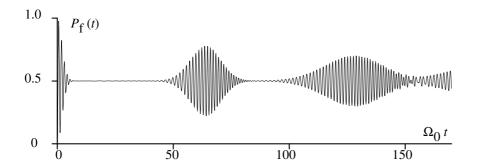


Fig. 3: Calcul exact de la valeur théorique de $P_f(T)$ pour $\langle n \rangle \simeq 50$ photons.

- (c) Donner une explication qualitative simple à ce brouillage.
- **5.3.** Si l'on garde l'expression de $P_f(T)$ comme une somme discrète, un calcul numérique montre que l'on doit observer, pour certains temps T_R grands devant T_B , une réapparition des oscillations de $P_f(T)$. La variation de $P_f(T)$ en fonction de T est représentée sur la figure 3. Ce phénomène, baptisé résurgence quantique, fait l'objet d'une recherche expérimentale active.

En gardant la somme discrète, mais en utilisant l'approximation (5), expliquer qualitativement ce phénomène de résurgence. Comment le temps de la première résurgence dépend-il de n_0 ?

6 Corrigé

1. Quantification d'un mode du champ électromagnétique

1.1. (a) Les équations de Maxwell $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ et $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ sont satisfaites pour toutes fonctions e(t) et b(t). Les équations $\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -(\partial \boldsymbol{B}/\partial t)$ et $c^2 \nabla \wedge \boldsymbol{B} = -(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ imposent respectivement :

$$\frac{de}{dt} = c^2 k b(t)$$
, $\frac{db}{dt} = -k e(t)$.

(b) L'énergie électromagnétique s'écrit :

$$U(t) = \int_{V} \left(\frac{\epsilon_0}{2} e^2(t) \sin^2 kz + \frac{1}{2\mu_0} b^2(t) \cos^2 kz \right) d^3r$$
$$= \frac{\epsilon_0 V}{4} e^2(t) + \frac{V}{2\mu_0} b^2(t) .$$

(c) Avec le changement de fonction indiqué dans l'énoncé, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\chi} = \omega \, \Pi \\ \dot{\Pi} = -\omega \, \chi \end{array} \right. \qquad U(t) = \frac{\hbar \omega}{2} \left(\chi^2(t) + \Pi^2(t) \right) \; . \label{eq:potential}$$

Ces deux équations sont formellement identiques à celles donnant l'évolution temporelle et l'énergie d'un oscillateur harmonique matériel.

1.2. (a) À partir de $[\hat{\chi}, \hat{\Pi}] = i$, on déduit :

$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = \frac{1}{2} [\hat{\chi} + i\hat{\Pi}, \hat{\chi} - i\hat{\Pi}] = 1.$$

En outre $\hat{\chi}=(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})/\sqrt{2}$ et $\hat{\Pi}=i(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})/\sqrt{2},$ soit :

$$\hat{H}_C = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) ,$$

ou encore $\hat{H}_C = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$.

(b) Pour un état à n photons, on trouve $\langle n|\hat{a}|n\rangle=\langle n|\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=0$, ce qui entraı̂ne

$$\langle \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \rangle = 0 \qquad \langle \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \rangle = 0 .$$

Par ailleurs, l'état $|n\rangle$ est état propre de \hat{H}_C avec la valeur propre $(n+1/2)\hbar\omega$, soit

$$\langle H_C \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega .$$

1.3. (a) L'action de \hat{a} sur $|\alpha\rangle$ donne :

$$\begin{split} \hat{a}|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = \alpha |\alpha\rangle \;. \end{split}$$

Le calcul de la norme de $|\alpha\rangle$ donne :

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^n}{n!} = 1 \ .$$

L'état est normé et la valeur moyenne du nombre de photons dans cet état vaut :

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger} \hat{a} | \alpha \rangle = ||\hat{a} | \alpha \rangle||^2 = |\alpha|^2$$
.

(b) L'évolution temporelle de $|\psi(t)\rangle$ est donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+1/2)t} |n\rangle$$

$$= e^{-i\omega t/2} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$= e^{-i\omega t/2} |(\alpha e^{-i\omega t})\rangle.$$

(c) Les valeurs moyennes des champs électriques et magnétiques sont :

$$\langle E(\mathbf{r}) \rangle_t = 2\alpha \cos \omega t \sin kz \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\epsilon_0 V}} \mathbf{u}_x ,$$

 $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle_t = -2\alpha \sin \omega t \cos kz \sqrt{\frac{\hbar \omega \mu_0}{V}} \mathbf{u}_y .$

(d) Ces champs sont du type des champs classiques considérés au début du problème avec :

$$e(t) = 2\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \cos \omega t \; , \quad b(t) = -2\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega\mu_0}{V}} \sin \omega t \; .$$

Compte-tenu de la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on vérifie bien que $\dot{e}(t) = c^2 k b(t)$ et $\dot{b} = -k e(t)$. Les champs moyens satisfont donc les équations de Maxwell.

(e) L'énergie du champ électromagnétique classique se calcule à partir du résultat de la question 1.1b. En utilisant $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$, on trouve $U(t) = \hbar \omega \alpha^2$. Cette énergie moyenne "classique" est donc indépendante du temps. La valeur moyenne de \hat{H}_C vaut quant à elle :

$$\langle H_C \rangle = \langle \hbar \omega (\hat{N} + 1/2) \rangle = \hbar \omega (\alpha^2 + 1/2) .$$

Elle est également indépendante du temps (théorème d'Ehrenfest).

(f) Pour $|\alpha|$ grand devant 1, le rapport $U(t)/\langle H_C \rangle$ est voisin de 1. Plus généralement, la valeur moyenne d'une quantité physique, calculée pour un champ quantique placé dans l'état $|\alpha\rangle$, est proche de la valeur de cette même quantité, calculée pour un champ classique tel que $\mathbf{E}_{\rm cl}(\mathbf{r},t) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle_t$ et $\mathbf{B}_{\rm cl}(\mathbf{r},t) = \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle_t$.

2. Le couplage atome-champ

2.1. On vérifie immédiatement que

$$\begin{split} \hat{H}_0 & |f,n\rangle = \left(-\frac{\hbar\omega_A}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right) |f,n\rangle \ , \\ \hat{H}_0 & |e,n\rangle = \left(\frac{\hbar\omega_A}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right) |e,n\rangle \ . \end{split}$$

- **2.2.** Pour une cavité résonnante avec l'atome, c'est-à-dire si $\omega = \omega_A$, les états $|f,n+1\rangle$ et $|e,n\rangle$ sont dégénérés. Les cinq premiers états propres de \hat{H}_0 sont représentés sur la figure 4a. Seul l'état fondamental atome+champ $|f,0\rangle$ est non dégénéré.
- **2.3.** (a) L'action de \hat{W} sur les vecteurs de base de H_0 est donnée par :

$$\begin{split} \hat{W}|f,n\rangle &=& \sqrt{n}\,\gamma\,|e,n-1\rangle \quad \mathrm{si} \quad n \geq 1 \ , \\ &=& 0 \quad \mathrm{si} \quad n = 0 \ , \\ \hat{W}|e,n\rangle &=& \sqrt{n+1}\,\gamma\,|f,n+1\rangle \ . \end{split}$$

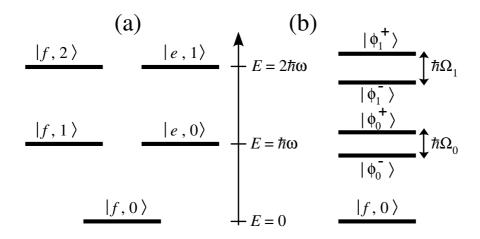


Fig. 4: (a) Position des cinq premiers niveaux d'énergie de H_0 . (b) Position des cinq premiers niveaux d'énergie de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$.

Le couplage considéré correspond à une interaction dipolaire-électrique en $-\hat{D}\cdot\hat{E}(r)$, où \hat{D} est l'observable dipole électrique de l'atome.

- (b) \hat{W} couple les deux états de chaque paire dégénérée. Le terme $\hat{a}\hat{\sigma}_{+}$ correspond à l'absorption d'un photon par l'atome, qui passe de l'état fondamental à l'état excité. Le terme $\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}$ correspond à l'émission d'un photon par l'atome, qui passe de l'état excité à l'état fondamental.
- **2.4.** L'opérateur \hat{W} est diagonal par bloc dans la base propre de \hat{H}_0 $\{|f,n\rangle,|e,n\rangle\}$. Par conséquent :
- L'état $|f,0\rangle$ est état propre de $\hat{H}_0 + \hat{W}$ avec la valeur propre 0.
- Dans chaque sous-espace propre de \hat{H}_0 engendré par $\{|f,n+1\rangle,|e,n\rangle\}$ avec $n \geq 0$, on doit diagonaliser la matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} (n+1)\hbar\omega & \hbar\Omega_n/2\\ \hbar\Omega_n/2 & (n+1)\hbar\omega \end{pmatrix} ,$$

dont les vecteurs propres et les valeurs propres sont $(n \ge 0)$:

$$\begin{array}{ll} |\phi_n^+\rangle & {\rm associ\acute{e}} \; {\rm a} & E_n^+ = (n+1)\hbar\omega + \frac{\hbar\Omega_n}{2} \\ |\phi_n^-\rangle & {\rm associ\acute{e}} \; {\rm a} & E_n^- = (n+1)\hbar\omega - \frac{\hbar\Omega_n}{2} \; . \end{array}$$

$$|\phi_n^-\rangle$$
 associé à $E_n^-=(n+1)\hbar\omega-\frac{\hbar\Omega_n}{2}$

Les premiers niveaux d'énergie de $\hat{H}_0 + \hat{W}$ sont représentés sur la figure 4b.

3. Interaction de l'atome avec une cavité vide

3.1. Décomposons l'état initial sur la base propre de \hat{H} :

$$|\psi(0)\rangle = |e,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_0^+\rangle - |\phi_0^-\rangle \right) .$$

L'évolution temporelle du vecteur d'état est alors :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_0^+ t/\hbar} |\phi_0^+\rangle - e^{-iE_0^- t/\hbar} |\phi_0^-\rangle \right)$$
$$= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Omega_0 t/2} |\phi_0^+\rangle - e^{i\Omega_0 t/2} |\phi_0^-\rangle \right) .$$

3.2. D'une manière générale, la probabilité de détecter l'atome dans l'état f indépendamment de l'état du champ s'obtient par :

$$P_f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, n | \psi(T) \rangle|^2$$
.

Dans le cas particulier d'une cavité initialement vide, seul contribue à cette somme le terme n=1 de cette somme. En utilisant $|f,1\rangle=\left(|\phi_0^+\rangle+|\phi_0^-\rangle\right)/\sqrt{2}$, on trouve :

$$P_f(T) = \sin^2 \frac{\Omega_0 T}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega_0 T)$$
.

C'est bien une fonction périodique de T, de pulsation Ω_0 .

3.3. On mesure expérimentalement une oscillation à la fréquence $\nu_0=47$ kHz. Cela correspond bien à la fréquence attendue théoriquement :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{2d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\epsilon_0 V}} \ .$$

4. Interaction d'un atome avec un état quasi-classique

4.1. On décompose à nouveau l'état initial sur la base propre de $\hat{H}_0 + \hat{W}$:

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e, n\rangle$$
$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_n^+\rangle - |\phi_n^-\rangle \right) .$$

Le vecteur d'état à l'instant t est alors

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-iE_n^+ t/\hbar} |\phi_n^+\rangle - e^{-iE_n^- t/\hbar} |\phi_n^-\rangle \right) .$$

On constate donc que :

- la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|f\rangle$ et le champ dans l'état $|0\rangle$ est nulle pour tout T,
- la probabilité $P_f(T,n)$ s'obtient à partir du produit scalaire de $|\psi(t)\rangle$ avec $|f,n+1\rangle=(|\phi_n^+\rangle+|\phi_n^-\rangle)/\sqrt{2}$:

$$P_f(T,n) = \frac{1}{4}e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left| e^{-iE_n^+ t/\hbar} - e^{-iE_n^- t/\hbar} \right|^2$$
$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \sin^2 \frac{\Omega_n T}{2} = \frac{1}{2}e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(1 - \cos \Omega_n T\right) .$$

4.2. La probabilité $P_f(T)$ est simplement la somme de toutes les probabilités $P_f(T,n)$:

$$P_f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P_f(T, n) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos \Omega_n T.$$

- **4.3.** (a) Les trois pics principaux de $J(\nu)$ apparaissent aux fréquences $\nu_0 = 47\,\mathrm{kHz}$ (déjà trouvée pour une cavité vide), $\nu_1 = 65\,\mathrm{kHz}$ et $\nu_2 = 81\,\mathrm{kHz}$.
- (b) Les fréquences mesurées sont dans des rapports très proches des rapports prévus théoriquement : $\nu_1/\nu_0 = \sqrt{2}$ et $\nu_2/\nu_0 = \sqrt{3}$.
- (c) Le rapport $J(\nu_1)/J(\nu_0)$ est de l'ordre de 0,9 . Dans l'hypothèse de pics de largeurs égales et très faibles devant l'écart $\nu_1 \nu_0$, ce rapport est égal au nombre moyen de photons $|\alpha|^2$.

En fait, les pics se recouvrent, ce qui rend cette détermination quelque peu imprécise. Une modélisation plus correcte, qui prend en compte la forme des pics, donne $|\alpha|^2 = 0.85 \pm 0.04$.

Remarque: on peut également déterminer $|\alpha|^2$ à partir du rapport $J(\nu_2)/J(\nu_1)$ qui doit être égal à $|\alpha|^2/2$. Néanmoins, l'imprécision liée au recouvrement des pics est plus grande que pour $J(\nu_1)/J(\nu_0)$, en raison de la petite valeur de $J(\nu_2)$.

5. État à grand nombre de photons : brouillage et résurgences

- **5.1.** La probabilité $\pi(n)$ ne prend des valeurs significativement non nulles que si $(n-n_0)^2/(2n_0)$ n'est pas grand devant 1, c'est-à-dire pour les entiers n situés dans un voisinage de n_0 de largeur relative de l'ordre de $1/\sqrt{n_0}$. Pour $n_0 \gg 1$, la distribution $\pi(n)$ est donc « piquée » autour de n_0 .
- **5.2.** (a) Reprenons le résultat de la question 4.2, dans lequel nous remplaçons Ω_n par son approximation (5):

$$P_f(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) \cos \left[\left(\Omega_{n_0} + \Omega_0 \frac{n - n_0}{2\sqrt{n_0 + 1}} \right) T \right] . \tag{6}$$

Remplaçons ensuite la somme discrète par une intégrale :

$$P_f(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/(2n_0)}}{\sqrt{2\pi n_0}} \cos \left[\left(\Omega_{n_0} + \Omega_0 \frac{u}{2\sqrt{n_0 + 1}} \right) T \right] du .$$

Nous avons étendu la borne inféreure de cette intégrale de $-n_0$ à $-\infty$, en tirant parti du fait que la largeur de la fonction gaussienne est $\sqrt{n_0} \ll n_0$. Développons maintenant la fonction à intégrer :

$$\cos\left[\left(\Omega_{n_0} + \Omega_0 \frac{u}{2\sqrt{n_0 + 1}}\right)T\right] = \cos\left(\Omega_{n_0}T\right)\cos\left(\frac{\Omega_0 uT}{2\sqrt{n_0 + 1}}\right) - \sin\left(\Omega_{n_0}T\right)\sin\left(\frac{\Omega_0 uT}{2\sqrt{n_0 + 1}}\right).$$

Le terme en sinus ne contribue pas à l'intégrale (fonction impaire) et nous trouvons :

$$P_f(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_{n_0}T)\exp\left(-\frac{\Omega_0^2 T^2 n_0}{8(n_0 + 1)}\right) .$$

Pour $n_0\gg 1,$ l'argument de l'exponentielle se simplifie pour donner finalement :

$$P_f(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_{n_0}T)\exp\left(-\frac{T^2}{T_R^2}\right)$$

avec $T_B = 2\sqrt{2}/\Omega_0$.

- (b) Dans cette approximation, les oscillations se brouillent en un temps T_B qui est indépendant du nombre de photons n_0 . Pour une transition atomique donnée (d et ω fixés), ce temps T_B croît comme la racine du volume de la cavité. À la limite d'une cavité infinie (atome dans l'espace libre), ce temps de brouillage est également infini : on retrouve l'oscillation de Rabi traditionnelle. Pour une cavité de taille finie, le nombre d'oscillations de $P_f(T)$ visibles est environ $\nu_{n_0}T_B \sim \sqrt{n_0}$.
- (c) La fonction $P_f(T)$ est composée d'un grand nombre de fonctions oscillantes de fréquences voisines. À l'instant initial, ces différentes fonctions sont en phase, et leur somme $P_f(T)$ présente des oscillations marquées. Au bout du temps T_B , ces différentes oscillations se sont déphasées les unes par rapport aux autres et l'oscillation résultante de $P_f(T)$ est brouillée. On peut retrouver simplement le temps de brouillage en estimant le temps pour lequel les oscillations correspondant aux deux flancs de $\pi(n)$ sont déphasées de π :

$$\Omega_{n_0+\sqrt{n_0}} T_B \sim \Omega_{n_0-\sqrt{n_0}} T_B + \pi$$
 et $\sqrt{n_0 \pm \sqrt{n_0}} \simeq \sqrt{n_0} \pm \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \Omega_0 T_B \sim \pi$.

5.3. Dans le cadre de l'approximation (5) de l'énoncé, l'équation (6) obtenue ci-dessus correspond à une évolution périodique, de période

$$T_R = \frac{4\pi}{\Omega_0} \sqrt{n_0 + 1} \ .$$

En effet

$$\left(\Omega_{n_0} + \Omega_0 \frac{n - n_0}{2\sqrt{n_0 + 1}}\right) T_R = 4\pi \left(n_0 + 1\right) + 2\pi (n - n_0) .$$

On s'attend donc à ce que toutes les fonctions oscillantes composant $P_f(T)$ se remettent en phase aux instants T_R , $2T_R$,... L'instant de la première résurgence, mesuré sur la figure 3, est $\Omega_0 T \simeq 64$, en excellent accord avec cette prédiction. Remarquons que $T_R \sim 4\sqrt{n_0}\,T_B$, ce qui signifie que le temps de résurgence est toujours grand devant le temps de brouillage.

En fait, on voit que cette remise en phase n'est que partielle pour le résultat représenté sur la figure 3. Ceci provient du fait que le calcul numérique est fait avec l'expression exacte de Ω_n . Dans ce cas, la différence entre deux fréquences consécutives $\Omega_{n+1} - \Omega_n$ n'est pas exactement constante, contrairement à ce que donne l'approximation (5); la fonction $P_f(T)$ n'est donc pas vraiment périodique. Après quelques résurgences, on obtient un comportement complexe pour $P_f(T)$, qui est analysable par les méthodes théoriques développées pour étudier le chaos.

Commentaires

Le phénomène de brouillage que nous venons de trouver est « classique » : on l'obtiendrait dans une description classique de l'interaction atome—champ, en considérant un champ dont l'intensité ne serait pas très bien définie (analogue d'une distribution $\pi(n)$ du nombre de photons). En revanche, la résurgence est liée au caractère discret des fréquences Ω_n . Elle est une conséquence directe de la quantification du champ électromagnétique, au même titre que l'apparition des fréquences $\nu_0\sqrt{2}$, $\nu_0\sqrt{3}$,... dans l'évolution de $P_f(T)$.

Les expériences décrites dans ce problème ont été réalisées au Laboratoire Kastler Brossel à Paris, dans le groupe de S. Haroche, J.-M. Raimond et M. Brune. Le couple de niveaux (f,e) correspond à des niveaux très excités du rubidium, ce qui explique la valeur élevée du moment dipolaire d. Le champ est confiné dans une cavité supra-conductrice en niobium (facteur de qualité $\sim 10^8$), qui est refroidie à 0.8 K pour éviter que le rayonnement du corps noir ne perturbe l'expérience.

On pourra consulter l'article de M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Quantum Rabi Oscillation : A Direct Test of Field Quantization in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).

Index

Absorption, 160	Compton
Addition de moments cinétiques, 14,	longueur d'onde de, 7
51	Condensat de Bose-Einstein, 141
Amortissement, 81, 193	Cornell E., 150
Amplitude de diffusion, 20	Corrélation, 68
Anderson M.H., 150	Coulombien (potentiel), 15, 134
Anomalie de moment magnétique, 43	Crane H.J., 45
Antineutrino, 47	Cryptographie, 89
Antiparticule, 23	Cyclotron
Antiquark, 135	mouvement, 117
Aspect A., 69, 182	Cyclotron
Atome alcalin, 51	fréquence, 160
Avogadro (nombre d'), 7	· ,
Axial (mouvement), 117	Dérive des constantes fondamentales,
Azote, 152	54
,	Davis R., 33
Barnett S.M., 110	Densité (opérateur), 11
Baryon, 135	Désintégration, 47
Bell J., 67, 69	Détecteur, 102, 111
Bloch (équations de), 173	Diffraction, 36
Boîte quantique, 157	Diffusion
Bohr	Amplitude, 20
fréquence, 160, 196	Etat de, 20
magnéton, 7	Longueur, 20, 142
Rayon, 47	Dipolaire (force), 176
rayon, 7	Dipole électrique, 173, 196
Boltzmann	Dirac
constante de, 7	Distribution de, 13
Born (approximation de), 19	Equation, 43
Bose S., 141	Distribution
Boson, 17	de Dirac, 13
Bradley C., 150	de Maxwell-Boltzmann, 176
Bragg (diffraction de), 35	Doppler (refroidissement), 174
Brouillage, 198	Dorner B., 192
Brune M., 206	Durée de vie, 19
Cas pur, 9	ECOC, 10
Césium, 51, 54	Ehrenfest (théorème), 12, 117
Chu S., 182	Einstein A., 67, 76, 141
Codage, 92	Electrodynamique quantique, 43, 193
Cohen-Tannoudji C., 182	Electron, 7
Collela A., 42	Emission spontanée, 174
Collision, 19	Environnement, 77

Index

F	T
Equation	Interaction
de Bloch, 173	faible, 23
de Fokker-Planck, 175	hyperfine, 51
de Schrödinger, 10	magnétique, 51, 183
Espace de Hilbert, 9	spin-spin, 183
Etat, 9	Interférence, 35, 77, 99
de phase, 111	Intrication, 11, 67, 90
factorisé, 111	Ion moléculaire, 151
quasiclassique, 77, 195	L I AND OF
singulet, 68	KamLAND, 25
Exciton magnétique, 183	Ket, 9
	Ketterle W., 150
Facteur de forme, 20	Koshiba M., 33
Facteur gyromagnétique, 43	I (1 ^) 10
Fentes d'Young, 99	Laguerre (polynôme), 16
Fermi	Laplace (équation), 117
Règle d'or, 18	Lepton, 23
Fermion, 17	Lithium, 142
Fokker-Planck (équation de), 175	Longueur d'onde
Fonction d'onde, 12	de Compton, 7
Fontaine atomique, 52	Longueur de diffusion, 20, 142
Force dipolaire, 176	25 60
Fourier (transformée de), 12	Magnétique
Fréquence cyclotron, 160	Interaction, 51
	Magnéton
Gabrielse G., 130	de Bohr, 7
Gallium, 157	nucléaire, 7
Gomme quantique, 99	Maleki L., 58
G.P.S., 51, 54	Masse effective, 158
Grangier P., 76, 110	Matrice densité, 11
Gravitation, 37	Maxwell-Boltzmann (distribution de),
Greenberger D., 42	176
Gyromagnétique	Mélange statistique, 11, 79
Facteur, 43	Mélasse optique, 173
Rapport, 99	Méson, 23, 135
77.01. II	Mesure quantique, 9, 111
Hélium, 47	Mewes MO., 150
Hameau S., 171	Micro-électronique, 157
Harmoniques sphériques, 14	Moment cinétique, 13
Haroche S., 206	Addition, 14, 51
Hilbert (espace de), 9	Moment magnétique, 38
Horloges atomiques, 51	Muon, 23
Hulet R., 150	
Hydrogène, 67	Neutrino, 23, 47
Hyperfine (interaction), 51	Neutron, 7, 35, 99
	Newton I., 133
Incertitude (relation), 12, 13	Noyau, 51
Indium, 157	
Inégalité de Bell, 67, 69	Observable

 $\mathsf{Index} \hspace{35mm} 209$

de moment cinétique, 13	Quantification
Onde électromagnétique, 52	du champ, 193
Opérateur	Quark, 135
énergie, 12	Quasi-classique (état), 77, 195
densité, 11	Quasi-particule, 183
impulsion, 12	Q p, 200
position, 12	Résurgence, 198
Opto-électronique, 157	Règle d'or de Fermi, 18
Oscillateur harmonique, 15, 77, 111,	Rabi
134, 141, 158, 193	Oscillation de, 18, 193
Oscillation (neutrinos), 23	Radiation (pression de), 174
Oscillation de Rabi, 18, 193	Radioactivité, 47
Overhauser A.W., 35, 42	Radioactivité bêta, 23
O vormadori 11. vv., 00, 12	Raimond JM., 206
Do suct d'andes (projection) 10	Ramsey
Paquet d'ondes (projection), 10	Franges de, 100
Paradoxe E.P.R., 67	Rapport gyromagnétique, 99
Paramètre de saturation, 175	Rayon de Bohr, 7, 47
Particules identiques, 17	Rayonnement thermique, 117
Pauli	Refroidissement laser, 173
Principe, 151	Relation d'incertitude, 12, 13
Peil S., 130	Résonance magnétique, 99
Penning (piège de), 117	Roger G., 76
Perturbations (théorie des), 16, 142,	Rosen N. (paradoxe EPR), 67, 76
185	Rotation, 37
Perturbations dépendant du temps, 18	Rubidium, 51, 54, 196
Pesanteur, 37	Rydberg
Phase, 111 Dkilling W.D. 182	constante de, 7
Phillips W.D., 182 Phonon, 171	
Piège	Santarelli G., 58
de Penning, 117	Satellite, 54
<u>-</u> ·	Saturation (paramètre de), 175
Laser, 173 Pigment, 151	Schrödinger
Planck	Chat, 77
constante de, 7	Equation, 10
Podolski B. (paradoxe EPR), 67, 76	Section efficace, 19
Poincaré H., 133	Semi-conducteur, 171
Poizat J.P., 110	Silicium, 35
Polyéthylène, 151	Singulet (état), 68
Précession, 43	Sisyphe (effet), 182
Pression de radiation, 174	Smith J.F., 110
Prestage J.D., 58	Smith J.H., 110
Principe de Pauli, 151	Sodium, 142, 174 Spectrograpie, 125, 160
Principe de l'adn, 191 Principe de superposition, 9	Spectroscopie, 135, 160 Spin, 14
Produit scalaire, 9	Structure fine
Projection du paquet d'ondes, 10	constante, 7, 54
Proton, 7	Super-Kamiokande, 27
Pulsation cyclotron, 117	Supernova, 24
	~ ~ F ~

210 Index

Superposition (principe), 9, 77

Tau (particule), 23 Théorème d'Ehrenfest, 12 Théorie des perturbations, 16, 142, 185 Thermomètre, 117 Tjoelker R.L., 58 Transformée de Fourier, 12 Tritium, 47 Trois corps (problème), 133

Variable cachée, 68 Variationnelle (méthode), 17, 133 Von Neumann J., 111

Werner S.A., 42 Wieman C., 150 Wilkinson D.T., 45

Young (fentes d'), 99 Yukawa (potentiel de), 19