

Le magnétisme artificiel pour les gaz d'atomes froids

Phase de Berry et potentiels de jauge géométriques

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2013-14



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Evolution adiabatique d'un système physique

On considère un système dont l'état dépend de paramètres extérieurs λ

volume d'un récipient, champs magnétiques ou électriques appliqués

On considère une trajectoire fermée arbitrairement lente pour ces paramètres extérieurs :

$$\lambda(0) \longrightarrow \lambda(t) \longrightarrow \lambda(T) = \lambda(0)$$

Qu'arrive-t-il au système ?

Revient-il dans son état initial ?

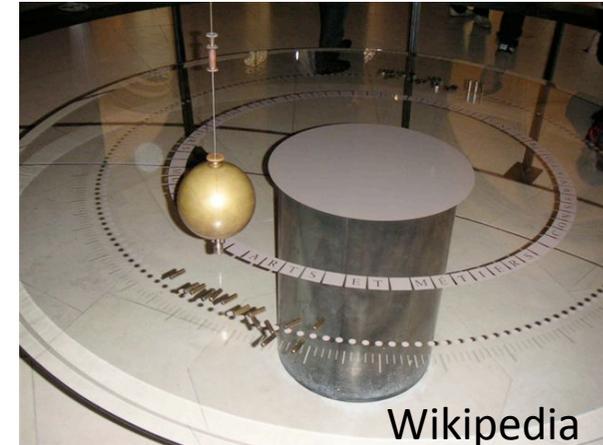
Anholonomie ou non-holonomie

Exemple du pendule de Foucault

λ : point d'accroche du pendule

Après 24 heures, ce point d'accroche est revenu à sa position initiale.

L'état du pendule (son plan d'oscillation) a changé.



Possibilité pour certaines variables de ne pas revenir à leur valeur initiale dans un cycle

$$\lambda(0) \longrightarrow \lambda(t) \longrightarrow \lambda(T) \neq \lambda(0)$$

Cas quantique : phase de la fonction d'onde (Berry, 1984)

Equivalence avec la phase de Aharonov-Bohm

Plan du cours

1. L'approximation adiabatique en physique quantique

Principe, critère de validité

2. La phase de Berry

Phase dynamique et phase géométrique, courbure de Berry et invariance de jauge

3. Quelques exemples (classiques ou quantiques)

Spin dans un champ magnétique, pendule de Foucault, lumière dans une fibre

4. Approche à la Born-Oppenheimer

Variables externes (lentes) et variables internes (rapides)

→ *champ magnétique artificiel*

Plan du cours

1. L'approximation adiabatique en physique quantique

Principe, critère de validité

2. La phase de Berry

Phase dynamique et phase géométrique, courbure de Berry et invariance de jauge

3. Quelques exemples (classiques ou quantiques)

Spin dans un champ magnétique, pendule de Foucault, lumière dans une fibre

4. Approche à la Born-Oppenheimer

Variables externes (lentes) et variables internes (rapides)

→ champ magnétique artificiel

Hamiltonien dépendant d'un paramètre

Hamiltonien $\hat{H}(\boldsymbol{\lambda})$ $\boldsymbol{\lambda}$: paramètre extérieur continu

Pour chaque $\boldsymbol{\lambda}$, on suppose connus ses états propres $|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle$ et leurs énergies $E_n(\boldsymbol{\lambda})$

$$\hat{H}(\boldsymbol{\lambda})|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle = E_n(\boldsymbol{\lambda}) |\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle$$

Exemple : moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ associé à un spin S placé dans un champ magnétique \mathbf{B} .

$$\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathbf{B} \qquad \hat{H}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \hat{H}(\mathbf{B}) = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$$

Pour ce moment magnétique : $|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle = |S, m\rangle_{\mathbf{n}}$ $\mathbf{n} = \mathbf{B}/B$

Exemple 2 : atome et champ lumineux monochromatique

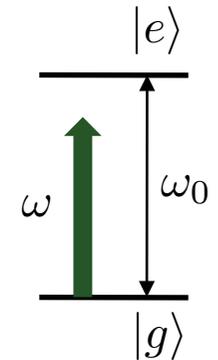
Description semi-classique de l'interaction atome - rayonnement :

- description quantique des degrés de liberté internes (niveaux d'énergie électroniques)
- description classique des degrés de liberté externes :
position \mathbf{r} et impulsion \mathbf{p} du centre de masse

Modèle d'atome « à deux niveaux » internes : $|g\rangle$ $|e\rangle$

Atome au repos et localisé au point \mathbf{r} ,
à l'approximation du champ tournant

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \kappa^*(\mathbf{r}) \\ \kappa(\mathbf{r}) & -\Delta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \Delta = \omega - \omega_0 & : \text{désaccord} \\ \kappa & : \text{fréquence de Rabi} \end{array}$$



La position \mathbf{r} de l'atome joue ici le rôle du paramètre de contrôle λ .

Evolution du système (1)

Supposons que le paramètre λ , contrôlé par l'expérimentateur, dépend du temps

$$\text{Etat du système : } |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle$$

$$\text{Equation de Schrödinger : } i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}[\lambda(t)] |\psi(t)\rangle$$

$$\text{membre de gauche : } \frac{d}{dt} [c_n |\psi_n(\lambda)\rangle] = \dot{c}_n |\psi_n(\lambda)\rangle + c_n \frac{d|\psi_n(\lambda)\rangle}{dt}$$

$$\text{avec } \frac{d|\psi_n(\lambda)\rangle}{dt} = \dot{\lambda} \cdot |\nabla \psi_n(\lambda)\rangle$$

$$\text{membre de droite : } \hat{H} [c_n |\psi_n(\lambda)\rangle] = c_n E_n |\psi_n(\lambda)\rangle$$

Evolution du système (2)

Etat du système : $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\boldsymbol{\lambda}(t)]\rangle$

On déduit de l'équation de Schrödinger le système différentiel:

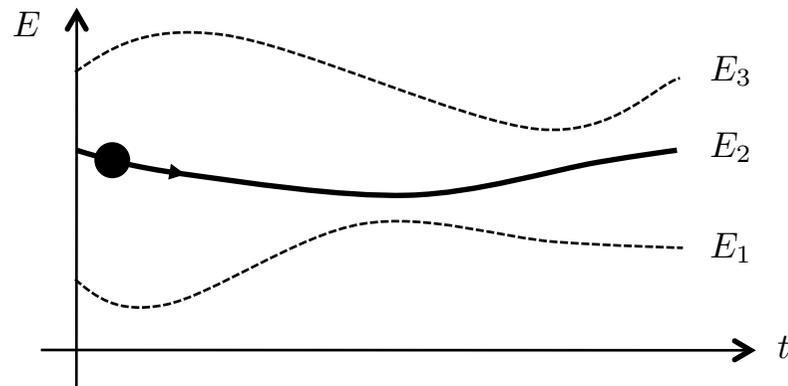
$$i\hbar \dot{c}_n = E_n(t) c_n(t) - \hbar \sum_{\ell} \alpha_{n,\ell}(t) c_{\ell}(t)$$

où on a posé : $\alpha_{n,\ell}(t) = i \dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \langle \psi_n(\boldsymbol{\lambda}) | \nabla \psi_{\ell}(\boldsymbol{\lambda}) \rangle$

Les coefficients $\alpha_{n,\ell}$ caractérisent à quelle vitesse les vecteurs de base $|\psi_n(\boldsymbol{\lambda})\rangle$ « tournent ».

A ce stade, aucune approximation n'a été faite ; la résolution du système différentiel sur les coefficients c_n donne accès à toute la dynamique du système

Principe de l'approximation adiabatique



$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle$$

$$\text{initialement} \begin{cases} c_\ell(0) = 1 \\ c_n(0) = 0 \quad \text{si } n \neq \ell \end{cases}$$

Si la variation dans le temps du paramètre λ de l'hamiltonien est suffisamment lente, on reste sur le même état :

$$\begin{cases} |c_\ell(t)| \approx 1 \\ |c_n(t)| \ll 1 \quad \text{si } n \neq \ell \end{cases} \quad \text{à tout instant } t$$

Critère de validité (cf. Messiah):

$$\frac{\text{vitesse angulaire maximum de } \psi_\ell}{\text{pulsation de Bohr minimum associée à } \psi_\ell} \ll 1$$

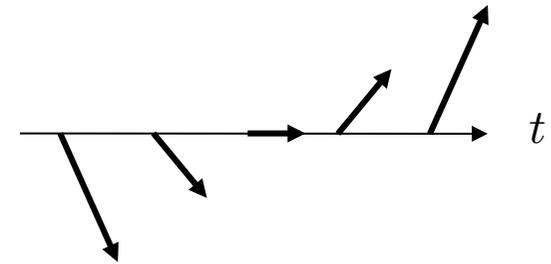
Validité de l'approximation adiabatique sur un exemple

Basculement adiabatique d'un spin ½ par renversement d'un champ magnétique

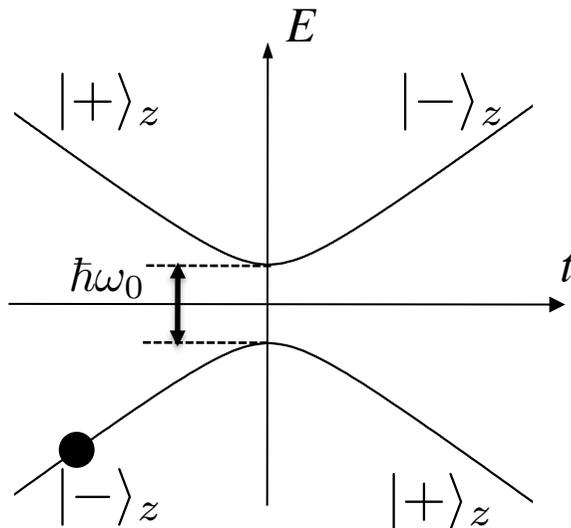
$$\mathbf{B}(t) = B_0 (\mathbf{u}_x + (t/\tau) \mathbf{u}_z)$$

$|t| \gg \tau$ et $t < 0$: $\mathbf{B}(t)$ pointe dans la direction $-\mathbf{u}_z$

$t \gg \tau$ et $t > 0$: $\mathbf{B}(t)$ pointe dans la direction $+\mathbf{u}_z$



Moment magnétique μ : $E_{\pm}(t) = \pm \mu B_0 (1 + t^2/\tau^2)^{1/2}$ $\frac{\hbar\omega_0}{2} = \mu B_0$



Pulsation de Larmor minimale : ω_0

Vitesse de « rotation » des états : $1/\tau$

Critère de suivi adiabatique :

$$\frac{1/\tau}{\omega_0} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 \tau \gg 1$$

Plan du cours

1. L'approximation adiabatique en physique quantique

2. La phase de Berry

Phase dynamique et phase géométrique, courbure de Berry et invariance de jauge

- Optique, Pancharatnam (1956) : changement de phase d'une lumière polarisée de vecteur d'onde donné, quand le faisceau lumineux traverse une série de polariseurs.
- Physique moléculaire, Mead & Truhlar (1979) : subtilités dans l'approximation de Born–Oppenheimer (notion d'effet Aharonov–Bohm moléculaire).

3. Quelques exemples (classiques ou quantiques)

4. Approche à la Born-Oppenheimer

Equation d'évolution approchée

Seul l'état $|\psi_\ell[\lambda]\rangle$ est appréciablement peuplé à chaque instant :

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n[\lambda]\rangle \approx c_\ell |\psi_\ell[\lambda]\rangle \quad |c_\ell(t)| = 1 \quad \forall t$$

Equation d'évolution pour le coefficient c_ℓ :

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{c}_\ell &= \left[E_\ell(t) - i\hbar \dot{\lambda} \cdot \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle \right] c_\ell \\ &= \left[E_\ell(t) - \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_\ell(\lambda) \right] c_\ell \end{aligned}$$

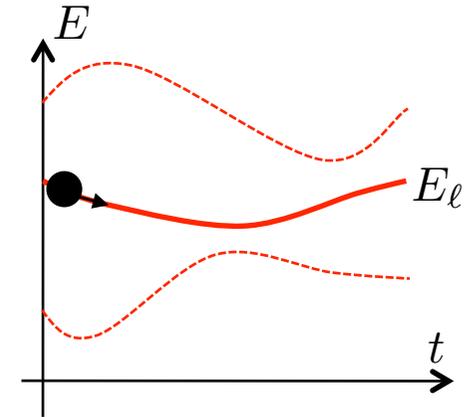
où on a introduit le vecteur réel appelé **connexion de Berry** : $\mathcal{A}_\ell(\lambda) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle$

Réalité de $\mathcal{A}_\ell(\lambda)$:

$$\langle \psi_\ell | \psi_\ell \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla \psi_\ell | \psi_\ell \rangle + \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle \text{ imaginaire.}$$

Cette notation n'est pas choisie au hasard : $\mathcal{A}_\ell(\lambda)$ va jouer le rôle de potentiel vecteur

Phase dynamique et phase géométrique



On intègre l'équation d'évolution approchée:

$$i\hbar \dot{c}_\ell = \left[E_\ell(t) - \dot{\lambda} \cdot \mathcal{A}_\ell(\lambda) \right] c_\ell$$

$$\longrightarrow c_\ell(t) = e^{i\Phi^{\text{dyn.}}(t)} e^{i\Phi^{\text{geom.}}(t)} c_\ell(0)$$

où on a fait apparaître la phase dynamique : $\Phi^{\text{dyn.}}(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_\ell(t') dt'$

et la phase géométrique :

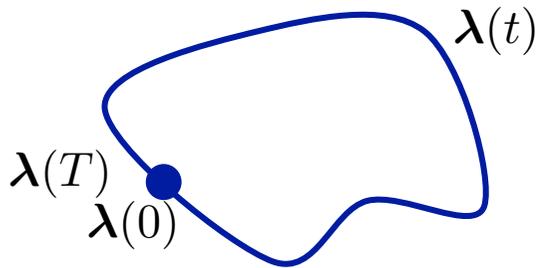
$$\Phi^{\text{geom.}}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \dot{\lambda}(t') \cdot \mathcal{A}_\ell[\lambda(t')] dt' = \frac{1}{\hbar} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} \mathcal{A}_\ell(\lambda) \cdot d\lambda$$

$\Phi^{\text{dyn.}}$: phase habituelle qui apparaît même pour un hamiltonien indépendant du temps

c'est la phase qui crée le mouvement en physique quantique

$\Phi^{\text{geom.}}$: phase liée à la variation de $\lambda(t)$ et qui ne dépend que de la « trajectoire » de ce paramètre

Le cas d'un circuit fermé $\lambda(0) \longrightarrow \lambda(t) \longrightarrow \lambda(T) = \lambda(0)$



$$\Phi^{\text{geom.}}(T) = \frac{1}{\hbar} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(T)} \mathcal{A}_\ell(\lambda) \cdot d\lambda.$$

$$\longrightarrow \Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_\ell(\lambda) \cdot d\lambda$$

Est-ce équivalent à la phase de Aharonov-Bohm ?

Transformation de jauge : $|\psi_n(\lambda)\rangle \longrightarrow |\tilde{\psi}_n(\lambda)\rangle = e^{i\Omega(\lambda)/\hbar} |\psi_n(\lambda)\rangle$

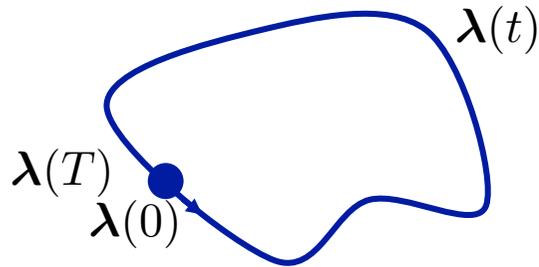
La connexion de Berry $\mathcal{A}_\ell(\lambda) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle$ est alors modifiée en :

$$\tilde{\mathcal{A}}_\ell(\lambda) = \mathcal{A}_\ell(\lambda) - \nabla \Omega(\lambda)$$

Comme on a toujours $\oint \nabla \Omega(\lambda) \cdot d\lambda = 0$, la phase géométrique $\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$

n'est pas modifiée par ce changement de jauge.

Bilan pour une évolution adiabatique



Le paramètre λ décrit un circuit fermé \mathcal{C}

A chaque instant : $|\psi(t)\rangle \approx c_\ell(t) |\psi_\ell[\boldsymbol{\lambda}(t)]\rangle$

$$c_\ell(t) = e^{i\Phi^{\text{dyn.}}(t)} e^{i\Phi^{\text{geom.}}(t)} c_\ell(0)$$

Les deux phases $\Phi^{\text{dyn.}}$ et $\Phi^{\text{geom.}}$ sont invariantes de jauge : quantités physiques

$$\Phi^{\text{dyn.}}(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_\ell(t) dt \qquad \Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) \cdot d\boldsymbol{\lambda}$$

La phase dynamique répond à la question :

Combien de temps a duré le voyage ?

La phase géométrique répond à la question :

Par où est passé le système au cours de son voyage ?

La courbure de Berry : champ magnétique artificiel

On se restreint maintenant au cas où le paramètre λ évolue dans un espace à deux ou trois dimensions

- position d'une particule
- quasi-impulsion dans une zone de Brillouin
- champ magnétique extérieur

On introduit le vecteur réel *courbure de Berry* : $\mathcal{B}_\ell = \nabla \times \mathcal{A}_\ell$

$$\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_\ell(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{1}{\hbar} \iint_S \mathcal{B}_\ell \cdot d^2S$$

La courbure de Berry $\mathcal{B}_\ell(\lambda)$ est invariante dans un changement de jauge : c'est une quantité physique au même titre que $\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$.

Mais à la différence de $\Phi^{\text{geom.}}(\mathcal{C})$, la courbure de Berry $\mathcal{B}_\ell(\lambda)$ est une quantité locale, comme le champ magnétique en électromagnétisme.

Propriétés de la courbure de Berry

A partir des définitions $\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \times \mathcal{A}_\ell$ et $\mathcal{A}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle$, on obtient

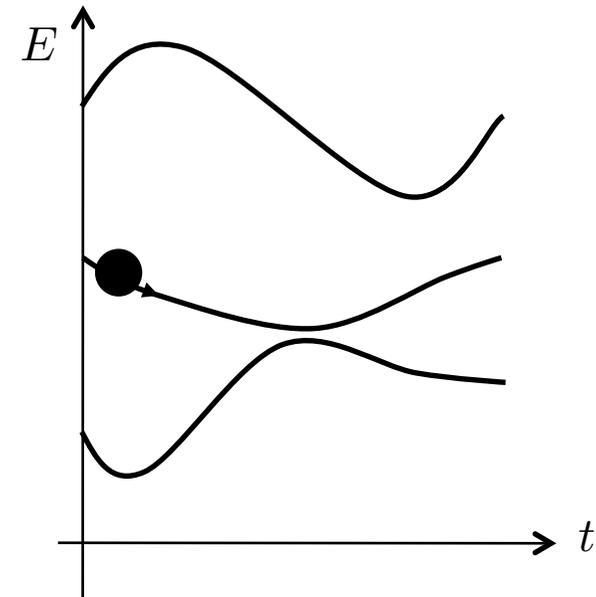
$$\mathcal{B}_\ell = i\hbar \langle \nabla \psi_\ell | \times | \nabla \psi_\ell \rangle$$

Dans les calculs numériques, il n'est pas toujours simple de maintenir la continuité de la phase des états propres $|\psi_\ell\rangle$. Dans ce cas, on a intérêt à utiliser l'expression équivalente :

$$\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = i\hbar \sum_{n \neq \ell} \frac{\langle \psi_\ell | \nabla \hat{H} | \psi_n \rangle \times \langle \psi_n | \nabla \hat{H} | \psi_\ell \rangle}{(E_\ell - E_n)^2}$$

- Invariance de jauge évidente sous cette forme.
- Si l'énergie d'un autre état $|\psi_n\rangle$ devient proche de celle de l'état $|\psi_\ell\rangle$, la courbure de Berry devient très grande en ce point.
- La somme des courbures de Berry est partout nulle:

$$\sum_{\ell} \mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = 0$$



Plan du cours

1. L'approximation adiabatique en physique quantique

Principe, critère de validité

2. La phase de Berry

Phase dynamique et phase géométrique, courbure de Berry et invariance de jauge

3. Quelques exemples (classiques ou quantiques)

Spin dans un champ magnétique, pendule de Foucault, lumière dans une fibre

4. Approche à la Born-Oppenheimer

Variables externes (lentes) et variables internes (rapides)

→ *champ magnétique artificiel*

Spin dans un champ magnétique extérieur

Particule de spin $\frac{1}{2}$ avec un moment magnétique μ : $\hat{H} = -\mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\hbar\omega}{2} \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$

Pulsation de Larmor : $\frac{\hbar\omega}{2} = -\mu B$ $\vec{n} = \frac{\mathbf{B}}{B}$ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$: matrices de Pauli

Pour ce problème, le champ magnétique extérieur joue le rôle de paramètre λ et on a

$$\lambda \equiv B, \quad \nabla H = -\hat{\boldsymbol{\mu}}$$

Les états $|\psi_\ell\rangle$ sont les deux états de spin $|-\ : \mathbf{n}\rangle$ et $|+\ : \mathbf{n}\rangle$

Si le spin suit adiabatiquement l'état $|\pm : \mathbf{n}\rangle$ quand le champ magnétique décrit une trajectoire fermée, alors son vecteur d'état accumule la phase géométrique :

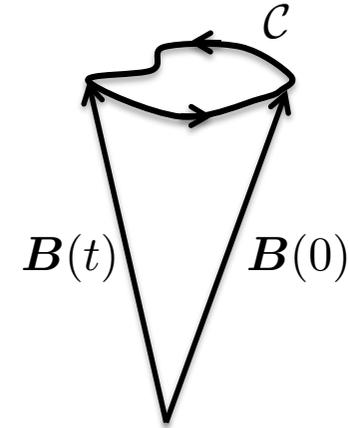
$$\Phi_{\pm}^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\hbar} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{B}_{\pm} \cdot d^2S \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}_+ = i\hbar \frac{\langle + : \mathbf{n} | \hat{\boldsymbol{\mu}} | - : \mathbf{n} \rangle \times \langle - : \mathbf{n} | \hat{\boldsymbol{\mu}} | + : \mathbf{n} \rangle}{(\hbar\omega)^2}$$

$$\mathcal{B}_- = -\mathcal{B}_+$$

Spin dans un champ magnétique extérieur (suite)

Un calcul relativement simple conduit à

$$\mathcal{B}_+ = +\hbar \frac{\mathbf{B}}{2B^3}, \quad \mathcal{B}_- = -\hbar \frac{\mathbf{B}}{2B^3}$$



Le champ magnétique décrit un contour fermé sans jamais passer par zéro :

$$\mathcal{C} : \quad \mathbf{B}(0) \rightarrow \mathbf{B}(t) \rightarrow \mathbf{B}(T) = \mathbf{B}(0)$$

Alors la phase de Berry vaut

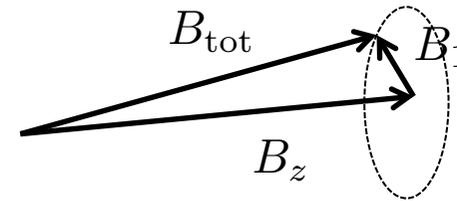
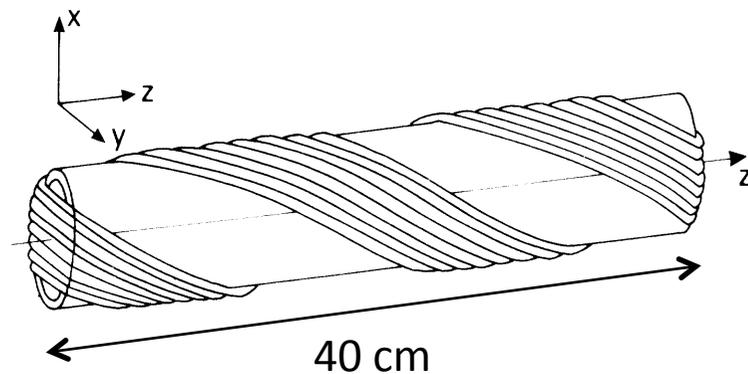
$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}^{\text{geom.}}(\mathcal{C}) &= \frac{1}{\hbar} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{B}_{\pm} \cdot d^2\mathbf{S} \\ &= \pm \iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{B}}{2B^3} \cdot d^2\mathbf{S} = \pm \frac{\Omega}{2} \end{aligned}$$

Ω : angle solide sous-tendu par le contour \mathcal{C} vu depuis l'origine

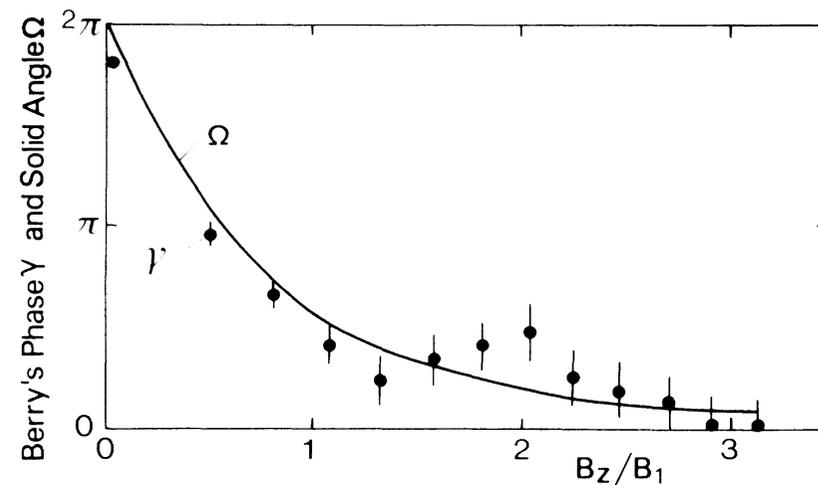
Expérience de Bitter et Dubbers (1987)

Jet de neutrons de vitesse 500 m/s, de polarisation ajustable

Solénoïde générant un champ magnétique hélicoïdal

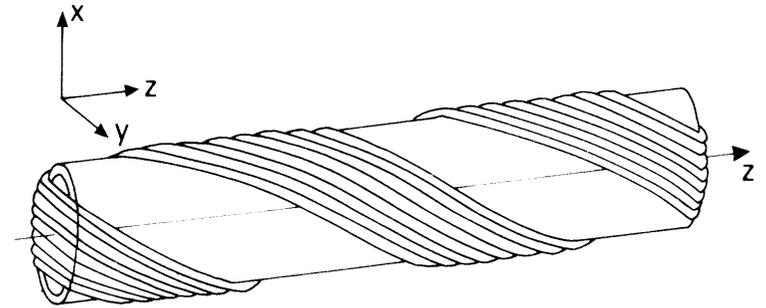


Mesure de la phase de Berry à partir de la matrice de transfert donnant la polarisation en sortie en fonction de la polarisation en entrée



Bon accord (limite de l'adiabaticité aux petits B_z)

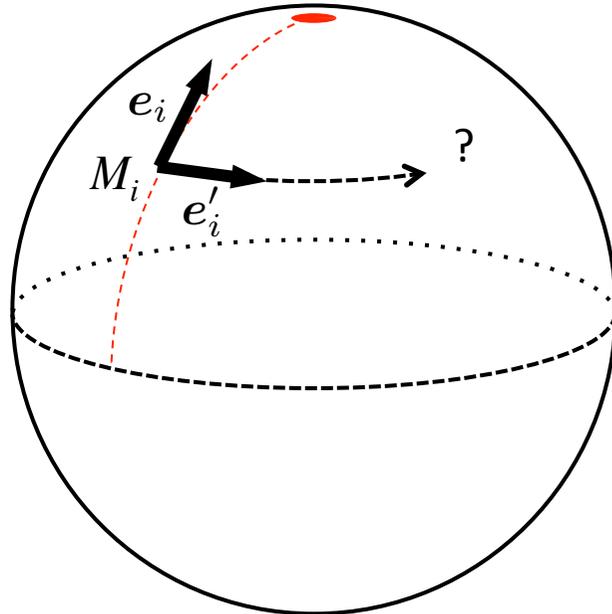
Conclusion de Bitter et Dubbers (1987)



We draw the following conclusion from our investigation:

- On the one hand, Berry's phase law certainly is part of a far-reaching concept;
- on the other hand, in its simplest manifestation, which we believe to have realized, the appearance of a topological phase seems to be trivial: It can be generated or transformed away by going to a rotating-reference frame, which is a standard procedure in NMR work, and which also works in the classical case.

Le transport parallèle sur une sphère



Vecteur initial e_i tangent à la sphère en M_i

On veut « transporter » ce vecteur en un autre point de la sphère en imposant les conditions suivantes :

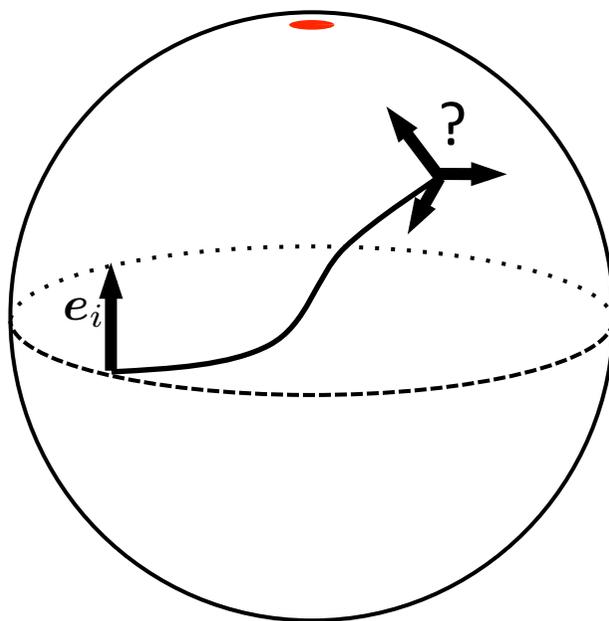
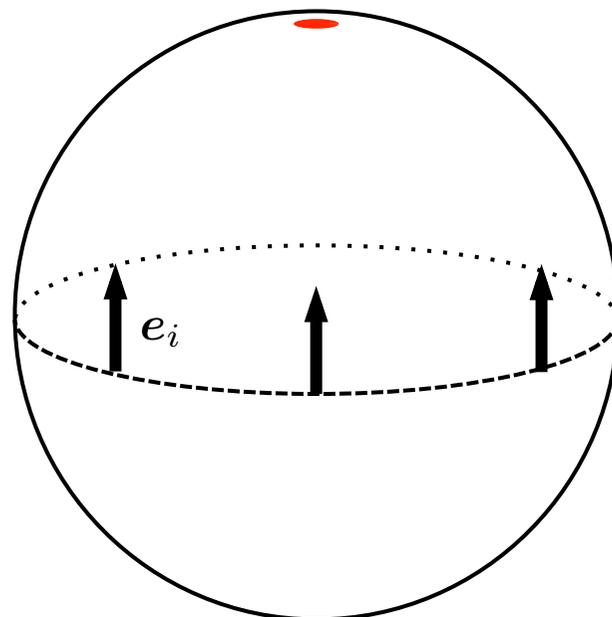
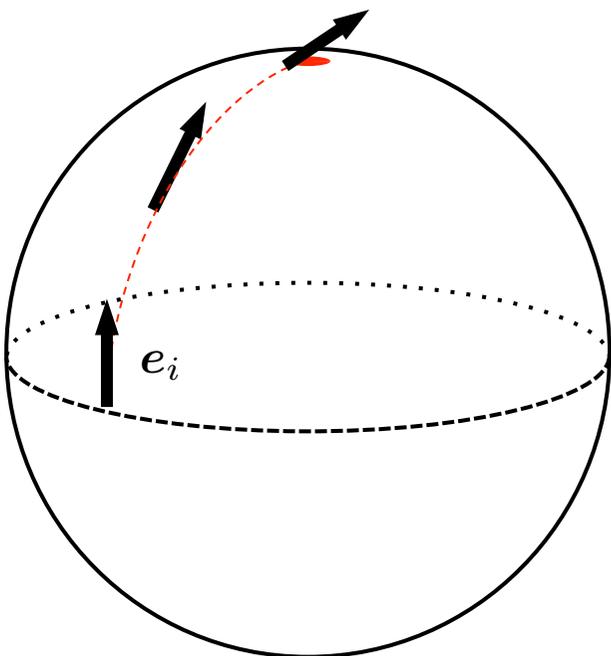
- Le vecteur e reste toujours tangent à la sphère
- On ne veut pas de « torsion » normale à la surface de la sphère

L'absence de torsion s'exprime à partir du trièdre $\{e, e', r\}$ avec r normal à la sphère

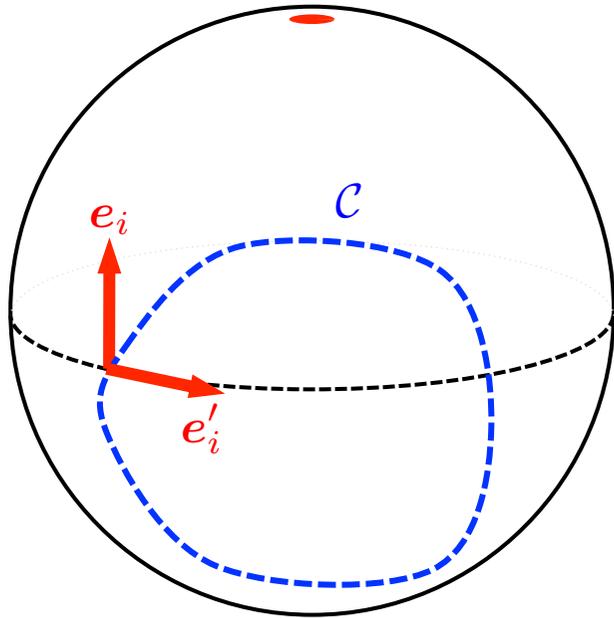
Ω : vecteur rotation instantanée du trièdre, avec $\dot{e} = \Omega \times e$ $\dot{e}' = \Omega \times e'$ $\dot{r} = \Omega \times r$

On impose $\Omega \cdot r = 0$ ce qui est équivalent à fixer $\frac{de}{dt} \perp e'$

Exemples de transport parallèle



Phase géométrique et transport parallèle



On fait un transport parallèle des vecteurs e, e' le long du contour fermé \mathcal{C}

A la fin du parcours, les vecteurs e, e' ont tournés d'un angle α :

$$e_f = e_i \cos \alpha + e'_i \sin \alpha$$

$$e'_f = -e_i \sin \alpha + e'_i \cos \alpha$$

Que vaut $\alpha(\mathcal{C})$?

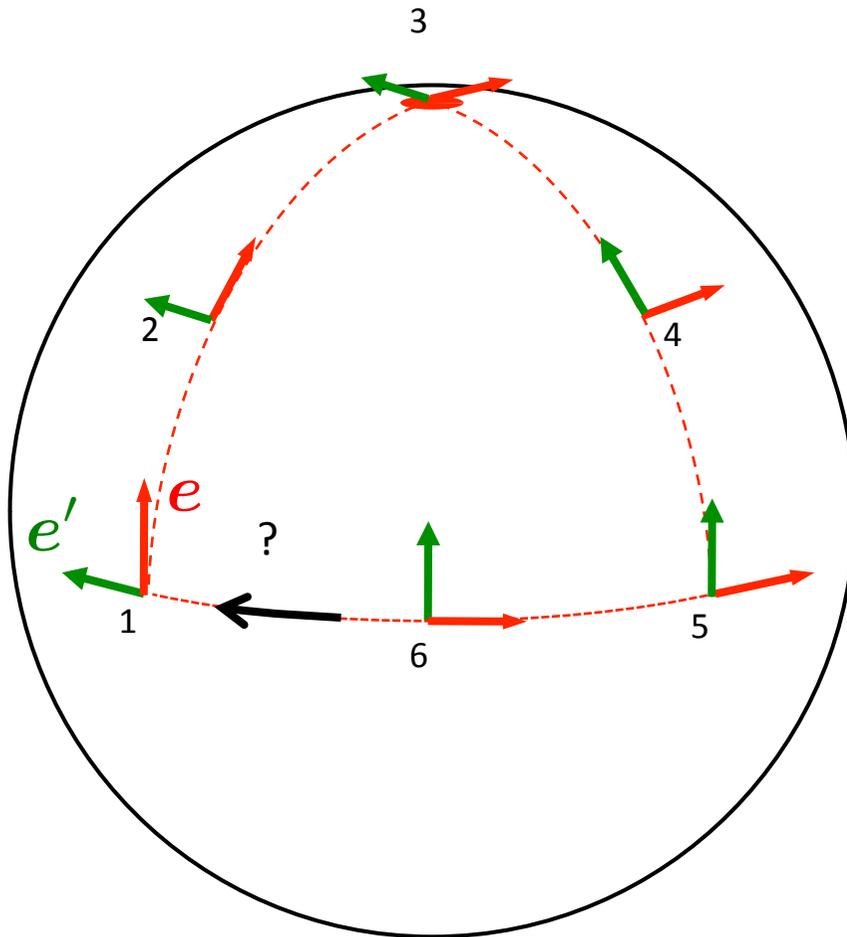
On construit le vecteur complexe $\Psi_i = e_i + ie'_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \quad \Psi_i = e_i + ie'_i &\longrightarrow \Psi_f = e_f + ie'_f \\ &= (e_i \cos \alpha + e'_i \sin \alpha) + i(-e_i \sin \alpha + e'_i \cos \alpha) \\ &= e^{-i\alpha} \Psi_i. \end{aligned}$$

On peut montrer que $\alpha(\mathcal{C})$ est l'angle solide sous-tendu par \mathcal{C} depuis le centre de la sphère

Formellement identique au résultat de Berry pour un spin dans un champ magnétique

Exemple simple de transport parallèle sur un contour fermé



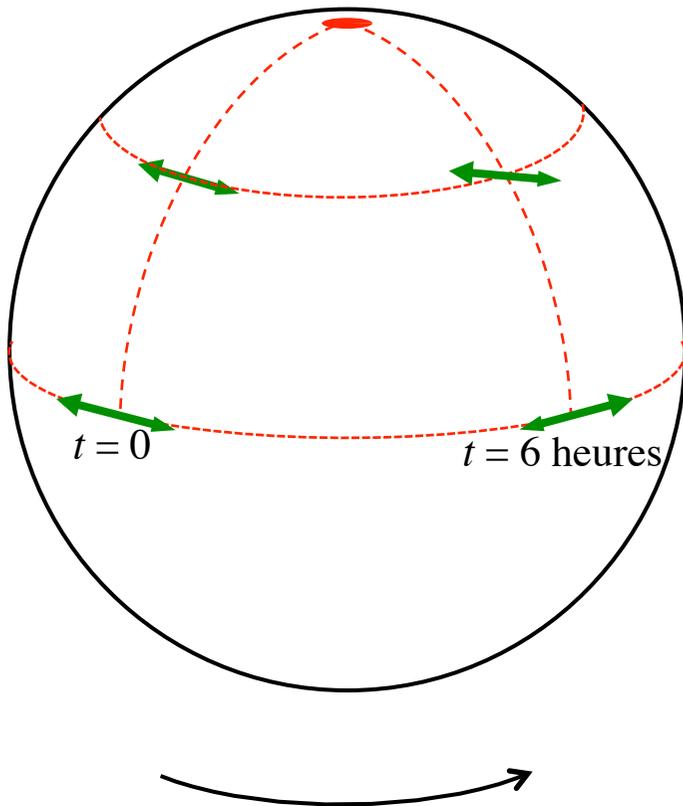
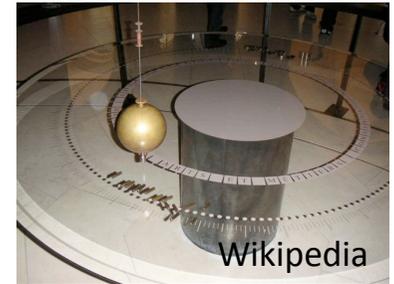
Rotation du repère e, e' de $\pi/2$

Angle solide sous-tendu par ce contour :

$$\frac{1}{8} 4\pi = \pi/2$$

La relation générale est bien vérifiée sur ce cas particulier

Le pendule de Foucault



A partir du principe fondamental de la dynamique, on peut montrer le résultat suivant :

Le vecteur horizontal définissant (avec la verticale) le plan d'oscillation du pendule subit un transport parallèle

En 24 heures, le point d'accroche du pendule effectue un circuit fermé sous-tendant l'angle solide

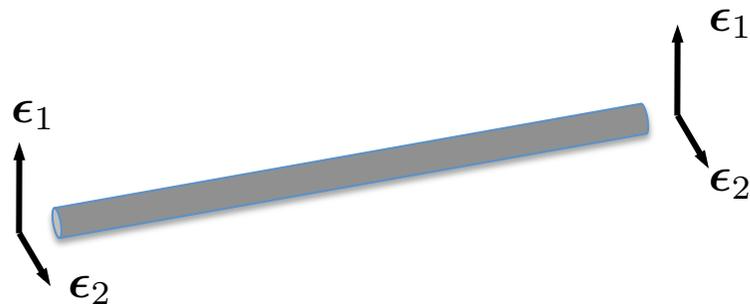
$$\Omega = 2\pi(1 - \sin \lambda)$$

λ : latitude

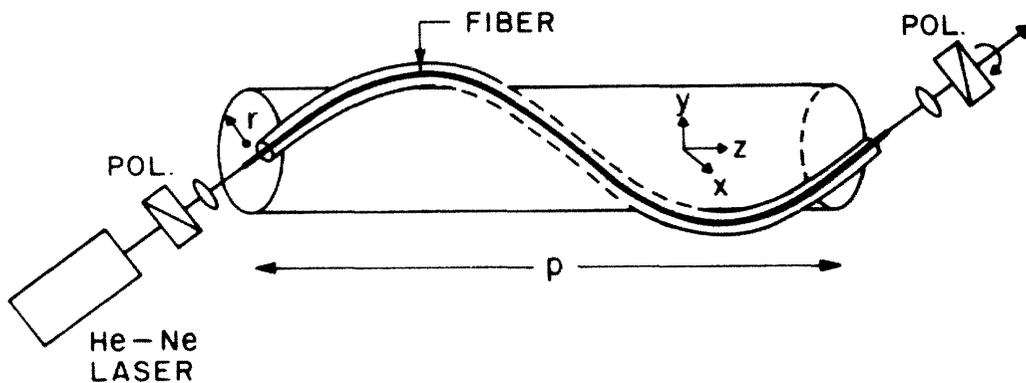
Lumière dans une fibre optique

Fibre optique monomode isotrope

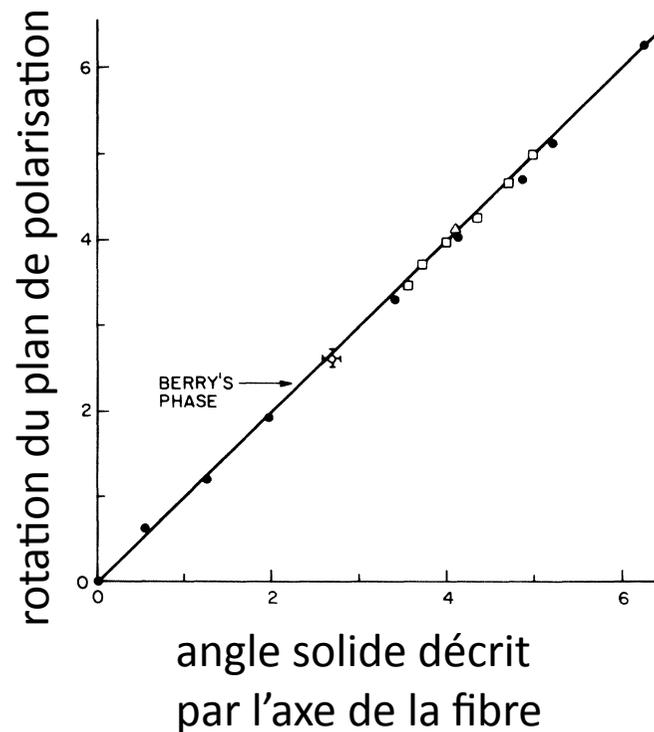
En l'absence de torsion de la fibre, il est simple de trouver la polarisation de sortie connaissant la polarisation d'entrée



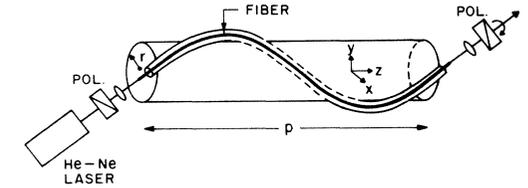
Tomita & Chiao, 1986



Ils interprètent leur résultat en terme de phase de Berry (quantique)



Lumière dans une fibre optique (suite)



Tomita & Chiao (1986): In this Letter, we report an experimental study of the optical activity arising from Berry's phase in a single-mode fiber. ... The experiments reported here are essentially at the classical level, since we used an enormous number of photons in a single coherent state.

Haldane (1986): ... the result for the rotation of polarization of light in noncoplanar optical fibers has a transparently simple geometrical, classical derivation. Suggestions ... that the effect is best understood quantum mechanically are thus misleading...

Berry (1990):

(i) Where in Maxwell's theory is the anholonomy?

Réponse : la propagation de la lumière dans une fibre se fait en suivant les lois du transport parallèle pour la polarisation de la lumière

(ii) Why is it so tricky to understand the effect classically, yet so straightforward quantum-mechanically?

Réponse : c'est un pseudo-problème ; cf. Feynman : « The photon equation is just the same as Maxwell's equations »

Plan du cours

1. L'approximation adiabatique en physique quantique

Principe, critère de validité

2. La phase de Berry

Phase dynamique et phase géométrique, courbure de Berry et invariance de jauge

3. Quelques exemples (classiques ou quantiques)

Spin dans un champ magnétique, pendule de Foucault, lumière dans une fibre

4. Approche à la Born-Oppenheimer

Variables externes (lentes) et variables internes (rapides)

→ champ magnétique artificiel

Traitement quantique complet pour un atome

Degré de liberté externes : opérateurs position et impulsion du centre de masse $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{p}}$

Degré de libertés internes : niveaux d'énergie électroniques

on se limite en général à quelques états internes pertinents : espace de dimension finie

par exemple, atome « à deux niveaux » : $|g\rangle$, $|e\rangle$

Hamiltonien décrivant l'évolution de l'ensemble de ces degrés de libertés :

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} \otimes \hat{1}_{\text{int}}}_{\text{énergie cinétique du centre de masse}} + \underbrace{\hat{H}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}})}_{\text{décrit le couplage du dipôle atomique au rayonnement}}$$

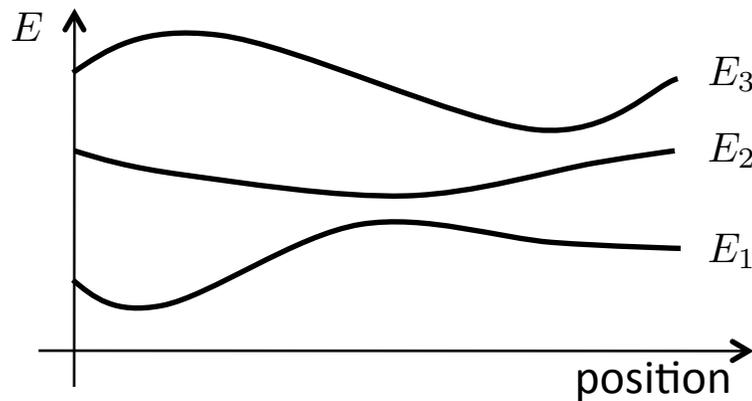
énergie cinétique
du centre de masse

décrit le couplage du dipôle
atomique au rayonnement

Base « habillée » locale pour les variables internes

En tout point \mathbf{r} de l'espace, on considère la base propre de l'hamiltonien interne $\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})$

$$\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})|\psi_n(\mathbf{r})\rangle = E_n(\mathbf{r}) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle$$

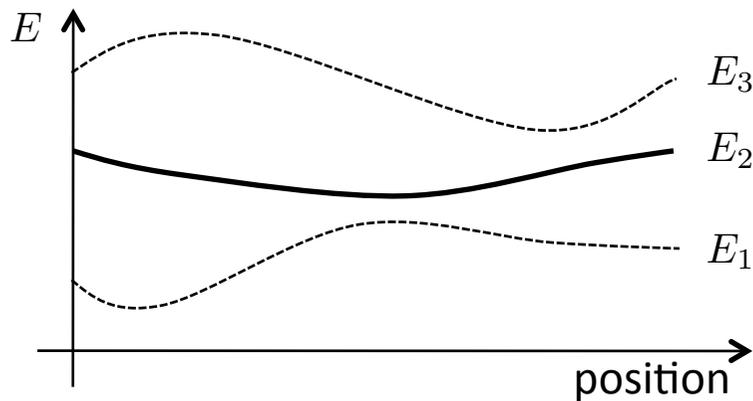


Forme générale du vecteur d'état de l'atome :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \phi_n(\mathbf{r}, t) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle$$

$\phi_n(\mathbf{r}, t)$: amplitude de probabilité pour trouver l'atome au point \mathbf{r} dans l'état interne $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$

L'hypothèse de suivi adiabatique dans ce contexte



On suppose que l'atome est préparé sur un niveau habillé donné $|\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle$ et que les vitesses en jeu sont suffisamment faibles.

A tout instant t ultérieur :

$$\int |\phi_n(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r \ll 1 \quad \text{si } n \neq \ell$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \phi_n(\mathbf{r}, t) |\psi_n(\mathbf{r})\rangle \approx \phi_\ell(\mathbf{r}, t) |\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle$$

Quelle équation du mouvement pour l'amplitude de probabilité $\phi_\ell(\mathbf{r}, t)$?

On part de $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_{\text{tot}} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + \hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t)$

et on projette sur l'état interne $|\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle$

$$\longrightarrow i\hbar \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = \dots$$

Potentiel vecteur et potentiel scalaire effectifs (ou artificiels)

Equation de Schrödinger projetée sur l'état interne $|\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = \left[\underbrace{\frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}))^2}{2M}}_{\text{Energie cinétique avec potentiel vecteur}} + \underbrace{E_\ell(\mathbf{r})}_{\text{Energie du niveau habillé } |\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle : \text{ c'est le potentiel dipolaire « habituel »}} + \underbrace{\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r})}_{\text{Potentiel scalaire additionnel : bonus (ou malus) résultant de l'approximation adiabatique}} \right] \phi_\ell(\mathbf{r}, t)$$

Energie cinétique
avec potentiel vecteur

$$\mathcal{A}_\ell(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \psi_\ell | \nabla \psi_\ell \rangle$$

= connexion de Berry vue
tout au long de ce cours

Energie du niveau
habillé $|\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle$:
c'est le potentiel
dipolaire « habituel »
utiliser pour piéger
les atomes

Potentiel scalaire
additionnel :
bonus (ou malus)
résultant de
l'approximation
adiabatique

Ce que l'on cherche !

Le potentiel scalaire additionnel $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r})$

Calcul explicite :
$$\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq \ell} |\langle \nabla \psi_\ell | \psi_n \rangle|^2$$

atome couplé à la lumière :
$$\mathcal{V}_\ell \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = E_r \quad \text{énergie de recul}$$

Origine physique : énergie cinétique du micromouvement lié aux transitions virtuelles depuis l'état interne occupé $|\psi_\ell(\mathbf{r})\rangle$ vers les autres états $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$

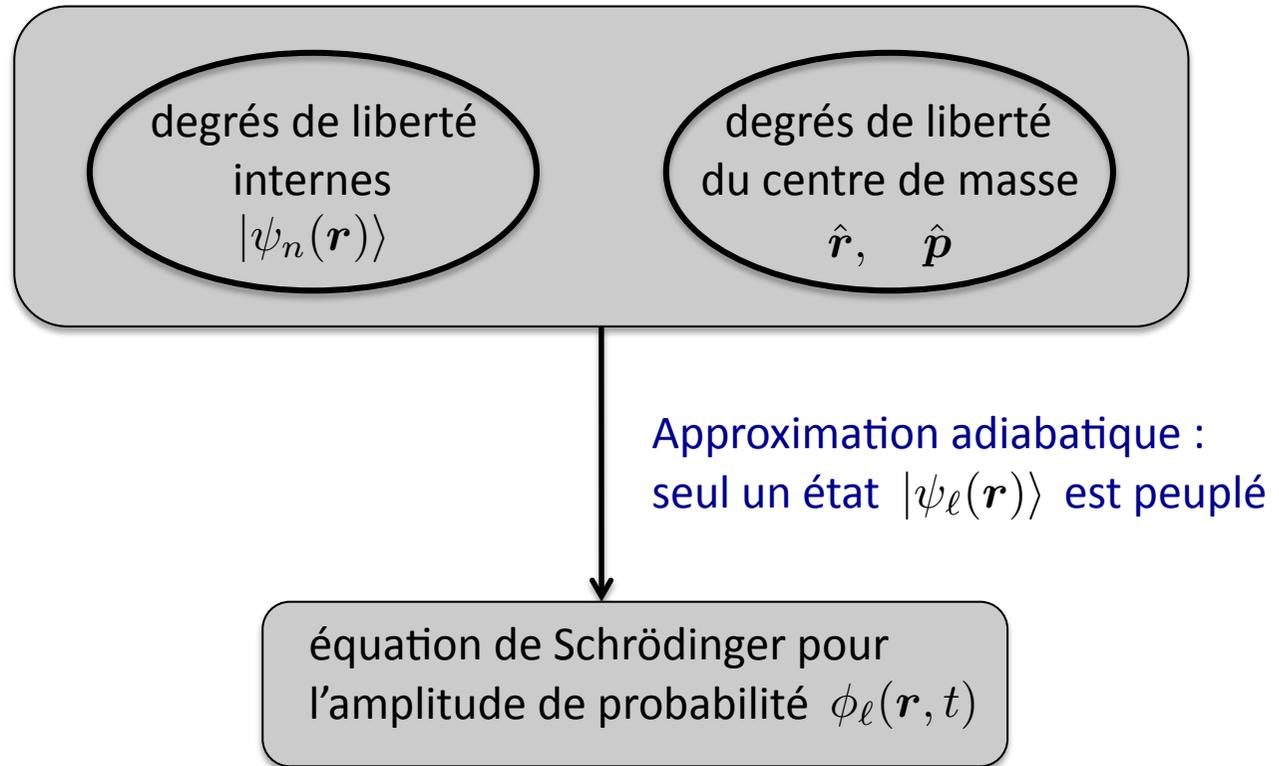
Traitement quantitatif : on introduit l'opérateur force

$$\hat{\mathbf{F}} = -\nabla_{\mathbf{r}} \left(\hat{H}_{\text{tot}} \right) = -\nabla_{\mathbf{r}} \left(\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \right)$$

on remarque que cette force fluctue : $\langle \hat{\mathbf{F}}^2 \rangle \neq \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle^2$

et on calcule l'énergie cinétique engendrée par ces fluctuations.

En résumé :



Mais l'existence des autres états $|\psi_n(\mathbf{r})\rangle$ est essentielle :

- Existence d'un potentiel vecteur/champ magnétique artificiel (ce que l'on recherche)
- Existence d'un potentiel scalaire artificiel (parfois gênant, mais inévitable)

$$\mathcal{B}_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = i\hbar \sum_{n \neq \ell} \frac{\langle \psi_\ell | \nabla \hat{H} | \psi_n \rangle \times \langle \psi_n | \nabla \hat{H} | \psi_\ell \rangle}{(E_\ell - E_n)^2}$$

$$\mathcal{V}_\ell(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{n \neq \ell} |\langle \nabla \psi_\ell | \psi_n \rangle|^2$$