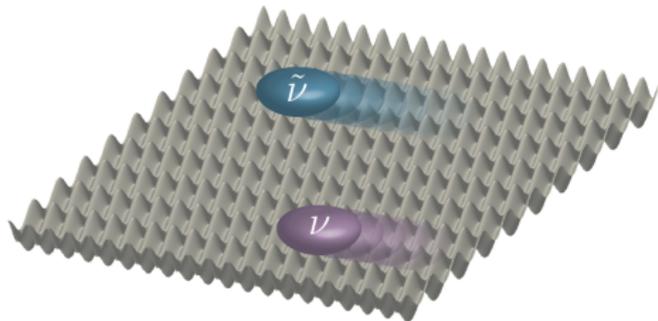


La topologie dans le laboratoire : comment détecter le nombre de Chern et les phases topologiques dans un gaz d'atomes froids ?

Nathan Goldman



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES,
UNIVERSITÉ D'EUROPE

ULB

Chapitre 1

Propriétés locales et globales: Géométrie vs Topologie



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES,
UNIVERSITÉ D'EUROPE

ULB

Le plan



\mathbb{R}^2

Le plan



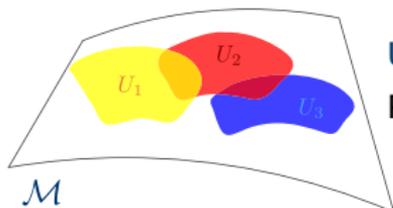
\mathbb{R}^2

La sphère



S^2

Variétés et courbure

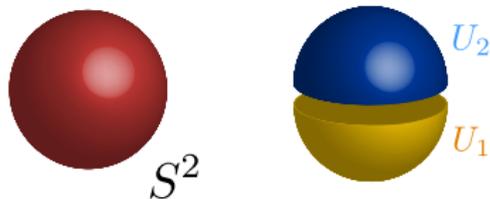


Une **variété** est un objet (potentiellement) compliqué
Pour la décrire, on la recouvre de **cartes** $U_j \sim \mathbb{R}^2$

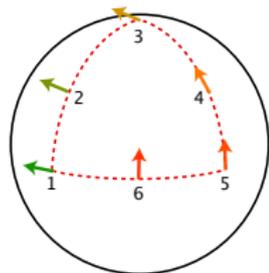
Le plan = 1 carte



La sphère = 2 cartes



La sphère est caractérisée par une **courbure** non nulle



Le défaut du transport parallèle
est une mesure de la **courbure**

Ref. Nakahara

La courbure est une propriété **locale** (géométrique)

Propriétés globales et la topologie

La topologie classe les objets sur base de leurs propriétés globales:

Deux objets appartiennent à des classes différentes s'ils ne peuvent être continument déformés l'un en l'autre

Le nombre de "trous" dans une surface est une propriété globale



$$\nu = 0$$



$$\nu = 1$$



$$\nu = 2$$

Le "genre" ν est un invariant topologique

Le théorème de Gauss-Bonnet: lien remarquable entre local et global

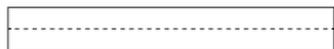
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mathcal{F} dS = 2(1 - \nu)$$

Ref: "Concepts abstraits et quantités numériques"
A. Connes, Bulletin de la SMF, 1987, tome 115

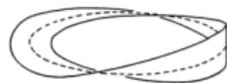
courbure (locale)

invariant topologique (global)

Autre exemple d'invariant: le winding number



$$w = 0$$

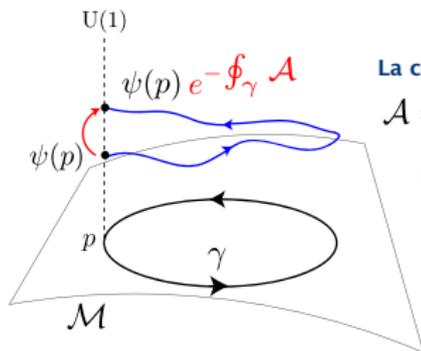
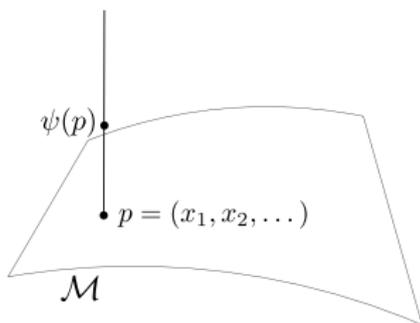


$$w = 1$$

La phase de Berry et l'holonomie

Soit un système quantique décrit par l'opérateur hamiltonien $\hat{H}(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $p = (x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{M}$

Soit un état propre $\psi(p)$ défini au point $p = (x_1, x_2, \dots)$



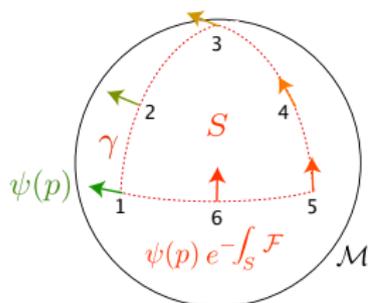
La connexion de Berry

$$\mathcal{A} = \langle \psi | \partial_\mu \psi \rangle dx^\mu$$

$$= \langle \psi | \nabla \psi \rangle \cdot d\mathbf{l}$$

(cf. cours de J. Dalibard)

M. Berry (1983)



$$\oint_\gamma \mathcal{A} = \int_S \mathcal{F} \quad (\text{théorème de Stokes})$$

B. Simon (1983): "La phase de Berry est un défaut de transport parallèle défini sur un espace fibré!"

Construction du fibré: quelques notions

Espace de base: \mathcal{M}

Fibre: $U(1)$

Section ($\mathcal{M} \rightarrow U(1)$): $\psi(p)$ (=choix de la phase, ou de la jauge)

Connexion (transport par.): $\mathcal{A} = \langle \psi | \partial_\mu \psi \rangle dx^\mu$

Courbure: $\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \langle \partial_\nu \psi | \partial_\mu \psi \rangle dx^\mu \wedge dx^\nu$ (courbure de Berry)

Quantal phase factors accompanying adiabatic changes

BY M. V. BERRY, F.R.S.

*H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol,
Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, U.K.*

(Received 13 June 1983)

VOLUME 51, NUMBER 24

PHYSICAL REVIEW LETTERS

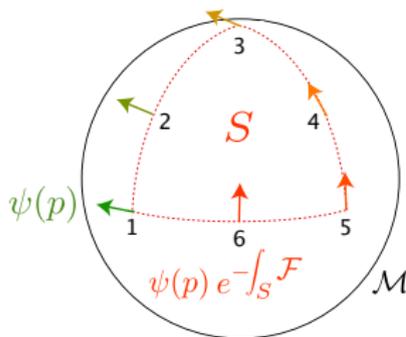
12 DECEMBER 1983

Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase

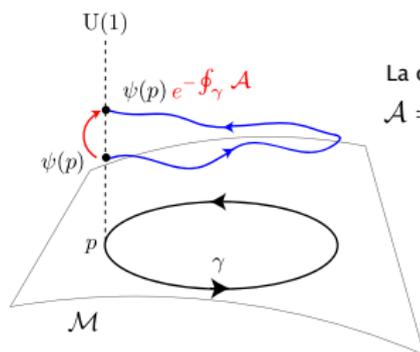
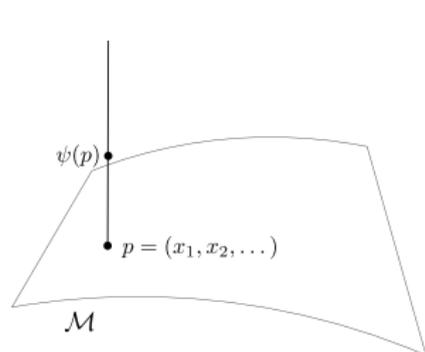
Barry Simon

Departments of Mathematics and Physics, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125
(Received 18 October 1983)

The purpose here is first to advertise what Berry calls a “remarkable and rather mysterious result,” but more basically to try to take the mystery out of it by realizing that γ is an integral of a curvature so that Berry's phenomenon is essentially that of holonomy which is becoming quite familiar to theoretical physicists.⁵ This



La phase de Berry et l'holonomie



La connexion de Berry
 $\mathcal{A} = \langle \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle dx^{\mu}$

M. Berry (1983)

Il s'agit d'approfondir la notion de fibré...

Espace de base: \mathcal{M}

Fibre: $U(1)$

Courbure: $\mathcal{F} = \langle \partial_{\nu} \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ (courbure de Berry)

... pour comprendre les propriétés topologiques associées à la courbure de Berry!

Généralisation du théorème de Gauss-Bonnet...?



$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mathcal{F} dS = 2(1 - \nu)$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} = \nu \quad \dots \text{ que représente l'invariant } \nu ?$$

Chapitre 3

Les fibrés et le nombre de Chern

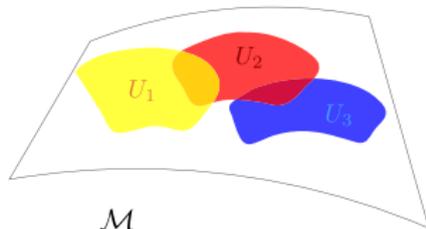
Remerciements à Pierre Beliaevsky (UCL)

Un fibré est essentiellement... un patchwork

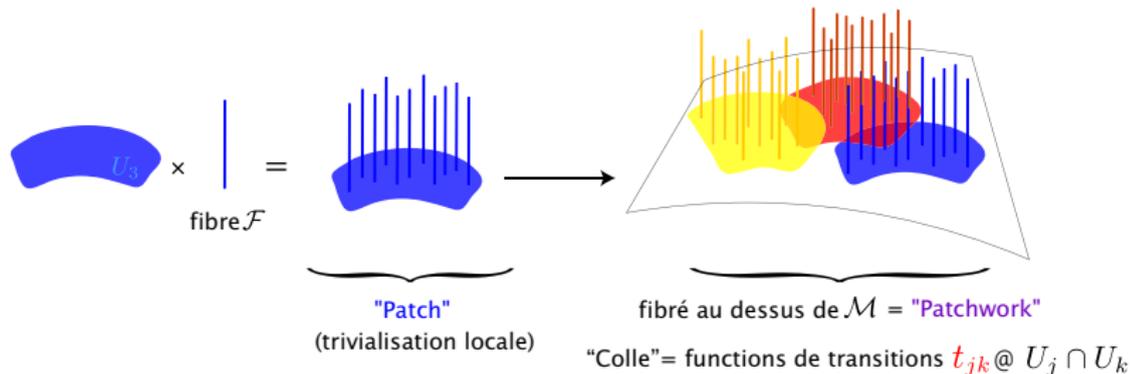
Un **fibré** est un espace construit sur une **variété de base**



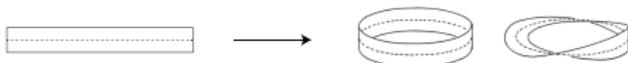
(Wikipedia)



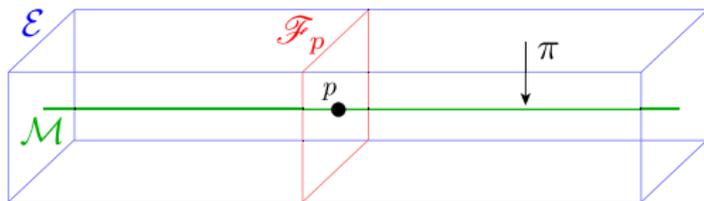
Localement, un fibré est un produit direct de l'espace de base avec une fibre



Globalement, la structure peut être non triviale... selon le collage!



Construction d'un fibré principal sur \mathcal{M}



\mathcal{M} : espace de base

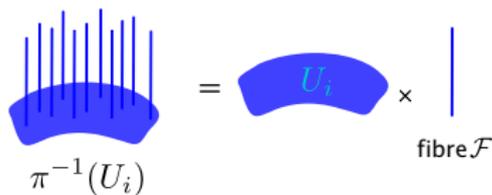
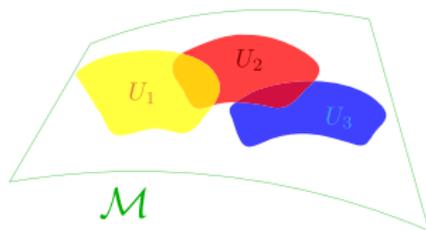
\mathcal{F}_p : la fibre définie au point $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{F}_p \simeq \mathcal{F}$: la fibre principale

\mathcal{E} : espace total

π : la projection = surjection $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, $\pi^{-1}(p) = \mathcal{F}_p$

Localement, un fibré est un produit direct de l'espace de base avec la fibre

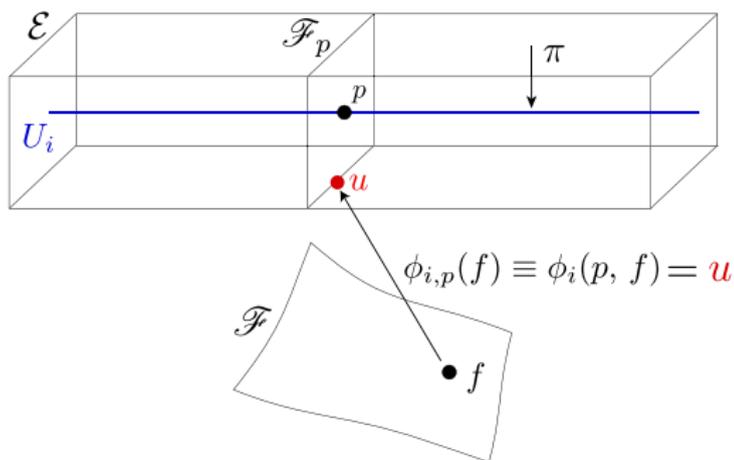
Trivialisation locale: $\phi_i : U_i \times \mathcal{F} \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$,



Fonctions de transition (le collage)

Trivialisation locale: $\phi_i : U_i \times \mathcal{F} \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$,

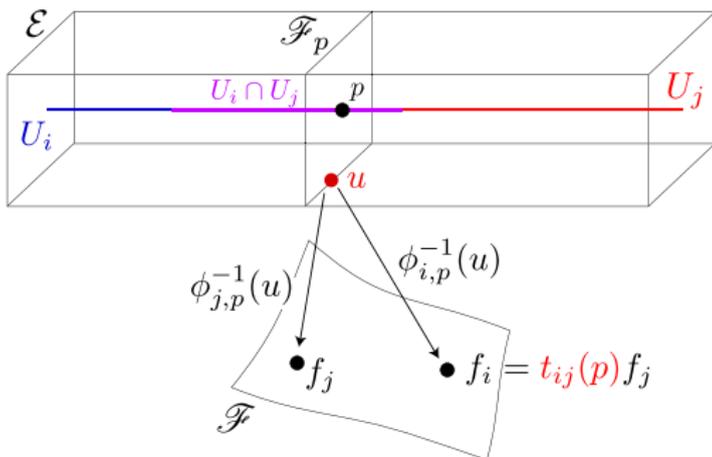
Trivialisation locale au point p : $\phi_{i,p}(f) \equiv \phi_i(p, f)$, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_p$



Fonctions de transition (le collage)

Plaçons-nous dans une zone d'intersection $p \in U_i \cap U_j$

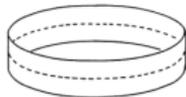
Trivialisations locales au point p : $\phi_{i,p}^{-1}(u) = f_i$ et $\phi_{j,p}^{-1}(u) = f_j$



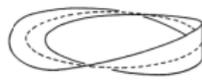
Le collage est donné par les fonctions de transitions $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{F}$

Non-trivialité des fibrés:

$$t_{ij} = \text{id}_{\mathcal{F}}$$



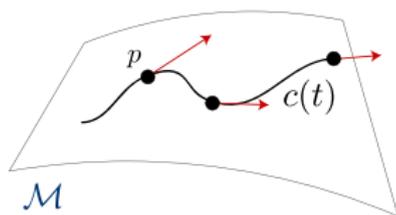
$$t_{ij} \neq \text{id}_{\mathcal{F}}$$



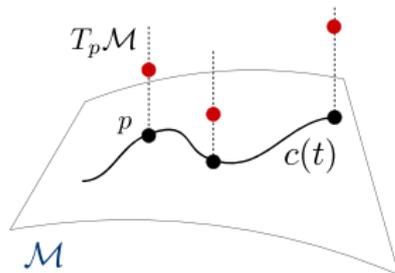
trivialisations globale $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$

Les sections locales

Champ de vecteurs sur une variété et l'espace tangent



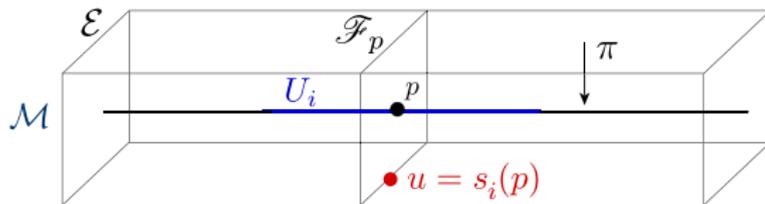
ex: champ de vitesse



un champ de vecteurs = $\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$

Une **section locale** généralise la notion de vecteur pour un fibré

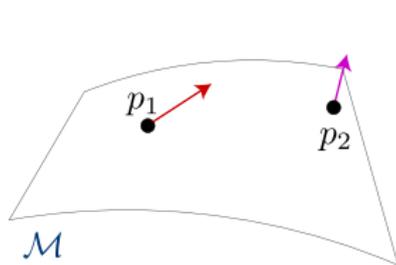
Il s'agit d'une application $s_i: U_i \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s_i = \text{id}_{U_i}$



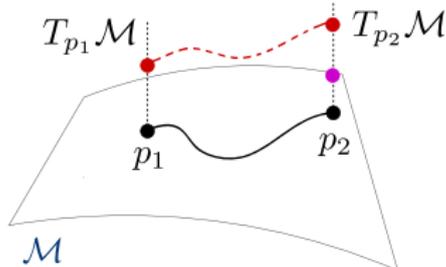
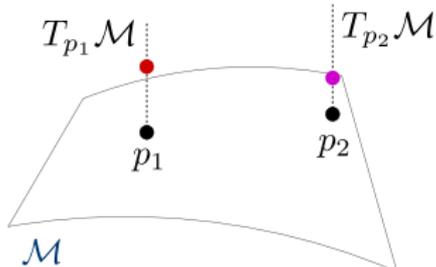
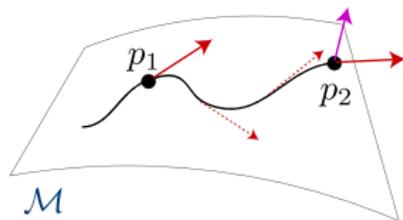
Plaçons-nous dans une zone d'intersection $p \in U_i \cap U_j$: $s_i(p) = s_j(p)t_{ji}(p)$

Transport parallèle et connexion

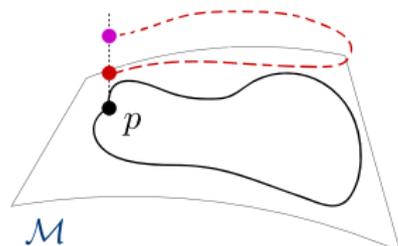
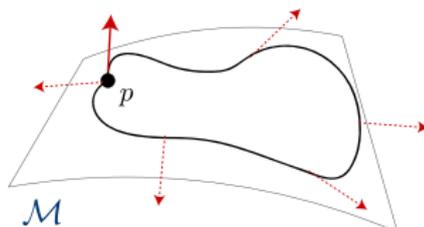
Comment **comparer** des vecteurs situés en deux points? (ex: dérivation)



Solution: le transport parallèle!

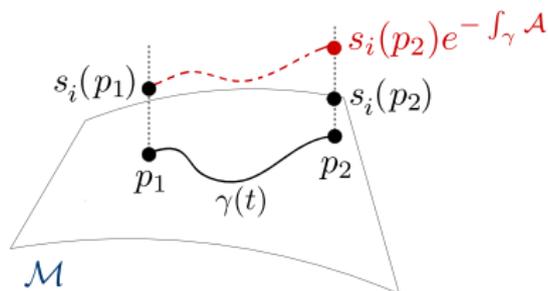
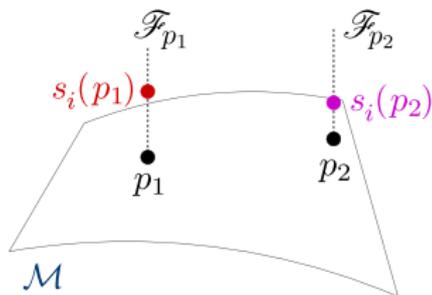


On retrouve le concept de défaut de transport parallèle



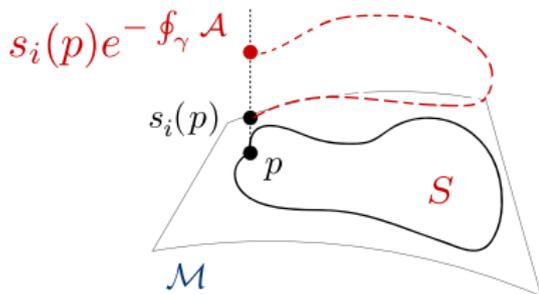
Transport parallèle et connexion

On généralise ceci aux sections des fibrés



Le transport parallèle est réalisé par une **connexion** $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mu} dx^{\mu}$

Le défaut du transport parallèle autour d'une boucle: l'**holonomie**



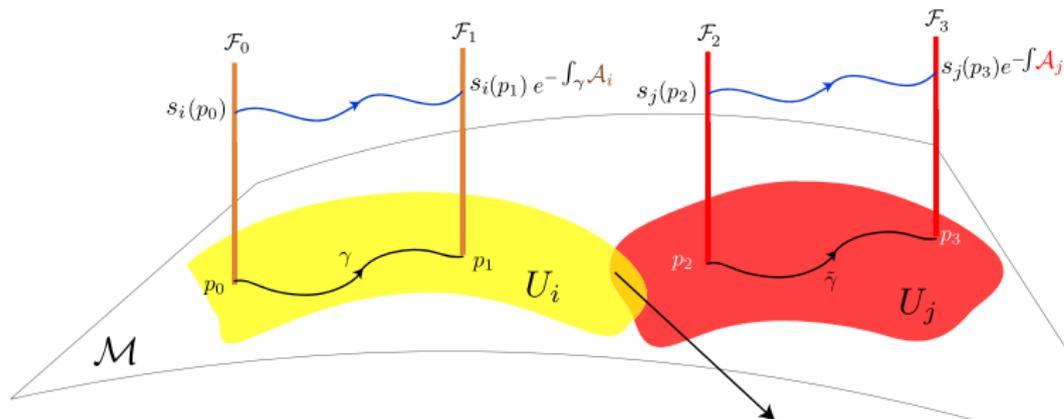
On introduit la **courbure**:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\mathcal{A}_{\mu}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

$$\oint_{\gamma} \mathcal{A} = \int_S \mathcal{F} \quad (\text{théorème de Stokes})$$

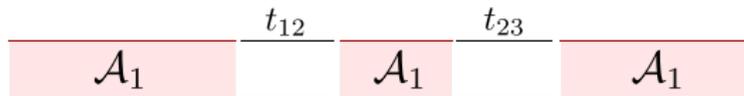
(Ref. Nakahara)

Connexions locales et compatibilité

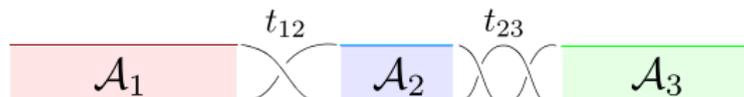
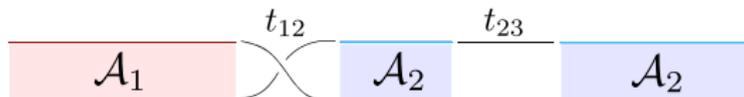


Condition de compatibilité pour la connexion locale $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i + t_{ij}^{-1} dt_{ij}$

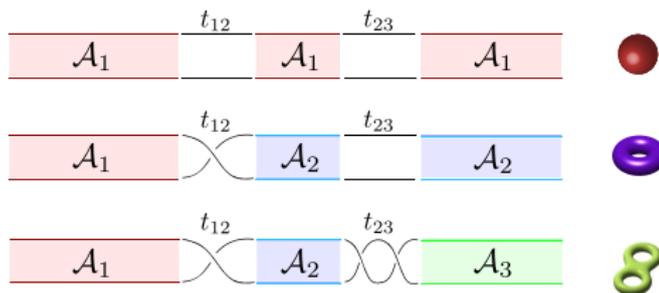
Exemples de fibrés:



Classification?
invariant topologique?



Classification et nombre de Chern



Généralisation de Gauss-Bonnet

$$\text{red sphere} \quad \text{purple torus} \quad \text{green torus} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mathcal{F} \, dS = 2(1 - \nu) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} = \nu} \quad : \text{nb de Chern}$$

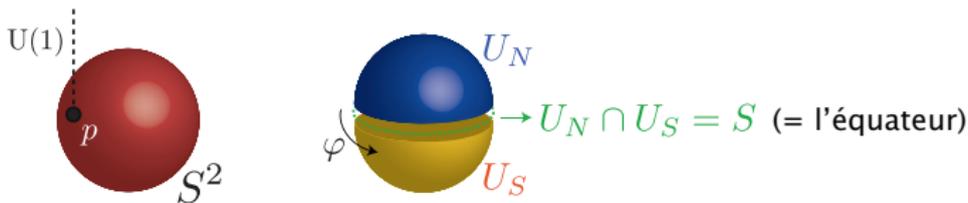
$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu}) \, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

Trivialité: $t_{ij} = \text{id}_{\mathcal{M}} \quad \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} = \int_{\mathcal{M}} d\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{M}} \mathcal{A} = 0 \quad (\mathcal{M} \text{ sans bord})$

$$t_{ij} \neq \text{id}_{\mathcal{M}} \quad \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} = \int_{U_1} d\mathcal{A}_1 + \int_{U_2} d\mathcal{A}_2 + \dots \neq 0$$

Illustration sur un exemple simple (mais utile)

Considérons un fibré $U(1)$ sur la sphère: $\mathcal{M} = S^2$ $\mathcal{F} = U(1)$



L'unique fonction de transition $t_{NS} : S \rightarrow U(1)$ ne dépend que de l'angle azimut

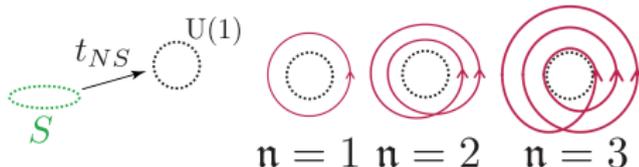
Nous choisissons la forme: $t_{NS}(\varphi) = e^{i\Lambda(\varphi)} = e^{in\varphi}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

La relation de compatibilité s'écrit $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_N + t_{NS}^{-1} dt_{NS} = \mathcal{A}_N + ind\varphi$

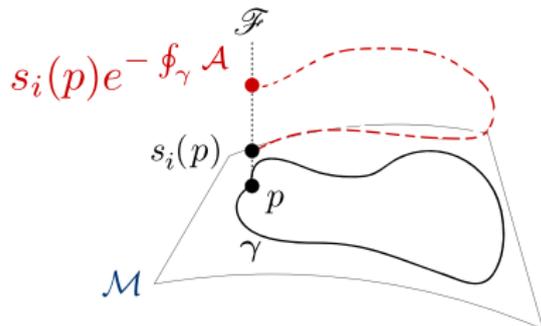
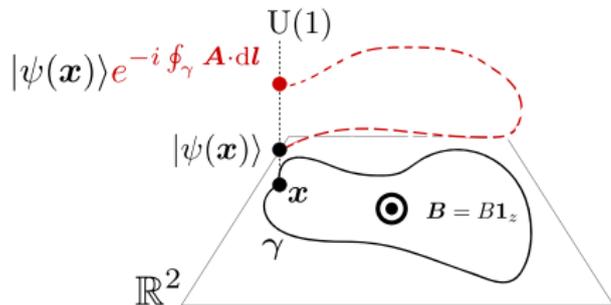
Le nombre de Chern se calcule aisément:

$$\int_{S^2} \mathcal{F} = \int_{U_N} d\mathcal{A}_N + \int_{U_S} d\mathcal{A}_S = \int_S \mathcal{A}_N - \int_S \mathcal{A}_S = -in \int_S d\varphi = -i2\pi n$$

$$\longrightarrow \nu = \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} \mathcal{F} = n$$



L'effet Aharonov-Bohm par Wu-Yang (1975)

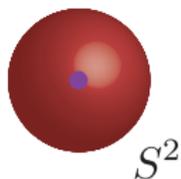


Dictionnaire de Wu et Yang: L'électromagnétisme est essentiellement décrit par un fibré

- L'espace \mathbb{R}^2 \longrightarrow L'espace de base \mathcal{M}
- La liberté de la phase (jauge) $U(1)$ \longrightarrow La fibre \mathcal{F}
- Fixer la jauge: choisir un état $|\psi(x)\rangle$ \longrightarrow La section (locale) $s_i(p)$
- Le potentiel électromagnétique \mathbf{A} \longrightarrow La connexion \mathcal{A} [$\mathcal{A}_\mu dx^\mu = i\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$]
- Le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ \longrightarrow La courbure $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$
 $B_z = F_{xy} = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ $\qquad \mathcal{F} = d\mathcal{A} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx dy$
- Transformation de jauge \longrightarrow Fonctions de transition
 $|\psi_k\rangle = |\psi_j\rangle e^{i\Lambda}$ $s_k(p) = s_j(p) t_{jk} = s_j(p) e^{i\Lambda(p)}$
 $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_j + \nabla\Lambda$ $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_j + t_{jk}^{-1} dt_{jk} = \mathcal{A}_j + i\partial_\mu \Lambda dx^\mu$

Le monopole de Dirac... à la Wu et Yang (1975)

Considérons un monopole magnétique au centre d'une sphère



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m = 4\pi g \delta^3(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B} = \frac{g}{r^3} \mathbf{r}$$

Calculons le flux magnétique à travers la sphère: $\Phi = \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g$

Impossible de définir un potentiel vecteur global:

$$\Phi = \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S^2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S^2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

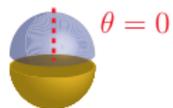
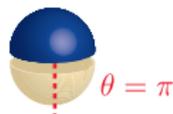
Solutions: (1) On introduit des cordes de Dirac (Dirac, 1931), cf. cours de J. Dalibard

(2) On s'inspire de la théorie des fibrés (Wu et Yang, 1975)

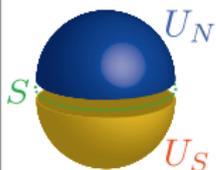


$$\mathbf{A}_N = \frac{g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta) \mathbf{1}_\varphi$$

$$\mathbf{A}_S = -\frac{g}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta) \mathbf{1}_\varphi$$



Le monopole de Dirac... à la Wu et Yang (1975)



$$\mathbf{A}_N = \frac{g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta) \mathbf{1}_\varphi$$

$$\mathbf{A}_S = -\frac{g}{r \sin \theta} (1 + \cos \theta) \mathbf{1}_\varphi$$

$$\Phi = \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{U_N} (\nabla \times \mathbf{A}_N) \cdot d\mathbf{S} + \int_{U_S} (\nabla \times \mathbf{A}_S) \cdot d\mathbf{S}$$

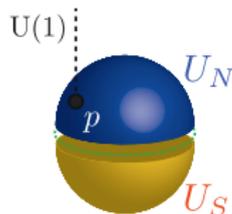
$$= \int_S \mathbf{A}_N \cdot d\mathbf{l} - \int_S \mathbf{A}_S \cdot d\mathbf{l} = 2g \int_S \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{1}_\varphi \cdot d\mathbf{l} = 4\pi g \quad \checkmark$$

Nouvelle interprétation de la quantification de la charge de Dirac

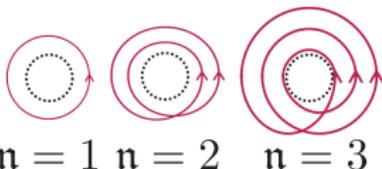
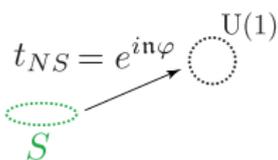
$$\mathcal{A}_N = i \mathbf{A}_N \cdot d\mathbf{l} = ig(1 - \cos \theta) d\varphi$$

$$\mathcal{A}_S = i \mathbf{A}_S \cdot d\mathbf{l} = -ig(1 + \cos \theta) d\varphi$$

$$\mathcal{A}_S - \mathcal{A}_N = -i(2g) d\varphi = i n d\varphi$$



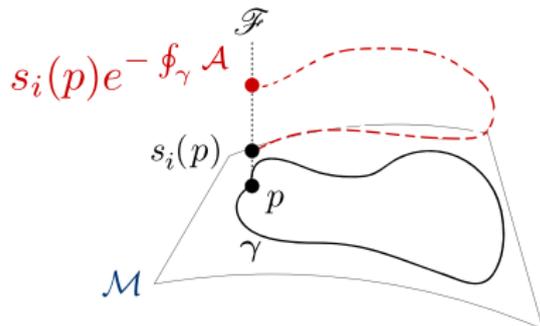
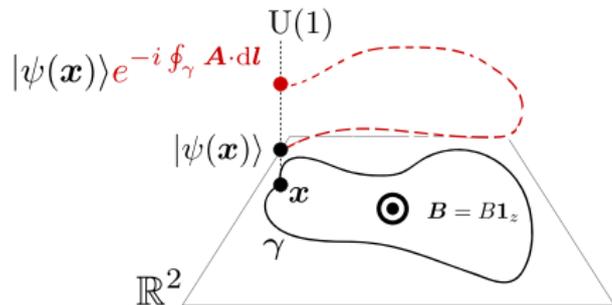
$$2g \in \mathbb{Z} : \text{nb de Chern}$$



$$n = 1 \quad n = 2 \quad n = 3$$

$$[d\mathbf{l} = \mathbf{1}_r dr + \mathbf{1}_\theta r d\theta + \mathbf{1}_\varphi r \sin \theta d\varphi]$$

L'effet Aharonov-Bohm par Wu-Yang (1975)

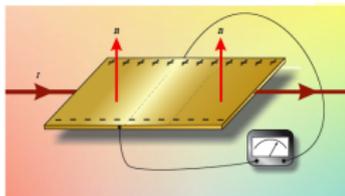


Dictionnaire de Wu et Yang: L'électromagnétisme est essentiellement décrit par un fibré

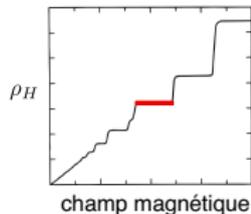
- L'espace \mathbb{R}^2 \longrightarrow L'espace de base \mathcal{M}
- La liberté de la phase (jauge) $U(1)$ \longrightarrow La fibre \mathcal{F}
- Fixer la jauge: choisir un état $|\psi(x)\rangle$ \longrightarrow La section (locale) $s_i(p)$
- Le potentiel électromagnétique \mathbf{A} \longrightarrow La connexion \mathcal{A} [$\mathcal{A}_\mu dx^\mu = i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$]
- Le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ \longrightarrow La courbure $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$
 $B_z = F_{xy} = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ $\qquad \mathcal{F} = d\mathcal{A} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx dy$
- Transformation de jauge \longrightarrow Fonctions de transition
 $|\psi_k\rangle = |\psi_j\rangle e^{i\Lambda}$ $s_k(p) = s_j(p) t_{jk} = s_j(p) e^{i\Lambda(p)}$
 $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_j + \nabla \Lambda$ $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_j + t_{jk}^{-1} dt_{jk} = \mathcal{A}_j + i \partial_\mu \Lambda dx^\mu$

L'effet Hall quantique (IQHE) et le nombre de Chern

- 1980: Découverte de l'effet Hall quantique (K. von Klitzing)



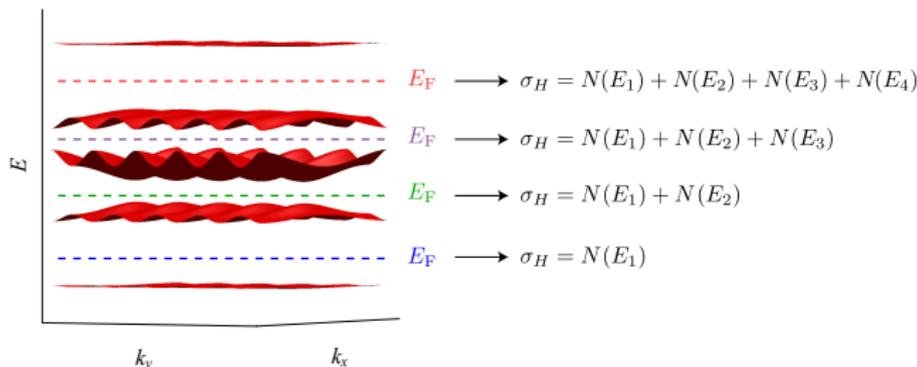
$$j_y = \sigma_H E_x$$



$$\sigma_H = 1/\rho_H = \nu \times (e^2/h)$$

- 1982: Expression de Thouless–Kohmoto–Nightingale–Nijs (TKNN)

$$\sigma_{yx} = (e^2/h)\nu = (e^2/h) \sum_{E_\alpha < E_F} N(E_\alpha) \quad N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$



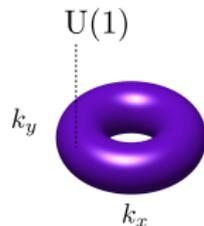
L'effet Hall quantique (IQHE) et le nombre de Chern

- 1982: Expression de Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs (TKNN)

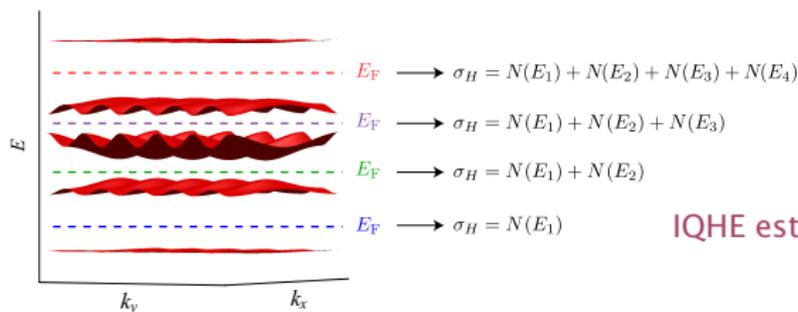
$$\sigma_{yx} = (e^2/h) \nu = (e^2/h) \sum_{E_\alpha < E_F} N(E_\alpha) \quad N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$

- 1983: B. Simon [+ Avron & Seiler] relie TKNN au nombre de Chern

$$N(E_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}(\psi_\alpha) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} (\langle \partial_{k_x} \psi | \partial_{k_y} \psi \rangle - \langle \partial_{k_y} \psi | \partial_{k_x} \psi \rangle) dk_x dk_y$$



$\mathcal{F}(\psi_\alpha)$: courbure de Berry sur le fibré $(\mathbb{T}^2, U(1))$

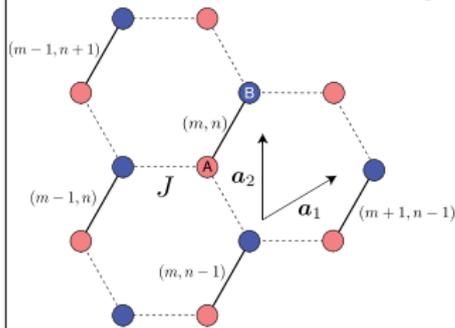


IQHE est un effet topologique!

- 1988: D. Haldane propose un modèle pour l'effet Hall quantique...

... sans champ magnétique!

Le réseau en nid d'abeilles



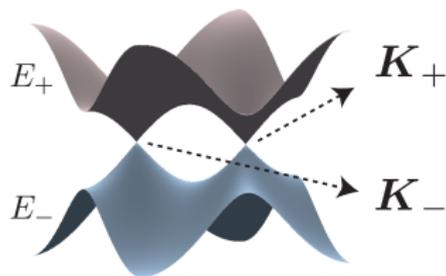
$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \quad : \text{régime liaisons fortes} \quad (\text{cf. cours de Jean})$$

$$E\psi_A(m, n) = -J [\psi_B(m, n) + \psi_B(m-1, n) + \psi_B(m, n-1)]$$

$$E\psi_B(m, n) = -J [\psi_A(m, n) + \psi_A(m+1, n) + \psi_A(m, n+1)]$$

$$\text{Th. de Bloch:} \quad \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = e^{ik_x m} e^{ik_y n} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$$

$$E \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \hat{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{k}) = -J(1 + e^{-ik_x} + e^{-ik_y})$$



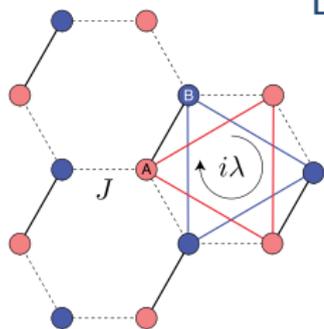
Structure de vortex: $f(\mathbf{K}_\pm) = 0$

$$f(k_x, k_y) = |f| e^{-i\varphi}$$

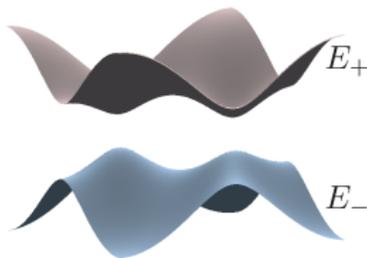
$$\oint_{S_\pm} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{k} = \oint_{S_\pm} d\varphi = \pm 2\pi$$



Le modèle de Haldane (1988)



$$\hat{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \lambda \sum_{\langle j,k \rangle} i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k$$



$$E \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \hat{H}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{k}) & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & -g(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$$

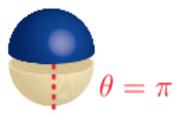
Nb de Chern associé à la bande inférieure? $N(E_-) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F}$
 On introduit des coordonnées sphériques

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} g(\mathbf{k}) & f(\mathbf{k}) \\ f^*(\mathbf{k}) & -g(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = E(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$|\phi_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \langle \phi_- | \partial_\mu \phi_- \rangle dx^\mu = -\frac{i}{2} (1 - \cos \theta) d\varphi$$

Le modèle de Haldane (1988)

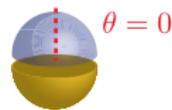
$$|\phi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = -\frac{i}{2}(1 - \cos \theta)d\varphi$$



singularité

Transformation de jauge

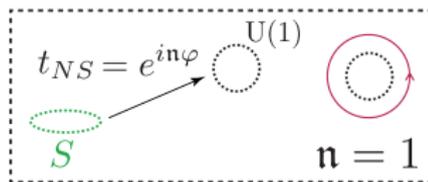
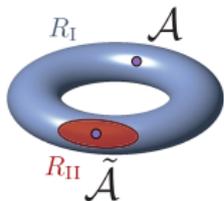
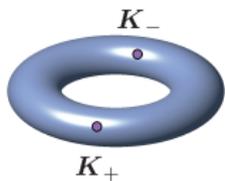
$$|\tilde{\phi}_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2}(1 + \cos \theta)d\varphi$$



$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_N \quad \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}_S$

: on retombe sur un monopole!
(de charge $g=1/2$)

Prenons le paramètre $\lambda > 0$: $\theta(\mathbf{K}_{+}) = \pi$ et $\theta(\mathbf{K}_{-}) = 0$



$$\nu = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{F} = \frac{i}{2\pi} \int_{\text{frontière}=S_{+}} \mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2\pi} \int_{S_{+}} (-i)d\varphi = 1$$

Références

- 1931: Dirac, "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field" (Proc. Roy. Soc.)
- 1959: Aharonov & Bohm, "Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory" (Phys. Rev.)
- 1975: Wu & Yang, "Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields" (Phys. Rev.D)
- 1980: Klitzing, Dorda & Pepper, "New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance" (Phys. Rev. Lett.)
- 1982: Thouless, Kohmoto, Nightingale & Nijs, "Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential" (Phys. Rev. Lett.)
- 1983-84: Berry, "Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes" (Proc. Roy. Soc.)
- 1983: Simon, "Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase" (Phys. Rev. Lett)
- 1988: Haldane, "Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the parity anomaly" (Phys. Rev. Lett)
- 2005: Kane & Mele, "Z₂ Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect" (Phys. Rev. Lett)
- Livre: Nakahara, "Geometry, Topology and Physics"