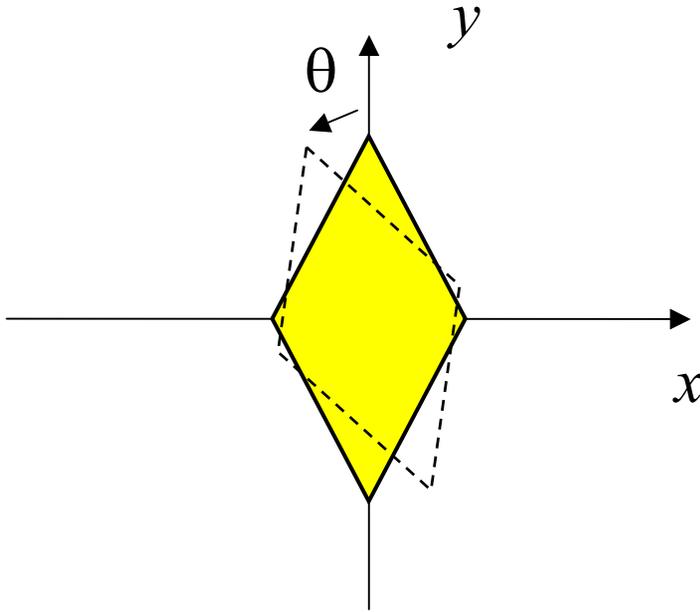


Oscillations d'un corps solide autour d'une position d'équilibre



Corps solide de moment d'inertie I écarté d'un petit angle θ par rapport à sa position d'équilibre le long de Oy

Moment Γ des forces de rappel

$$\Gamma = -C \theta \quad (5.1)$$

C : Constante de rappel

Fréquence d'oscillation

Une fois lâché, le système effectue un mouvement autour de Oz décrit par l'équation de la dynamique

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \Gamma = -C \theta \quad (5.2)$$

Oscillations angulaires de fréquence

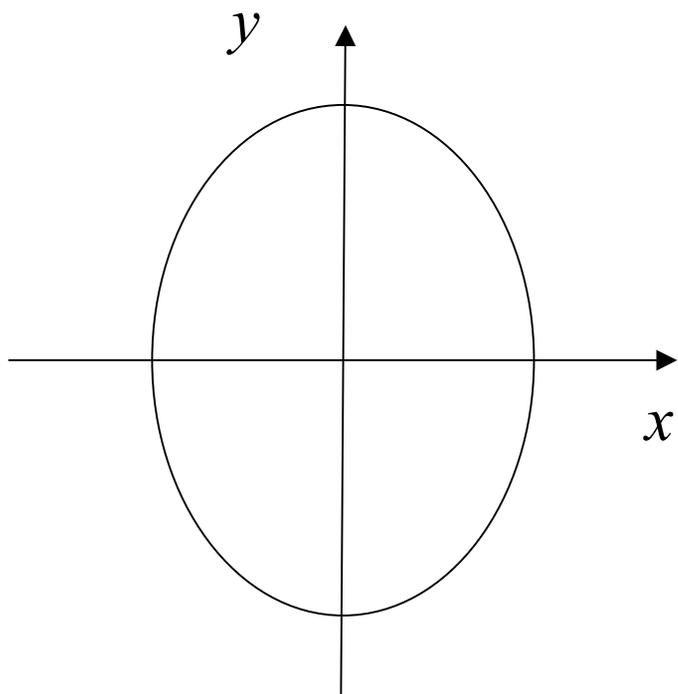
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \quad (5.3)$$

Si la constante de rappel C tend vers 0, la fréquence d'oscillation tend aussi vers 0.

Peut-on observer des phénomènes analogues sur un condensat ?

Condensat dans un piège légèrement anisotrope dans le plan xOy

ω_x un peu plus grand que ω_y



Condensat légèrement allongé le long de Oy .

Si l'on tourne le condensat d'un petit angle à partir de sa position d'équilibre, le moment des forces de rappel va être d'autant plus petit que l'anisotropie initiale est plus petite.

Problèmes posés

Une fois lâché à partir d'une position légèrement tournée par rapport à sa position d'équilibre

- Le condensat va-t-il osciller angulairement en gardant la même forme?
- A quelle fréquence?
- Cette fréquence d'oscillation angulaire va-t-elle tendre vers 0 quand l'anisotropie du piège tend vers 0?

Problèmes étudiés dans la référence 6

Plan

1. Existence d'un mode de vibration en $\lambda_0 xy \cos \omega t$ et calcul de la fréquence de vibration ω
2. Existence d'un « mode ciseaux » pour λ_0 suffisamment petit où le condensat oscille angulairement sans se déformer
3. Discussion physique. Manifestations de la superfluidité du condensat
4. Différence de comportement avec celui d'un nuage thermique
5. Etudes expérimentales

Modes de vibration en xy

Potentiel de piégeage

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{m}{2} \left[\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right] \quad (5.4)$$

$$\omega_x^2 = \omega_0^2 (1 + \varepsilon) \quad \omega_y^2 = \omega_0^2 (1 - \varepsilon) \quad (5.5)$$

Limite de Thomas-Fermi atteinte.

Nous allons montrer que

$$\delta \rho = \lambda_0 x y \cos \omega t \quad (5.6)$$

est une solution des équations hydrodynamiques linéarisées, calculer ω , et étudier l'allure du mode de vibration en fonction de λ_0 .

Équations hydrodynamiques linéarisées

(voir T-26)

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho \qquad \rho_0 = \frac{1}{g} [\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})] \qquad (5.7)$$

$$S = S_0 + \delta S \qquad S_0 = -\mu t / \hbar \qquad (5.8)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta v \qquad \vec{v}_0 = \vec{0} \qquad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta S = -g \delta \rho \end{array} \right. \qquad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v} = -g \vec{\nabla} \delta \rho \end{array} \right. \qquad (5.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \delta \vec{v}) \end{array} \right. \qquad (5.12)$$

Existence d'une solution en $x y$

Le report de (5.6) dans (5.10) donne

$$\delta S = -\frac{g \lambda_0}{\hbar \omega} x y \sin \omega t \quad (5.13)$$

$$\delta \vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \delta S = -\frac{g \lambda_0}{m \omega} \sin \omega t \vec{\nabla} (x y) \quad (5.14)$$

$$\delta v_x = -\frac{g \lambda_0}{m \omega} y \sin \omega t$$

$$\delta v_y = -\frac{g \lambda_0}{m \omega} x \sin \omega t \quad (5.15)$$

$$\delta v_z = 0$$

Même structure du champ de vitesses que celles trouvées dans les cours III et IV

Existence d'une solution en $x y$ (suite)

L'équation (5.12) s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -(\vec{\nabla} \rho_0) \cdot \delta \vec{v} - \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} \quad (5.16)$$

Comme $\Delta(x y) = 0$, on déduit de (5.13) et (5.14)

$$\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (5.17)$$

L'onde $x y$ est une onde de surface.

Le dernier terme de (5.16) est nul, et on obtient, compte tenu de (5.7) et (5.15)

$$-\omega \lambda_0 x y \sin \omega t = -\frac{\lambda_0}{\omega} (\omega_x^2 + \omega_y^2) x y \sin \omega t \quad (5.18)$$

Fréquence propre du mode en xy

L'équation (5.18) est satisfaite si

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = 2\omega_0^2 \quad (5.19)$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe une onde de surface en xy de fréquence propre

$$\omega = \omega_0 \sqrt{2} \quad (5.20)$$

Pour la suite de la discussion il sera utile de poser

$$\lambda_0 = -\frac{m \omega_0^2 \gamma_0}{g} \quad (5.21)$$

Évolution de la densité spatiale

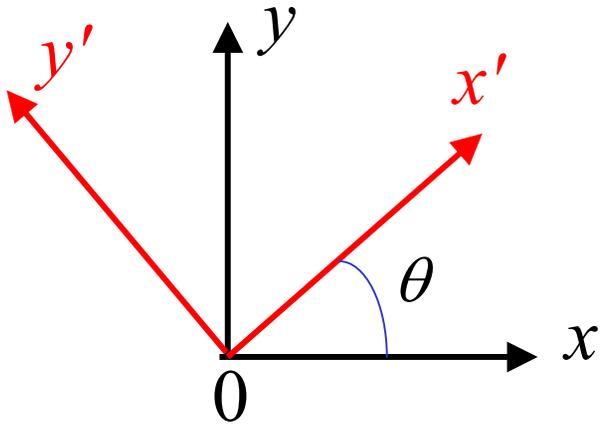
La densité spatiale (5.7) s'écrit, compte tenu de (5.6) et (5.21)

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{g} \left\{ \mu - \frac{m \omega_0^2}{2} \left[(1 + \varepsilon) x^2 + (1 - \varepsilon) y^2 + 2\gamma_0 x y \cos \omega t \right] - \frac{m \omega_z^2}{2} z^2 \right\} \quad (5.22)$$

Dans le plan $x O y$, la densité spatiale a une forme elliptique

Cherchons les axes de cette ellipse en prenant de nouveaux axes Ox' et Oy' déduits Ox et Oy par une rotation d'angle θ autour de Oz

Changement d'axes



$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (5.23)$$

Pour trouver les axes de symétrie du condensat, il suffit de reporter (5.23) dans l'expression (5.22) de la densité spatiale et d'annuler le terme en $x' y'$

Axes de symétrie du condensat

Coefficient du terme en x'^2 de ρ

$$-\frac{m\omega_0^2}{g} \left[\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\cos^2\theta + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\sin^2\theta + \gamma(t)\sin\theta\cos\theta \right] \quad (5.24)$$

Coefficient du terme en y'^2 de ρ

$$-\frac{m\omega_0^2}{g} \left[\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\sin^2\theta + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\cos^2\theta + \gamma(t)\sin\theta\cos\theta \right] \quad (5.25)$$

Coefficient du terme en $x'y'$ de ρ

$$-\frac{m\omega_0^2}{g} \left[-2\varepsilon\sin\theta\cos\theta + \gamma(t)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right] \quad (5.26)$$

On a posé

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cos \omega t \quad (5.27)$$

Axes de symétrie du condensat (suite)

L'annulation du coefficient du terme en $x' y'$ donne l'angle $\theta(t)$ entre les axes du condensat et les axes Ox et Oy du piège à l'instant t

$$\tan 2\theta(t) = \frac{\gamma(t)}{\varepsilon} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon} \cos \omega t \quad (5.28)$$

Cas où $\gamma_0 \ll \varepsilon$

$$\theta \ll 1 \quad \theta \simeq \frac{\gamma_0}{2\varepsilon} \cos \omega t = \frac{\gamma(t)}{2\varepsilon} \quad (5.29)$$

Cas où $1 \gg \gamma_0 \gg \varepsilon$

Pour les valeurs de t telles que $\cos \omega t$ est de l'ordre de 1

$$\theta \simeq \pi / 4 \quad (5.30)$$

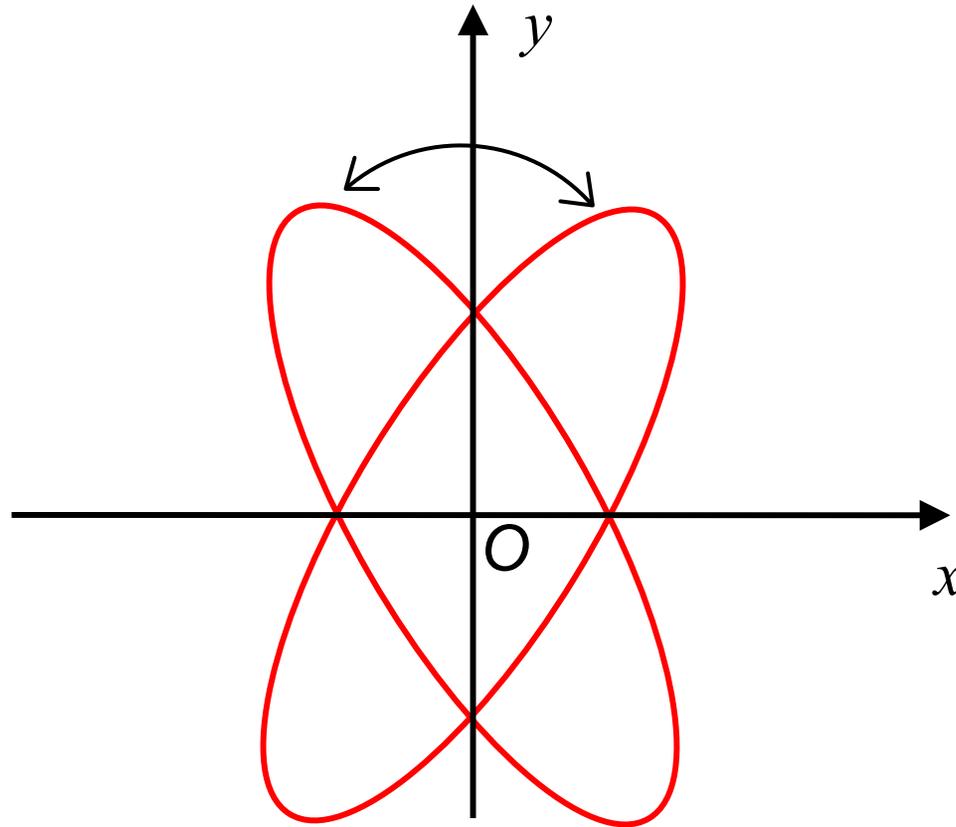
Cas où $\gamma_0 \ll \varepsilon$

Le report de (5.29) dans (5.24) et (5.25) montre que les coefficients de x'^2 et y'^2 ne dépendent de γ_0/ε que par des termes au moins d'ordre 2. On peut donc écrire:

$$\rho(\vec{r}', t) \simeq \frac{1}{g} \left\{ \mu - \frac{m \omega_0^2}{2} \left[(1 + \varepsilon) x'^2 + (1 - \varepsilon) y'^2 \right] - \frac{m \omega_z^2}{2} z'^2 \right\} \quad (5.31)$$

La densité spatiale tourne donc d'un petit angle θ , d'ordre 1 en γ_0/ε , sans changer de forme à cet ordre, θ étant une fonction périodique du temps.

Modes ciseaux



L'oscillation pendulaire de faible amplitude du condensat autour de O_x rappelle celle d'une aiguille aimantée.

Comment exciter le mode ciseaux

On tourne les axes du piège d'un petit angle θ_0

On attend que le condensat atteigne un état équilibre

On ramène brusquement les axes du piège à leur position initiale

Le condensat effectue alors une oscillation angulaire sans changement de forme autour des nouveaux axes.

Modes ciseaux - Récapitulation

Oscillation angulaire

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (5.32)$$

$$\text{Amplitude:} \quad \theta_0 = \gamma_0 / 2 \varepsilon \quad (5.33)$$

$$\text{Fréquence:} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{2} \quad (5.34)$$

Vitesse angulaire instantanée

$$\Omega(t) = d\theta(t)/dt = -\Omega_0 \sin \omega t \quad (5.35)$$

$$\Omega_0 = -\omega \theta_0 \quad (5.36)$$

Anisotropie ε du piège

$$\varepsilon = (\omega_x^2 - \omega_y^2) / (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (5.37)$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = 2\omega_0^2 \quad \omega_x^2 - \omega_y^2 = 2\varepsilon \omega_0^2 \quad (5.38)$$

Modes ciseaux – Récapitulation (suite)

Champ de vitesses

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\omega_0^2}{\omega} \gamma_0 \sin \omega t \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon \Omega(t) \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

On a utilisé (5.15), (5.21), (5.23), (5.24), (5.35), (5.36)

Densité spatiale

- Donnée par (5.31) dans le système d'axes Ox', Oy'
- Même forme que la distribution $\rho_0(x, y, z)$ d'un condensat à l'équilibre

Cas où $1 \gg \gamma_0 \gg \varepsilon$

- Quand $\cos\omega t$ a un module de l'ordre de 1, il est légitime de négliger les terme en ε de (5.24) et (5.25)

Dans le système d'axes Ox', Oy' tourné d'un angle $\pi/4$ par rapport au précédent la densité spatiale s'écrit

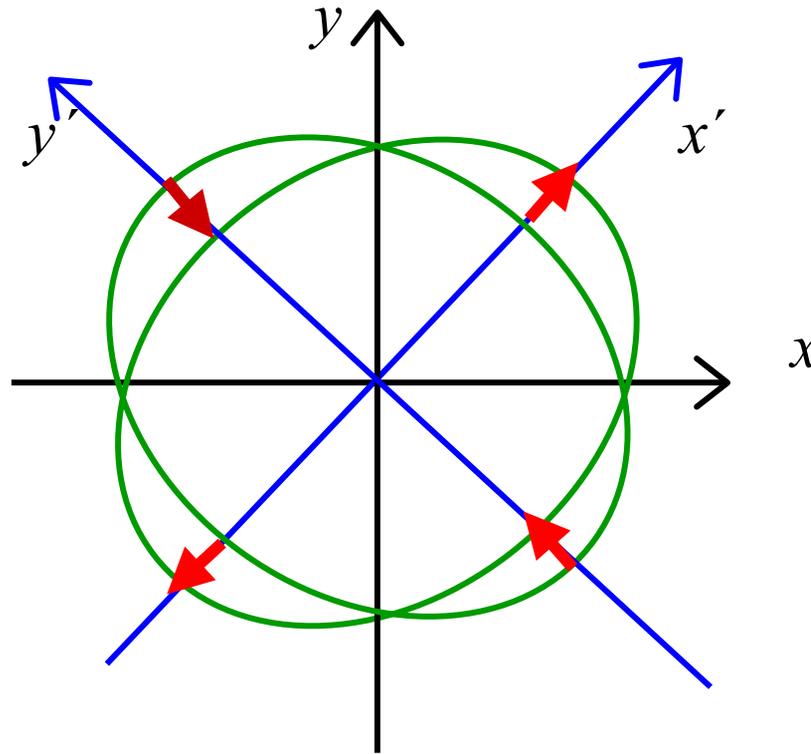
$$\rho(\vec{r}', t) = \frac{1}{g} \left\{ \mu - \frac{m\omega_0^2}{2} \left[(1 + \gamma(t)) x'^2 + (1 - \gamma(t)) y'^2 \right] - \frac{m\omega_z^2}{2} z'^2 \right\} \quad (5.40)$$

Déformation quadrupolaire par rapport aux axes Ox', Oy'

- Quand $\cos\omega t$ est très petit, on retrouve l'anisotropie du condensat à l'équilibre, d'axes Ox et Oy

Couplage entre les modes quadrupolaires xy et x^2-y^2

Allure de l'oscillation pour $\gamma_0 \gg \varepsilon$



Au cours de l'oscillation, le condensat change de forme en passant par une forme légèrement anisotrope d'axes Ox et Oy . Situation très différente de celle du mode ciseaux.

Discussion physique

La fréquence du mode ciseaux ne dépend pas de l'anisotropie ε du piège et reste la même quand ε tend vers 0

Comme la densité spatiale et le champ de vitesses sont connus à tout instant [voir équations (5.31) et (5.39)], il est possible de calculer toutes les grandeurs physiques caractérisant la rotation du condensat

On peut ainsi étudier la dépendance en ε du moment des forces agissant sur le condensat et du moment cinétique de ce condensat

Moment des forces de rappel

Force de piégeage

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (5.41)$$

$$\begin{cases} F_x = -m \omega_0^2 (1 + \varepsilon) x \\ F_y = -m \omega_0^2 (1 - \varepsilon) y \\ F_z = -m \omega_z^2 z \end{cases} \quad (5.42)$$

Composante z du moment de ces forces

$$\begin{aligned} \Gamma_z &= \int d^3 r \rho(\vec{r}) (x F_y - y F_x) \\ &= 2 m \omega_0^2 \varepsilon \int d^3 r \rho(\vec{r}) x y \\ &= 2 m \omega_0^2 \varepsilon N \langle x y \rangle = m \omega^2 \varepsilon N \langle x y \rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

Calcul de $\langle x y \rangle$

Utilisons (5.23) pour passer des variables x, y aux variables x', y' . Il vient:

$$N \langle x y \rangle = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \left[(x'^2 - y'^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + x' y' \cos 2\theta \right] \quad (5.44)$$

Pour le mode ciseaux, $\theta \ll 1$, et $\rho(\vec{r}')$ admet les axes Ox' et Oy' comme axes de symétrie, de sorte que $\langle x' y' \rangle = 0$. De plus, $\rho(\vec{r}')$ a la même forme dans les nouveaux axes que $\rho_0(\vec{r})$ dans les anciens.

Donc :

$$\langle x y \rangle = \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \theta \quad (5.45)$$

où $\langle \rangle_0$ désigne la moyenne dans l'état du condensat à l'équilibre

Moment de forces de rappel (suite)

Le report de (5.45) dans (5.43) donne:

$$\Gamma_z(t) = N m \omega^2 \varepsilon \theta(t) \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \quad (5.46)$$

Pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi, $\langle x^2 \rangle_0$ et $\langle y^2 \rangle_0$ sont proportionnels à ω_x^{-2} et ω_y^{-2} , respectivement. Il s'ensuit, d'après (5.38), que Γ_z est proportionnel à $\varepsilon (\omega_x^2 - \omega_y^2)$, donc au carré ε^2 de l'anisotropie du piège

Le moment des forces de rappel tend donc vers 0 comme ε^2 quand ε tend vers 0

Moment cinétique

Compte tenu de (5.39)

$$\begin{aligned}\langle L_z \rangle &= m \int d^3 r \rho(\vec{r}) (x v_y - y v_x) \\ &= -m \varepsilon \Omega(t) \int d^3 r \rho(\vec{r}) (x^2 - y^2)\end{aligned}\tag{5.47}$$

Le passage aux variables x' , y' donne pour l'intégrale

$$\begin{aligned}\int d^3 r' \rho(\vec{r}') \left[(x'^2 - y'^2) \cos 2\theta - 2x'y' \sin 2\theta \right] \\ \simeq N \langle x^2 - y^2 \rangle_0\end{aligned}\tag{5.48}$$

de sorte que finalement

$$\langle L_z \rangle = -N m \varepsilon \Omega(t) \langle x^2 - y^2 \rangle_0\tag{5.49}$$

Moment cinétique (suite)

Le même facteur de réduction $\varepsilon \langle x^2 - y^2 \rangle_0$ apparaît dans la constante C du couple de rappel [voir (5.46)] et dans le moment cinétique (5.49)

C'est la raison pour laquelle la fréquence du mode ciseaux reste élevée et indépendante de ε

Notons d'ailleurs que, compte tenu de (5.32), (5.35) et (5.36), les équations (5.46) et (5.49) donnent

$$\Gamma_z(t) = \frac{d}{dt} \langle L_z(t) \rangle \quad (5.50)$$

qui n'est autre que l'équation de la dynamique

Moment d'inertie

C'est le coefficient de proportionnalité entre $\langle L_z \rangle$ et $\Omega(t)$.

De (5.49) on déduit :

$$\begin{aligned}\Theta &= -N m \varepsilon \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \\ &= -N m \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \\ &= N m \langle x^2 + y^2 \rangle_0 \left(\frac{\langle x^2 - y^2 \rangle_0}{\langle x^2 + y^2 \rangle_0} \right)^2 = \Theta_{\text{rig}} \varepsilon^2\end{aligned}\tag{5.51}$$

On retrouve le même facteur de réduction ε^2 par rapport à la valeur rigide que dans le cours IV

C'est cette réduction du moment d'inertie due à la superfluidité qui explique les caractéristiques originales du mode ciseaux

Remarque

Il n'était pas évident a priori de retrouver ici le même résultat que celui obtenu dans les cours III et IV

- La rotation du condensat n'est plus ici imposée par une rotation du piège. Elle est une conséquence de la dynamique du mode.
- La vitesse de rotation n'est pas constante comme dans les cours III et IV. Elle est modulée à la fréquence propre du mode

Différences de comportement avec celui d'autres systèmes

Gaz parfait de bosons partiellement condensés

Nous allons montrer, avec des arguments simples, que le mode ciseaux a une fréquence élevée pour le condensat, alors qu'il a également une composante de fréquence basse (tendant vers 0 quand ε tend vers 0) pour le nuage thermique

Pour une étude plus détaillée des modes ciseaux du nuage thermique, dans les divers régimes de collisions, voir la référence 6

Méthode suivie ici

Pour exciter le mode ciseaux en $x y$, on peut ajouter au potentiel de piégeage une perturbation en $x y$

$$\delta V = \lambda x y \cos \omega t \quad (5.52)$$

Une telle perturbation est résonnante quand ω coïncide avec la fréquence de Bohr correspondant à une paire de niveaux du système entre lesquels cette perturbation a un élément de matrice non nul. Ces fréquences de résonance ne sont autres que les fréquences des modes ciseaux

Transitions excitées par la perturbation

Les niveaux d'énergie dans le piège sont caractérisés par 3 nombres quantiques:

$$n_x, n_y, n_z \quad \text{entiers } \geq 0$$

La perturbation $x y$ est une combinaison linéaire de:

$$\hat{a}_x^+ \hat{a}_y^+, \hat{a}_x \hat{a}_y, \hat{a}_x \hat{a}_y^+, \hat{a}_x^+ \hat{a}_y$$

induisant des transitions:

$$\Delta n_x = \Delta n_y = \pm 1 \quad \Delta n_x = -\Delta n_y = \pm 1$$

Les fréquences propres de ces transitions sont:

$$\pm(\omega_x + \omega_y) \quad \pm(\omega_x - \omega_y)$$

Excitation du condensat

Les atomes sont tous dans l'état $|0,0,0\rangle$, et la seule transition pouvant être excitée est vers l'état $|1,1,0\rangle$

Une seule fréquence pour le mode ciseaux, $\omega_x + \omega_y$, qui ne tend pas vers 0 quand ε tend vers 0

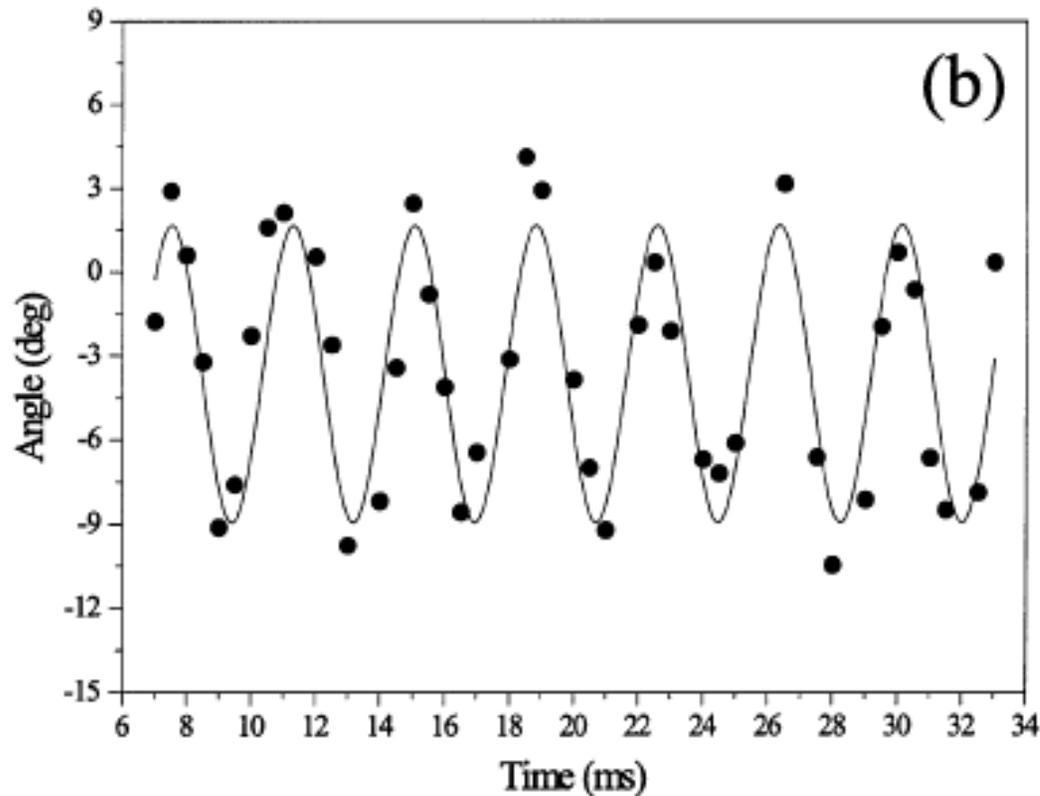
Excitation du nuage

Les atomes sont dans des états $|n_x, n_y, n_z\rangle$, avec n_x, n_y, n_z non nuls

Des nouvelles transitions $|n_x, n_y, n_z\rangle \rightarrow |n_x \pm 1, n_y \mp 1, n_z\rangle$ apparaissent avec des fréquences basses $\pm(\omega_x - \omega_y)$ qui tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Etudes expérimentales

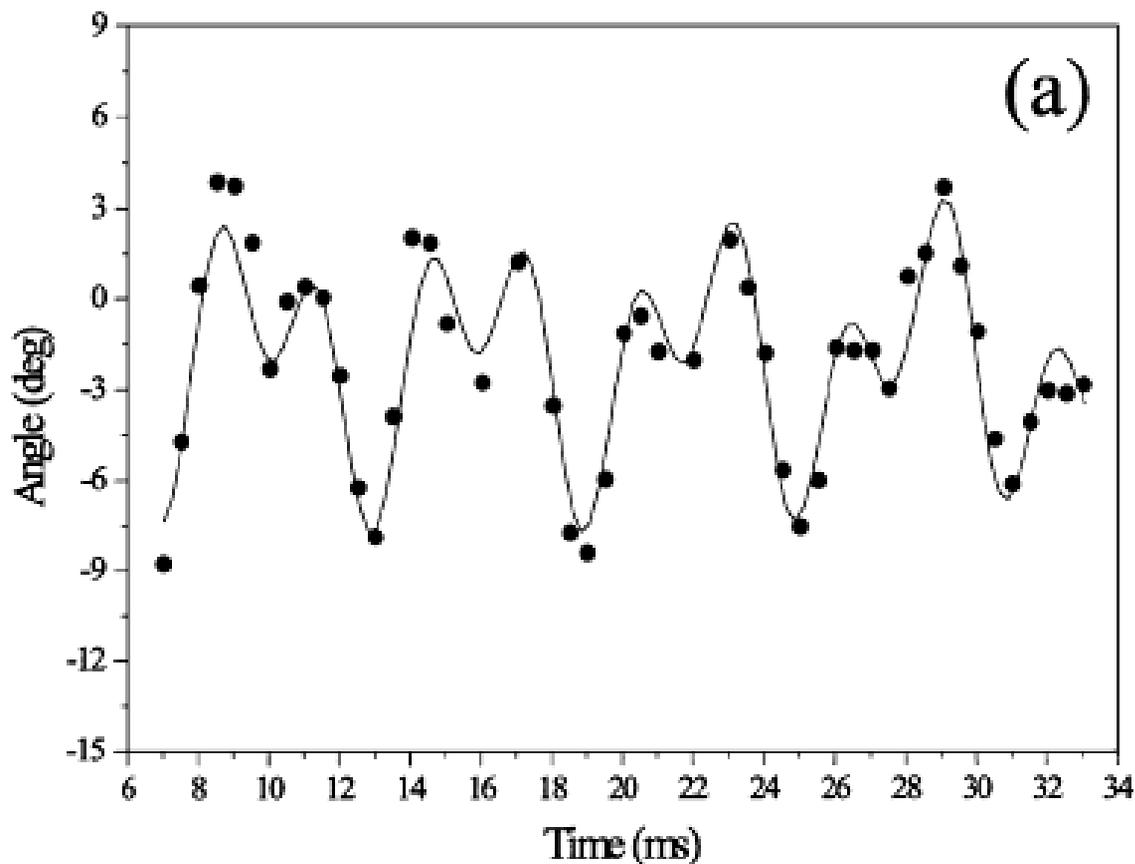
Référence 7



Observation du mode ciseaux sur un condensat de Rb^{87}
Une seule fréquence élevée (265.6 ± 0.8 Hz) apparaît, en bon accord avec la prédiction théorique (265 ± 2 Hz)

Etudes expérimentales (suite)

Référence 7



Observation du mode ciseaux sur un nuage thermique de Rb^{87} . Deux fréquences d'évolution apparaissent, en bon accord avec les prédictions théoriques

Références

(Suite de T-156)

6. D. Guéry-Odelin, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 83, 4452 (1999)
Voir aussi les références données dans cette lettre à d'autres travaux en physique nucléaire mettant en évidence des modes ciseaux
7. O. Marago, S. Hopkins, J. Arlt, E. Hodby, G. Hechenblaikner, C. Foot, Phys. Rev. Lett. 84, 2056 (2000)