

Condensat dans un piège tournant

Densité spatiale et champ de vitesses

Condensat contenu dans un piège décrit par

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

On tourne le potentiel de piégeage V_{ext} autour de Oz à la vitesse angulaire Ω

- Quel est le régime stationnaire dans le référentiel tournant si un tel régime existe?
- Nouvelle forme spatiale du condensat?
- Allure du champ de vitesses?
- Influence des interactions ?

Les paramètres physiques importants décrivant la rotation

1. Anisotropie du piège

$$\varepsilon = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (3.1)$$

Il sera d'autant plus facile d'entraîner le condensat que ε sera plus grand.

2. Vitesse angulaire de rotation Ω

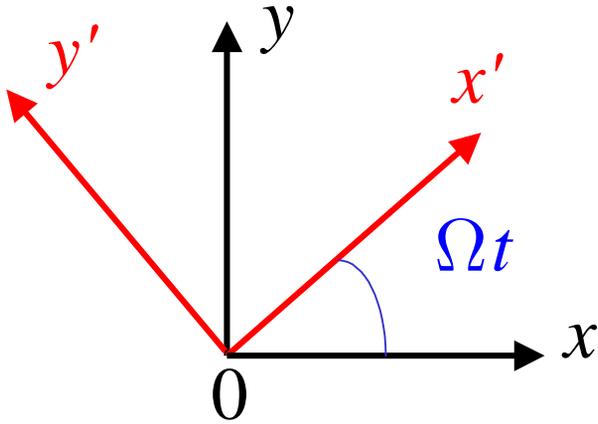
Comment varient les phénomènes en fonction de ε et Ω ?

Plan

- Rappels de mécanique classique sur les rotations
- Condensat de bosons sans interactions
 - Fonction d'onde de l'état fondamental
 - Densité spatiale et champ de vitesses
- Condensat à la limite de Thomas-Fermi
 - Equation de Gross-Pitaevskii dans le référentiel tournant
 - Interprétation des équations hydrodynamiques
 - Recherche d'une solution stationnaire dans le référentiel tournant

Rappels de mécanique classique

Référentiel du labo $x\ 0\ y$ et tournant $x'\ 0\ y'$



$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$
$$z' = z$$

Lagrangiens \mathcal{L} et \mathcal{L}'

Dans le référentiel du labo

Vitesse de la particule \vec{v}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (3.4)$$

Dans le référentiel tournant

Vitesse \vec{v}'

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} m (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - V_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - V_{\text{ext}}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (3.6)$$

Moments conjugués \vec{p} et \vec{p}'

Dans le référentiel du labo

$$\vec{p} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{v}} = m \vec{v} \quad (3.7)$$

Dans le référentiel tournant

$$\vec{p}' = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{v}'} = m \vec{v}' + m (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = \vec{p} \quad (3.8)$$

- \vec{p}' ne coïncide pas avec la quantité de mouvement $m \vec{v}'$ dans le référentiel tournant
- $\vec{p}' = \vec{p}$ coïncide avec $m \vec{v}$
- en mécanique quantique, l'opérateur $(\hbar/mi) \vec{\nabla}_{\vec{r}'}$ associé à \vec{p}' / m représente la vitesse dans le système du labo et non dans le référentiel tournant.

Hamiltoniens H et H'

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} H' &= \vec{p}' \cdot \vec{v}' - \mathcal{L}' \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{2m} [\vec{p}' - m(\vec{\Omega} \times \vec{r}')]^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ &= \frac{\vec{p}'^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}') - \vec{p}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\vec{p}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}' \times \vec{p}') = \Omega \vec{e}_z \cdot (\vec{r}' \times \vec{p}') = \Omega L'_z \quad (3.11)$$

$$H' = \frac{\vec{p}'^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}') - \Omega L'_z \quad (3.12)$$

Moments cinétiques \vec{L} et \vec{L}'

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.13)$$

$$\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} \quad (3.14)$$

Egalité entre vecteurs

Pour passer des composantes x, y aux composantes sur x', y' , il faut utiliser les formules de transformation (3.3)

\vec{L}' n'est pas le moment de la quantité de mouvement dans le référentiel tournant.

Equations du mouvement dans le référentiel tournant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{r}}' = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} = \frac{\vec{p}'}{m} - (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \dot{\vec{p}}' = -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}'} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') + (\vec{p}' \times \vec{\Omega}) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{r}}' = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} = \frac{\vec{p}'}{m} - (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \dot{\vec{p}}' = -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}'} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') + (\vec{p}' \times \vec{\Omega}) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$m \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') + m [\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'] \times \vec{\Omega} \quad (3.17)$$

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') - 2m \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} m \Omega^2 r_{\perp}'^2 \quad (3.18)$$

$-2m \vec{\Omega} \times \vec{v}'$: Force de Coriolis

$\frac{1}{2} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} m \Omega^2 r_{\perp}'^2$: Force centrifuge

Condensat de bosons sans interactions

Hamiltonien dans le référentiel tournant

$$\hat{H}' = \sum_{i=1}^N \hat{h}'(i) \quad (3.19)$$

$$\hat{h}' = \frac{\hat{p}'^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\omega_x^2 \hat{x}'^2 + \omega_y^2 \hat{y}'^2 + \omega_z^2 \hat{z}'^2 \right) - \Omega \left(\hat{x}' \hat{p}'_y - \hat{y}' \hat{p}'_x \right) \quad (3.20)$$

Tous les bosons sont condensés dans l'état fondamental de l'hamiltonien à 1 particule h

Il faut donc calculer la fonction d'onde de cet état.

2 calculs seront présentés:

- Calcul perturbatif à la limite $\Omega \ll \omega_x, \omega_y$
- Calcul exact pour Ω quelconque

Rappels sur l'oscillateur harmonique

$$\hat{h}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2 \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}) \\ \hat{p} = \frac{i\hbar}{\sigma_0 \sqrt{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}) \end{cases} \quad (3.22) \quad \sigma_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0} \quad (3.23)$$

$$\varphi_0(x) = (\pi \sigma_0)^{-1/4} e^{-x^2/2\sigma_0^2} \quad (3.24.a)$$

$$\varphi_1(x) = (\pi \sigma_0)^{-1/4} \sqrt{2} \frac{x}{\sigma_0} e^{-x^2/2\sigma_0^2} \quad (3.24.b)$$

$$\langle x^2 \rangle = \sigma_0^2 / 2 = \hbar / 2 m \omega_0 \quad (3.25)$$

C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, Mécanique Quantique- chap.V

Etat fondamental perturbé (à la limite $\Omega \ll \omega_{x,y}$)

$$|\tilde{\varphi}_0\rangle = |\varphi_0\rangle - \Omega \sum_{n \neq 0} |\varphi_n\rangle \frac{\langle \varphi_n | \hat{l}'_z | \varphi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \quad (3.26)$$

Réexprimons \hat{l}'_z en fonction de $\hat{a}_x, \hat{a}_x^+, \hat{a}_y, \hat{a}_y^+$. Seul le terme en $\hat{a}_x^+ \hat{a}_y^+$ donne un résultat non nul quand il agit sur $|\varphi_0\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{l}'_z |\varphi_0\rangle &= (\hat{x}' \hat{p}'_y - \hat{y}' \hat{p}'_x) |\varphi_0\rangle \\ &= i \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{0x} & -\sigma_{0y} \\ \sigma_{0y} & \sigma_{0x} \end{bmatrix} \hat{a}_x^+ \hat{a}_y^+ |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle \\ &= i \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_y} & -\sqrt{\omega_x} \\ \sqrt{\omega_x} & \sqrt{\omega_y} \end{bmatrix} |n_x = 1, n_y = 1, n_z = 0\rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$|\hat{\varphi}_0\rangle = |0,0,0\rangle + \frac{i}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_x \omega_y}} \frac{\omega_y - \omega_x}{\omega_y + \omega_x} |1,1,0\rangle \quad (3.28)$$

Fonction d'onde $\tilde{\varphi}_0(\vec{r}')$ associé a $|\tilde{\varphi}_0\rangle$

En utilisant (3.24.a) et (3.24.b) dans (3.28), on obtient

$$\tilde{\varphi}_0(x', y', z') = \varphi_0(x', y', z') \left[1 + i \frac{x' y'}{\sigma_{0x} \sigma_{0y}} \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_x \omega_y}} \frac{\omega_y - \omega_x}{\omega_y + \omega_x} \right] \quad (3.29)$$

A l'ordre 1 inclus en Ω , cette expression peut être réécrite sous la forme

$$\hat{\varphi}_0(x', y', z') = \varphi_0(x', y', z') \exp\left(i \frac{m}{\hbar} \alpha x' y'\right) \quad (3.30)$$

où

$$\alpha = -\frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_y + \omega_x} \Omega \quad (3.31)$$

L'effet de la rotation est donc de faire apparaître une phase $(m/\hbar)\alpha x' y'$ sur la fonction d'onde non perturbée $\varphi_0(x', y', z')$ sans changer son module

Interprétation du gradient de la phase

Comme $\vec{p}/m = \vec{p}'/m$ est la vitesse dans le référentiel du labo [voir la discussion suivant (3.8)],

$$\vec{J}(\vec{r}_0) = \frac{1}{2} \left[\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\vec{p}'}{m} + \frac{\vec{p}'}{m} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \right] \quad (3.32)$$

est le courant au point \vec{r}_0 dans le référentiel du labo.

Sa valeur moyenne dans l'état $\tilde{\varphi}_0(\vec{r}', t)$ vaut

$$\langle \vec{J}(\vec{r}_0, t) \rangle = \frac{\hbar}{2mi} \left\{ \tilde{\varphi}_0^*(\vec{r}_0, t) [\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0(\vec{r}_0, t)] - [\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0^*(\vec{r}_0, t)] \tilde{\varphi}_0(\vec{r}_0, t) \right\} \quad (3.33)$$

Interprétation du gradient de la phase (suite)

De (3.30) on déduit aisément

$$\tilde{\varphi}_0^* (\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0) - (\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0^*) \tilde{\varphi}_0 = 2i\rho (\vec{\nabla}' S) \quad (3.34)$$

de sorte que

$$\langle \vec{J}(\vec{r}_0, t) \rangle = \rho(\vec{r}_0, t) \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}_0, t) \quad (3.35)$$

Le gradient de la phase de la fonction d'onde décrivant le condensat dans le référentiel tournant est donc relié au champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}_0, t)$ dans le référentiel du labo et non dans le référentiel tournant

$$\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}_0, t) = \vec{v}(\vec{r}_0, t) \quad (3.36)$$

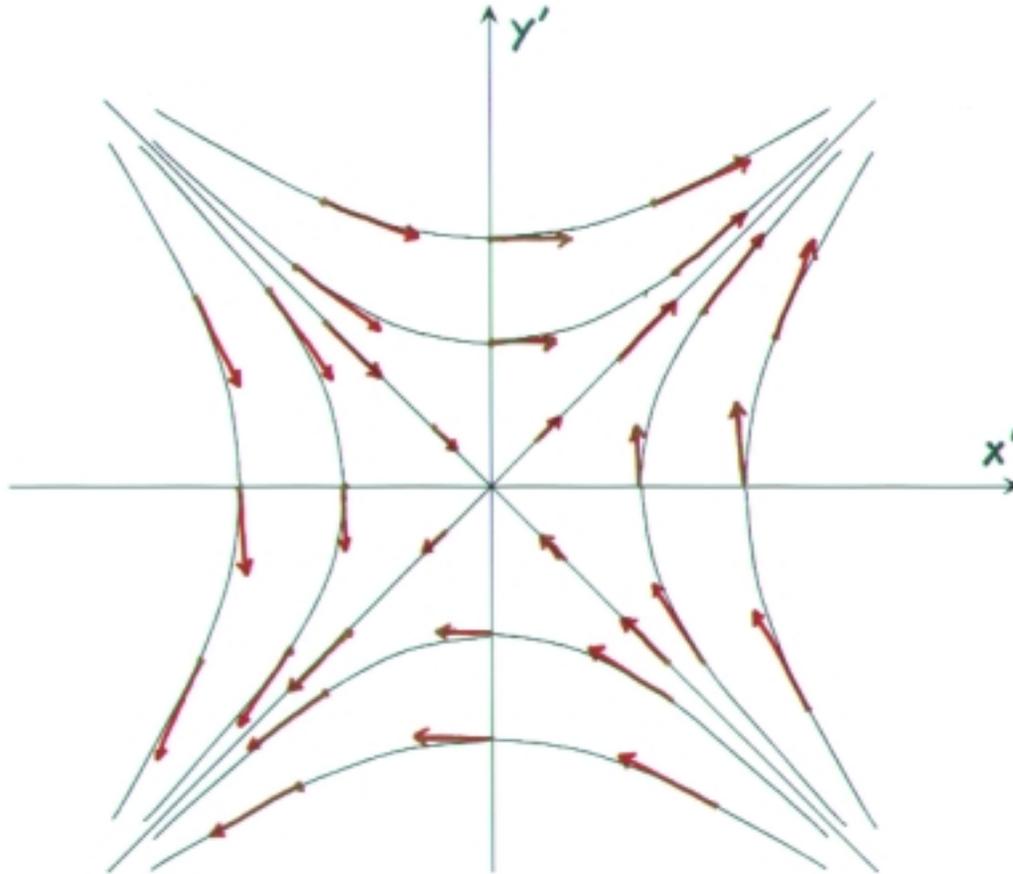
Champ de vitesses

$$\vec{v}(x', y', z') = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' \left(\frac{m}{\hbar} \alpha x' y' \right) = \alpha \vec{\nabla}' x' y' \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} v_{x'} = \alpha y' \\ v_{y'} = \alpha x' \\ v_{z'} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Le champ de vitesses (3.38) est le champ de vitesses dans le référentiel du labo, décrit par ses composantes sur les axes $Ox'y'z'$ du référentiel tournant

Allure du champ de vitesses du condensat tournant

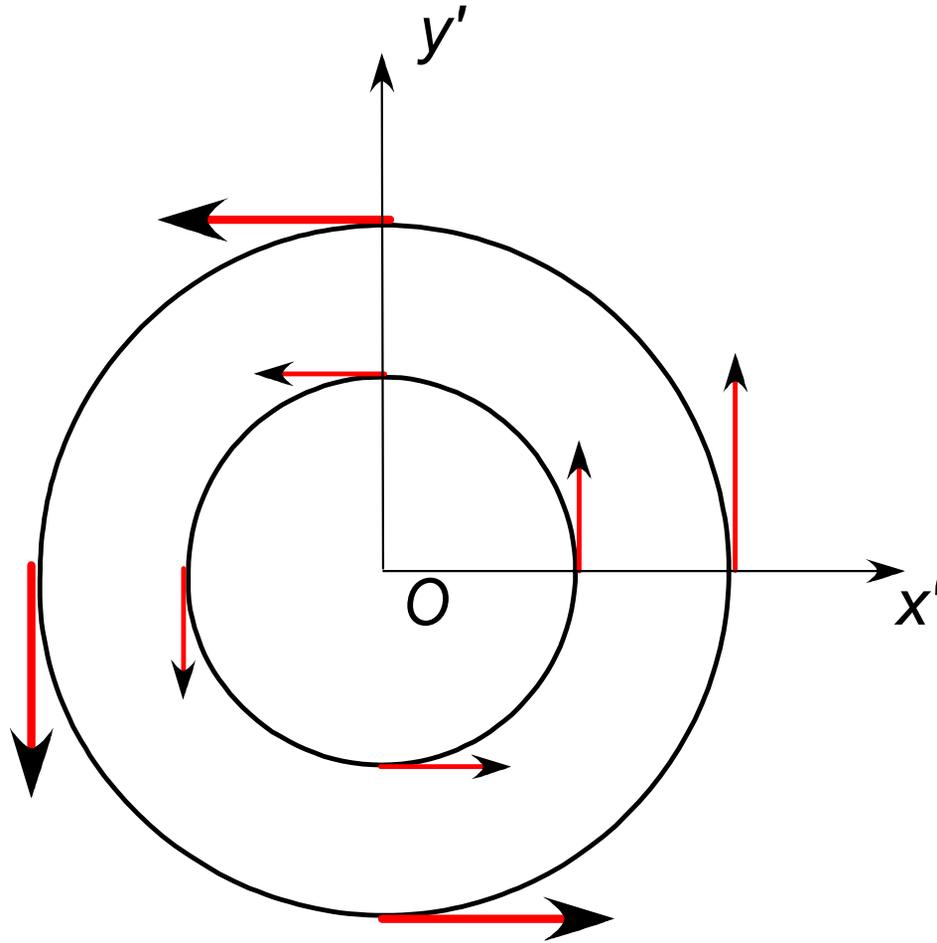


$$\vec{v} = \alpha \vec{\nabla}' x' y'$$

$$\begin{cases} v_{x'} = \alpha y' \\ v_{y'} = \alpha x' \\ v_{z'} = 0 \end{cases}$$

Figure III-1

Allure du champ de vitesses d'un corps solide tournant



$$\vec{v} = \Omega \vec{e}_z \times \vec{r}'$$

$$\begin{cases} v_{x'} = -\Omega y' \\ v_{y'} = \Omega x' \\ v_{z'} = 0 \end{cases}$$

Figure III-2

Allure du champ de vitesses du condensat tournant (suite)

- Le champ de vitesses du condensat tournant n'est pas celui d'un corps solide en rotation.
- La figure III-1 donne le champ des vitesses dans le laboratoire à un instant donné t .
Pour avoir le champ de vitesses à un autre instant t' , il faut tourner la figure III-1 d'un angle $\Omega(t'-t)$.
- Pour avoir le champ de vitesses dans le référentiel tournant, il faut, d'après (3.5), retrancher au champ de vitesses de la figure III-1 le champ :

$$-\vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

Calcul exact de l'état fondamental pour Ω quelconque

L'hamiltonien $\hat{h} = \hat{h}_0 - \Omega \hat{\ell}'_z$ est une fonction quadratique de $\hat{x}', \hat{y}', \hat{p}'_x, \hat{p}'_y$, ou encore de $\hat{a}_x, \hat{a}_x^+, \hat{a}_y, \hat{a}_y^+$ qui peut toujours être diagonalisée.

Cherchons une fonction d'onde de l'état fondamental ayant la forme d'une gaussienne avec une fonction quadratique de x', y' en exposant

$$\tilde{\varphi}_0(x', y', z') = \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} (\tilde{\omega}_x x'^2 + \tilde{\omega}_y y'^2 + \tilde{\omega}_z z'^2) + i \frac{m}{\hbar} \alpha x' y' \right\} \quad (3.39)$$

Peut-on à partir de l'équation aux valeurs propres déterminer $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \alpha$?

Calcul de $\hat{h} \tilde{\varphi}_0(x', y', z')$

Le calcul de $\hat{h} \tilde{\varphi}_0(x', y', z')$ ne présente pas de difficultés et donne

$$\begin{aligned}
 \hat{h} \tilde{\varphi}_0(x', y', z') = & \frac{1}{2} \left[m(\omega_x^2 - \tilde{\omega}_x^2 - 2\Omega\alpha + \alpha^2) x'^2 \right. \\
 & + m(\omega_y^2 - \tilde{\omega}_y^2 + 2\Omega\alpha + \alpha^2) y'^2 + m(\omega_z^2 - \tilde{\omega}_z^2) z'^2 \\
 & + i m(\alpha \tilde{\omega}_x + \alpha \tilde{\omega}_y - \Omega \tilde{\omega}_y + \Omega \tilde{\omega}_x) x' y' \left. \right] \tilde{\varphi}_0(x', y', z') \\
 & + \frac{\hbar}{2} (\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y + \tilde{\omega}_z) \tilde{\varphi}_0(x', y', z') \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}_0(x', y', z')$ est donc une fonction propre de \hat{h} de valeur propre $\hbar(\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y + \tilde{\omega}_z)/2$ si les coefficients de $x'^2, y'^2, z'^2, x'y'$ du crochet de (3.40) sont nuls.

Expression de $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \alpha$

$$\tilde{\omega}_x^2 = \omega_x^2 + \alpha^2 - 2\Omega\alpha$$

$$\tilde{\omega}_y^2 = \omega_y^2 + \alpha^2 + 2\Omega\alpha$$

$$\tilde{\omega}_z^2 = \omega_z^2$$

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_x - \tilde{\omega}_y}{\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y} \quad (3.41)$$

4 équations permettant de déterminer $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \alpha$

La phase de la fonction d'onde a la même dépendance en $x'y'$ que pour des vitesses de rotation faibles.

Le champ de vitesses a donc la même structure

Le condensat a toujours les axes du piège comme axes de symétrie. Par contre, l'anisotropie du condensat change quand la vitesse de rotation augmente

Condensat à la limite de Thomas-Fermi

Equation de Gross-Pitaevskii dans le référentiel tournant

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \varphi(\vec{r}', t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}') \varphi(\vec{r}', t) + g |\varphi(\vec{r}', t)|^2 \varphi(\vec{r}', t) - \frac{\hbar}{i} \Omega \left(x' \frac{\partial}{\partial y'} - y' \frac{\partial}{\partial x'} \right) \varphi(\vec{r}', t) \quad (3.42)$$

Le dernier terme, proportionnel à Ω , est le terme nouveau provenant du terme $-\Omega L'_z$ de l'hamiltonien à une particule

Notons que $V_{\text{ext}}(\vec{r}')$ en un point fixe \vec{r}' ne dépend plus du temps puisque le piège est fixe dans le référentiel tournant.

Equations hydrodynamiques à la limite de Thomas-Fermi

En reportant

$$\varphi(\vec{r}', t) = \sqrt{\rho(\vec{r}', t)} e^{iS(\vec{r}', t)} \quad (3.43)$$

dans (3.42) et l'équation complexe conjuguée, on obtient des équations hydrodynamiques pour ρ et S .

A la limite de Thomas-Fermi, il est légitime de négliger un terme dit de pression quantique proportionnel à $(\Delta\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$.

Par rapport aux équations (1.13), (1.15) et (1-21) du cours I, apparaissent des nouveaux termes, proportionnels à Ω , et provenant du dernier terme de (3.42)

Nouvelle équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}', t) + \vec{\nabla}' \cdot \left\{ \rho(\vec{r}', t) \left[\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}', t) - \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right] \right\} = 0 \quad (3.44)$$

Interprétation de cette équation

Compte tenu de (3.5) et (3.36), on peut écrire

$$\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}', t) - \vec{\Omega} \times \vec{r}' = \vec{v}'(\vec{r}', t) \quad (3.45)$$

où $\vec{v}'(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesses dans le référentiel tournant.

L'équation de continuité (3.44) peut donc également s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}', t) + \vec{\nabla}' \cdot [\rho(\vec{r}', t) \vec{v}'(\vec{r}', t)] = 0 \quad (3.46)$$

qui a bien la forme d'une équation de conservation dans le référentiel tournant.

Nouvelle équation d'Euler

Nouvelle équation d'évolution de la phase

(sans terme de pression quantique)

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}' S)^2 - V_{\text{ext}} - g\rho + \hbar (\vec{\nabla}' S) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \quad (3.47)$$

Nouvelle équation du champ de vitesse

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \vec{\nabla}' \left[-\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V_{\text{ext}} - g\rho + m \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \right] \quad (3.48)$$

Les dernier termes en Ω de (3.47) et (3.48) sont les termes nouveaux

Interprétation de l'équation d'Euler

Etablissons, à partir de (3.48) l'équation donnant la dérivée totale $d\vec{v}'/dt$ du champ de vitesses \vec{v}' dans le référentiel tournant

$$\frac{d}{dt} \vec{v}' = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}'(\vec{r}', t) = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{v}(\vec{r}', t) - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}', t) \quad (3.50)$$

car \vec{r}' doit être considéré constant dans $\partial \vec{v}'(\vec{r}', t) / \partial t$

On déduit donc de (3.48), (3.50) et de (3.5)

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = \vec{\nabla}' \left[-\frac{m}{2} (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - V_{\text{ext}} - g \rho + m (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \right] + m (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \quad (3.51)$$

Interprétation de l'équation d'Euler (suite)

L'équation (3.51) peut être réécrite sous la forme

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -m \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} v'^2 - (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \right) - \vec{\nabla} \left(V_{\text{ext}} + g\rho - \frac{1}{2} m \Omega^2 r_{\perp}^2 \right) \quad (3.52)$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} (v'^2) - (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -(\vec{\nabla}' \times \vec{v}') \times \vec{v}' \quad (3.53)$$

$$\vec{\nabla}' \times \vec{v}' = \vec{\nabla}' \times \vec{v} - \vec{\nabla}' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 0 - 2\vec{\Omega} = -2\vec{\Omega} \quad (3.54)$$

Le champ de vitesses \vec{v} est irrotationnel (gradient) mais non le champ de vitesse \vec{v}'

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -\vec{\nabla} \left(V_{\text{ext}} + g\rho - \frac{1}{2} m \Omega^2 r_{\perp}^2 \right) - 2m \vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (3.55)$$

Equation de la dynamique dans le référentiel tournant avec la force centrifuge et la force de Coriolis

Récapitulation

Quand on réécrit les équations hydrodynamiques dans le référentiel tournant avec le champ de vitesses \vec{v}' dans ce référentiel, elles ont bien la structure habituelle

1 - Equation de conservation

2 - Equation de la dynamique avec toutes les forces apparaissant dans le référentiel tournant

Solution stationnaire de l'équation de G-P dans le référentiel tournant

Dans le référentiel tournant, le potentiel de piégeage ne dépend pas du temps. L'équation (3.42) admet donc des solutions stationnaires.

Il en est de même des équations hydrodynamiques (3.44) et (3.47) la limite de Thomas-Fermi.

Ces solutions stationnaires obéissent aux équations :

$$\vec{\nabla}' \cdot \rho [\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] = (\vec{\nabla}' \rho) \cdot [\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] + \rho \vec{\nabla}' \cdot [\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] = 0 \quad (3.56.a)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}' S)^2 + V_{\text{ext}} + g\rho - \hbar (\vec{\nabla}' S) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = K \quad (3.56.b)$$

où K est une constante indépendante de x', y', z'.

Existence d'une solution quadratique en x',y',z'

Montrons qu'il existe une solution quadratique en x',y',z' pour la densité ρ et la phase S apparaissant dans les équations (3.56).

$$\rho(x', y', z') = \frac{1}{g} \left[\tilde{\mu} - \frac{m}{2} (\tilde{\omega}_x^2 x'^2 + \tilde{\omega}_y^2 y'^2 + \tilde{\omega}_z^2 z'^2 + 2\gamma x'y') \right] \quad (3.57.a)$$

$$S(x', y', z') = (m/2\hbar) (Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2\alpha x'y') + D \quad (3.57.b)$$

La forme choisie pour ρ rappelle une forme de Thomas-Fermi avec un nouveau potentiel chimique $\tilde{\mu}$.

$\vec{v} = (\hbar/m) \vec{\nabla}' S$ a des composantes linéaires en x',y',z' .

Il n'y a pas de termes linéaires en x',y',z' à cause de l'invariance par réflexion par rapport à O, et pas de termes en $x'z', y'z'$ à cause de l'invariance par réflexion par rapport au plan xOy .

Démonstration de l'existence d'une telle solution

Dans les équations (3.56), V_{ext} est une fonction quadratique de x' , y' , z' :

$$V_{\text{ext}}(x', y', z') = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2)$$

Si ρ et S sont donnés par les équations (3.57), tous les autres termes des équations (3.56) sont de fonctions quadratiques de x', y', z' sans termes linéaires.

En reportant (3.57) dans (3.56) et en annulant les coefficients des termes en x'^2 , y'^2 , z'^2 , $x'y'$ et les termes constants, on obtient 10 équations permettant de déterminer les 10 coefficients apparaissant dans (3.57).

Forme de la solution

- Champ de vitesses

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S = \begin{pmatrix} Ax' + \alpha y' \\ \alpha x' + By' \\ Cz' \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = A + B + C \quad (3.59)$$

- L'annulation du terme constant de (3.56.a) donne :

$$A + B + C = 0 \quad (3.60)$$

et donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.61)$$

Le champ de vitesses correspondant à la solution quadratique cherchée est donc, non seulement irrotationnel, mais aussi de divergence nulle.

Forme de la solution (suite)

- L'annulation du coefficient du terme en z'^2 de (3.56.a) donne :

$$C = 0 \quad (3.62)$$

et par suite, compte tenu de (3.60)

$$A = -B \quad (3.63)$$

D'après (3.58), la vitesse est donc nulle le long de Oz

- L'annulation du coefficient du terme en $x'y'$ de (3.56.a) donne, compte tenu de (3.63)

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \quad (3.64)$$

- Les coefficients des termes en x'^2 et y'^2 de (3.56.a) et celui du terme en $x'y'$ de (3.57.b) s'annulent si

$$A = B = \gamma = 0 \quad (3.65)$$

Forme de la solution (suite)

- L'annulation du coefficient du terme en z'^2 de (3.56.b) donne :

$$\tilde{\omega}_z^2 = \omega_z^2 \quad (3.66)$$

- L'annulation des coefficients des terme en x'^2 et y'^2 de (3.56.b) donne :

$$\tilde{\omega}_x^2 = \omega_x^2 + \alpha^2 - 2\alpha\Omega \quad (3.67)$$

$$\tilde{\omega}_y^2 = \omega_y^2 + \alpha^2 + 2\alpha\Omega \quad (3.68)$$

- L'annulation du terme constant de (3.56.b) donne :

$$K = \tilde{\mu} \quad (3.68)$$

Le report de (3.56.b) dans le second membre de (3.47) montre alors que S varie en $\exp(-i\tilde{\mu}t/\hbar)$

- Le terme constant D de (3.57.b) est une phase globale arbitraire.

Récapitulation

Il existe une solution de l'équation de G-P à la limite de Thomas-Fermi qui s'écrit, dans le référentiel tournant :

$$\rho(x', y', z') = \frac{1}{g} \left[\tilde{\mu} - \frac{m}{2} (\tilde{\omega}_x^2 x'^2 + \tilde{\omega}_y^2 y'^2 + \tilde{\omega}_z^2 z'^2) \right] \quad (3.69)$$

$$\vec{v}(x', y', z') = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(x', y', z') = \alpha \vec{\nabla}' x' y' \quad (3.70)$$

Rappelons que \vec{v} est le champ de vitesses dans le référentiel du labo. L'équation (3.70) donne les composantes de ce champ de vitesses dans le référentiel tournant.

$\tilde{\omega}_x^2, \tilde{\omega}_y^2, \tilde{\omega}_z^2$ sont donnés par (3.67), (3.68), (3.66).

α est donné en fonction de $\Omega, \tilde{\omega}_x^2, \tilde{\omega}_y^2$ par (3.64).

Non-unicité de la solution

La solution quadratique ainsi trouvée n'est pas la seule solution de l'équation de G-P.

Pour le voir, il suffit de noter que le champ de vitesses (3.70) ne peut décrire une situation où un tourbillon (« vortex ») existerait à l'intérieur du condensat, situation observée expérimentalement.

Il existe donc d'autres solutions de l'équation de G-P qui n'ont pas la forme quadratique simple choisie ici

Forme de la densité spatiale

Aussi bien en présence qu'en absence d'interactions, la nouvelle densité spatiale ρ ne contient pas de termes en $x'y'$ et a donc toujours les axes du piège comme axes de symétrie [voir le module de la fonction d'onde équations (3.39) et l'équation (3.69)]

La densité spatiale a une forme Gaussienne en l'absence d'interactions et celle d'un parabolïde inversé à la limite de Thomas-Fermi

Pour des vitesses de rotation suffisamment élevées, $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ diffèrent de ω_x^2 et ω_y^2 , respectivement. Les forces liées à la rotation modifient l'asymétrie du condensat.

Existe-t-il un solution quadratique quelle que soit la vitesse de rotation?

La densité spatiale doit être normalisable et positive

Les valeurs obtenues pour $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ quand on résout les équations couplées (3.64), (3.67) et (3.68) doivent être positives (le paraboloïde doit être inversé et s'annuler en dehors du domaine où la densité spatiale est positive).

Les mêmes contraintes existent en l'absence d'interactions

Les valeurs obtenues pour $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ quand on résout les équations couplées (3.41) doivent elles aussi être positives. Par contre, quand cette condition est satisfaite, la Gaussienne est toujours positive

Champ de vitesses

Il est toujours donné par le gradient de la fonction $x'y'$ et a donc la même structure spatiale qu'en l'absence d'interactions (voir la figure III-1)

Alors que les équations donnant $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ en fonction de ω_x^2 , ω_y^2 , Ω et α ont la même structure en l'absence et en présence d'interactions [voir équations (3.41) et (3.67), (3.68)], il n'en est pas de même pour l'équation reliant α à $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$, Ω [voir équations (3.41) et (3.64)]

Référence

- 1 – A. Recati, F. Zambelli, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 86, 377 (2001)