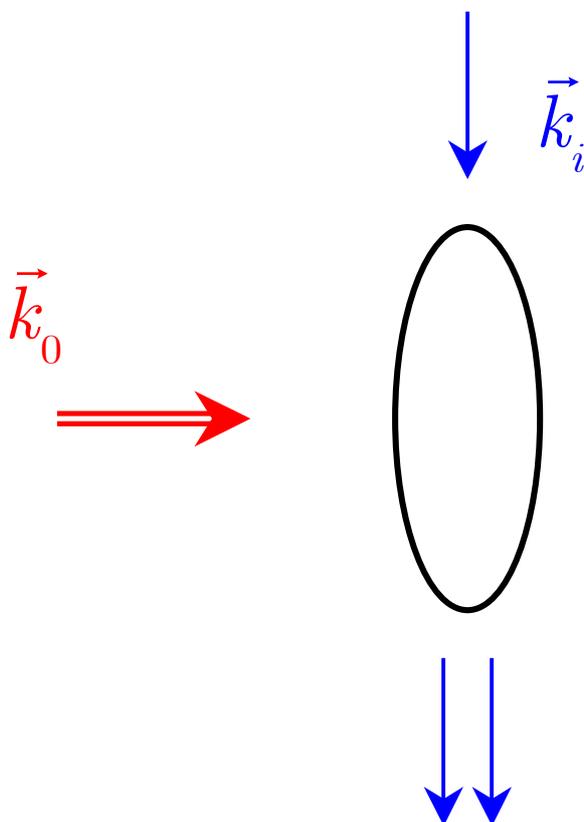


Amplification de lumière

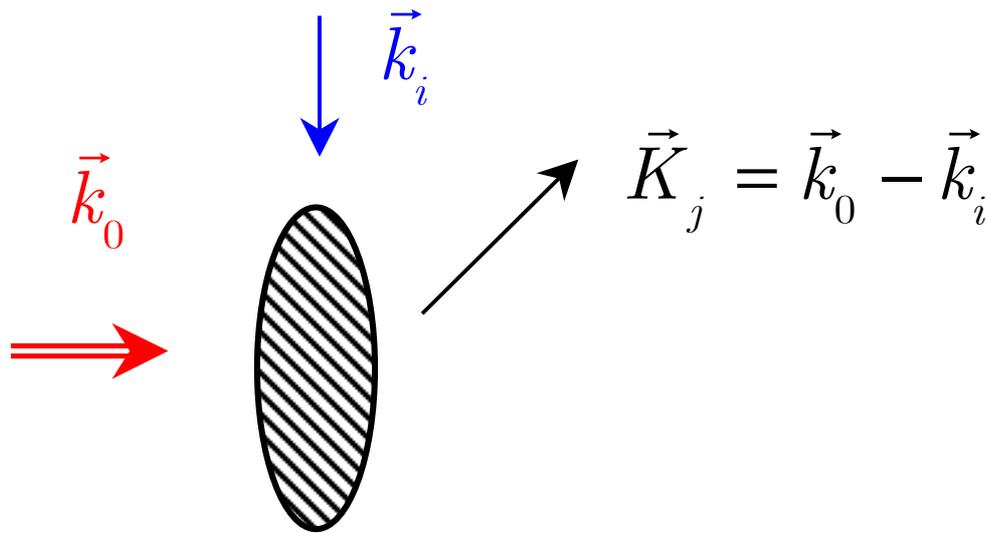
Un condensat excité par un faisceau laser pompe \vec{k}_0 peut

- Générer spontanément une onde de matière et une onde lumineuse par superradiance (cours VII)
- Amplifier une onde de matière incidente (cours VIII)

Le but de ce cours IX est de montrer qu'il peut aussi amplifier une onde lumineuse incidente.



Interprétation simple du gain optique



Quand la différence entre les fréquences du faisceau pompe \vec{k}_0 et du faisceau incident \vec{k}_i est bien réglée, une onde de matière est créée par diffusion de Bragg dans la direction $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$. Cette onde de matière interfère avec le condensat pour donner un réseau de densité de vecteur d'onde \vec{K}_j .

La diffraction du faisceau pompe \vec{k}_0 par ce réseau de densité se fait dans la direction \vec{k}_i et contribue à augmenter le nombre de photons \vec{k}_i , ce qui augmente le réseau de densité et ainsi de suite...

Remarques

1. La diffusion de Bragg induite par les faisceaux \vec{k}_0 et \vec{k}_i n'est résonnante que dans un intervalle de fréquence du faisceau \vec{k}_i très étroite (de l'ordre de l'inverse du temps de cohérence du condensat).

L'amplificateur de lumière décrit ici est donc à bande étroite.

2. Si le condensat est placé dans un cavité accordée pour les photons \vec{k}_i de fréquence résonnante pour la diffusion de Bragg, le mécanisme précédent peut conduire à une oscillation laser en l'absence de tout faisceau incident \vec{k}_i .

Lien avec les mécanisme CARL ("Coherent Atomic Recoil Laser") décrits dans les références 28, 29, 30.

Les paramètres physique importants

- Ω : Fréquence de Rabi de la transition à 2 photons associée à la diffusion de Bragg.
- Γ_j : Taux de relaxation des réseaux de densité, égal à l'inverse du temps de cohérence.
- G_j : Gain du milieu pour une onde de matière incidente (cours VII et VIII).

Quelques questions

- Peut-on définir un gain pour l'onde optique ?
- Dans quelles conditions peut-on observer une oscillation de Rabi entre les 2 états couplés par la transition à 2 photons, une décroissance exponentielle de l'état initial ?
- Que se passe-t-il sur le gain optique quand on s'approche du seuil de superradiance ?
-

Méthode suivie

Partir des équations de Bloch optiques décrivant l'évolution de la matrice densité pour les 2 états couplés par la transition à 2 photons.

A cause de l'amplification de lumière, la fréquence de Rabi Ω n'est pas constante. Il faut donc ajouter aux équations de Bloch une équation décrivant l'évolution de Ω .

Les photons s'échappent très vite du condensat. Les constantes de temps apparaissant dans l'équation d'évolution de Ω sont donc beaucoup plus courtes que celles apparaissant dans les équations de Bloch. Des approximations adiabatiques peuvent être alors utilisées pour simplifier ces équations couplées.

Auparavant, il sera utile de préciser quelques relations importantes entre les divers paramètres physiques.

Diverses fréquence de Rabi

Laser pompe \vec{k}_0

Fréquence de Rabi Ω_1

Laser sonde \vec{k}_i

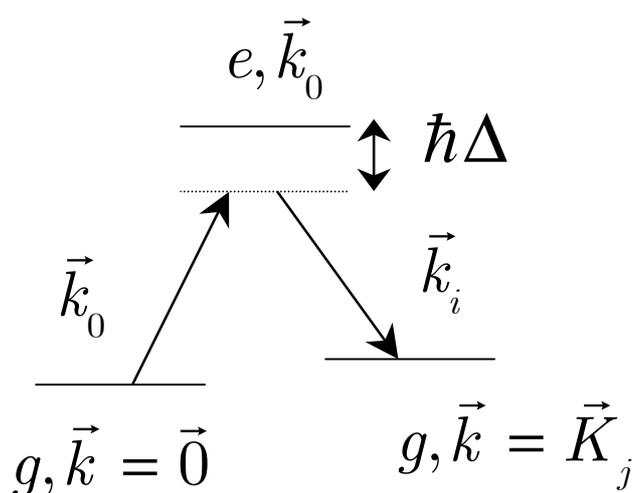
Fréquence de Rabi Ω'_1

Fréquence de Rabi Ω associée à la transition à 2 photons

Absorption de \vec{k}_0

Emission stimulée de \vec{k}_i

Atome passant de $\vec{k} = \vec{0}$ à $\vec{k} = \vec{K}_j$ en restant dans le même état interne g



$$\hbar\Omega / 2 = \frac{(\hbar\Omega_1 / 2)(\hbar\Omega'_1 / 2)}{\hbar\Delta} \qquad \Omega = \frac{\Omega_1\Omega'_1}{2\Delta}$$

Taux de diffusion Rayleigh R_1 à 1 atome

C'est le taux de départ de l'état fondamental g dû à une excitation non résonnante vers e (désaccord $\hbar\Delta$).

Le couplage non-résonnant entre l'état $|g, N_0 + 1\rangle$ et $|e, N_0\rangle$, où N_0 est le nombre de photons \vec{k}_0 , contamine l'état $|g, N_0 + 1\rangle$ par l'état $|e, N_0\rangle$.

Amplitude de contamination

$$\frac{\hbar \Omega_1 / 2}{\hbar \Delta} = \frac{\Omega_1}{2 \Delta}$$

L'instabilité radiative de e est décrite par la largeur naturelle Γ .

La contamination précédente confère à l'état g une instabilité qui n'est autre que le taux de diffusion Rayleigh et qui vaut :

$$R_1 = \Gamma \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} \right)^2 = \frac{\Gamma \Omega_1^2}{4\Delta^2}$$

Expression de Γ en fonction de l'élément de matrice δ du dipôle

$$\langle g | \hat{d} | e \rangle = \delta$$

L'expression de Γ peut être calculée à partir de la règle d'or de Fermi (référence 27, exercice 1, p.493, équation 13).

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3 \delta^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

ω_0 est la fréquence angulaire de la transition $e \leftrightarrow g$.

$$\omega_0 = c k_0 \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\hat{\lambda}}$$

λ : longueur d'onde de la transition

$$\Gamma = \frac{k_0^3 \delta^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar} = \frac{\delta^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar \hat{\lambda}^3}$$

Nombre de photons sonde n'_p dans le volume V du condensat

$$n'_p = \frac{\epsilon_0}{2} E'^2 V \frac{1}{\hbar \omega_0}$$

E' : champ du laser sonde \vec{k}_i

Réécrivons E' en fonction de la fréquence de Rabi Ω'_1 du laser sonde.

$$\hbar \Omega'_1 = \delta E'$$

$$E'^2 = \frac{\hbar^2 \Omega'^2_1}{\delta^2}$$

Remplaçons également δ^2 par son expression en fonction de Γ (voir T-228)

$$E'^2 = \frac{\hbar^2 \Omega'^2_1}{\Gamma 3 \pi \epsilon_0 \hbar \hat{\lambda}^3}$$

Il vient finalement :

$$n'_p = \frac{\Omega'^2_1 V}{\Gamma 6 \pi \hat{\lambda}^3 \omega_0} = \frac{\Omega'^2_1 V}{\Gamma 6 \pi c \hat{\lambda}^2}$$

Autre expression de n'_p

En fait, il est plus utile de réécrire n'_p en fonction de la fréquence de Rabi Ω de la transition à 2 photons, car c'est Ω qui apparaît dans les équation de Bloch optiques qui seront utilisées plus loin pour étudier l'évolution du système « atomes + champs ».

Multiplions pour cela le numérateur et le dénominateur de l'équation de T-229 donnant n'_p par $\Omega_1^2 / 4\Delta^2$. Il apparaît au numérateur Ω^2 et au dénominateur R_1 (voir T-226 et T- 227). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} n'_p &= \frac{(\Omega_1'^2 \Omega_1^2 / 4\Delta^2) V}{(\Gamma \Omega_1^2 / 4\Delta^2) 6\pi c \hat{\lambda}^2} \\ &= \frac{\Omega^2 V}{R_1 6\pi c \hat{\lambda}^2} \end{aligned}$$

Equations de Bloch optiques

(voir référence 27, chapitre V)

ρ_{ij} : Matrice densité atomique ($i, j = 1, 2$)

1 : Etat atomique $\vec{k} = \vec{0}$ (condensat)

2 : Etat atomique $\vec{k} = \vec{K}_j$ (onde sortante)

$$\begin{cases} v = 2 \operatorname{Im} \rho_{12} \\ w = \rho_{22} - \rho_{11} \end{cases}$$

L'excitation à 2 photons est résonnante. v et w obéissent alors aux 2 équations d'évolution couplées :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{\Gamma_j}{2} v - \Omega w \\ \dot{w} &= \Omega v \end{aligned}$$

$2 / \Gamma_2$ est le temps de cohérence du réseau de densité (proportionnel à ρ_{12}).

Il n'y a pas de transition entre 1 et 2 (pas de relaxation longitudinale), d'où l'absence de terme en $-w / T_1$ dans l'équation donnant \dot{w} .

Régime des faibles intensités pour le laser pompe

L'intensité est très en dessous du seuil de superradiance et on peut négliger le gain G_j de l'onde de matière

$$G_j \ll \Gamma_j$$

L'intensité du faisceau laser sonde n'augmentera pas de façon considérable et on peut négliger l'augmentation de la fréquence de Rabi Ω due à l'amplification du faisceau sonde.

Dans les équations de Bloch, Ω peut être considéré comme constant.

Solution des équations de Bloch

$$\dot{v} = -\frac{\Gamma_j}{2}v - \Omega w$$

$$\dot{w} = \Omega v$$

La solution est une somme de 2 exponentielles $e^{\lambda_i t}$ où les λ_i ($i = 1, 2$) sont les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_j/2 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$$

Ces valeurs propres ont une partie imaginaire non nulle si $\Omega > 4\Gamma_j$.

Il y a donc 2 régimes

$$\Omega > 4\Gamma_j$$

Oscillation de Rabi

$$\Omega < 4\Gamma_j$$

Amortissement pur

Limite $\Omega \ll \Gamma_j$

On peut alors, dans la première équation de Bloch, éliminer adiabatiquement v qui s'amortit très vite vers la valeur

$$v = -\frac{2\Omega}{\Gamma_j} w$$

Le report de cette valeur de v dans la seconde équation donne alors

$$\dot{w} = -\frac{2\Omega^2}{\Gamma_j} w$$

ce qui montre que le condensat se vide avec le taux $2\Omega^2 / \Gamma_j$.

C'est dans ce régime qu'il est possible d'introduire une probabilité de transition par unité de temps calculable par la règle d'or de Fermi.

Laser pompe plus intense

Il faut alors tenir compte de la variation de Ω avec t et utiliser une équation donnant $\dot{\Omega}$.

Le nombre n'_p de photons du laser sonde dans le volume V du condensat évolue par suite

- du flux d'entrée des photons venant du laser sonde
- du flux de sortie des photons qui quittent le volume du condensat au bout d'un temps de l'ordre de l/c (l :longueur du condensat le long de \vec{k}_i).
- de l'apparition de nouveaux photons résultant de la diffraction du faisceau laser pompe par le réseau de densité.

Equation d'évolution de n'_p

Termes décrivant l'évolution due aux flux d'entrée et de sortie

$$\phi_0 - \frac{c}{l} n'_p$$

ϕ_0 : flux d'entrée pouvant être écrit sous la forme

$$\phi_0 = \frac{c}{l} n'_0$$

En l'absence d'amplification, on aurait à l'équilibre $n'_p = n'_0$.

Terme décrivant l'amplification

Toute diffraction d'un photon pompe par le réseau de densité fait passer un atome de l'état 1 ($\vec{k} = \vec{0}$) à l'état 2 ($\vec{k} = \vec{K}_j$) et augmente par suite $N_0 w = N_2 - N_1$ de + 2. On peut donc écrire

$$\left(\dot{n}'_p\right)_{\text{amplif}} = N_0 \frac{\dot{w}}{2} = \frac{N_0}{2} \Omega v$$

Récapitulation

$$\dot{n}'_p = \frac{c}{l} (n'_0 - n'_p) + \frac{N_0}{2} \Omega v$$

Reportons l'expression de n'_p en fonction de Ω établie en T-230. Il vient

$$\frac{V}{R_1 6 \pi \hat{\lambda}^2 c} 2 \Omega \dot{\Omega} = \frac{c}{l} \frac{V}{R_1 6 \pi \hat{\lambda}^2 c} (\Omega_0^2 - \Omega^2) + \frac{N_0}{2} \Omega v$$

Ω_0 : fréquence de Rabi associée à n'_0 .

Tant que Ω n'est pas devenu grand devant Ω_0 , on peut écrire

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 = (\Omega_0 - \Omega)(\Omega_0 + \Omega) \simeq 2 \Omega (\Omega_0 - \Omega)$$

de sorte que l'équation précédente peut être mise sous la forme

$$\dot{\Omega} = \frac{c}{l} \left[\Omega_0 - \Omega + \frac{l}{c} \frac{R_1 6 \pi \hat{\lambda}^2 c}{V} \frac{N_0}{2} v \right]$$

Equation d'évolution de Ω

Posons $V = S l$ où S est la surface de la section du condensat par un plan perpendiculaire à \vec{k}_i et posons

$$G_j = N_0 R_1 \frac{3\pi \lambda^2}{S} = N_0 R_1 \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda^2}{S}$$

L'équation de T-237 devient

$$\dot{\Omega} = \frac{c}{l} \left[\Omega_0 - \Omega + \frac{G_j}{2} v \right]$$

G_j est, à un facteur 2 près, le gain pour l'onde de matière introduit en T-188 ($\lambda^2 / S \approx \Omega_i$).

Il faut maintenant en principe résoudre le système d'équations couplées : équations de Bloch + équation donnant $\dot{\Omega}$.

Elimination adiabatique du champ

Comme le temps d'amortissement l/c de Ω est très court, on peut éliminer adiabatiquement Ω et écrire

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{G_j}{2} v$$

Nouvelle équation d'évolution de v

Reportons l'expression précédente de Ω dans la première équation de Bloch.

Si l'on suppose t suffisamment petit pour qu'on puisse négliger la déplétion du condensat et remplacer donc w par -1 , il vient :

$$\dot{v} = \frac{G_j - \Gamma_j}{2} v + \Omega_0$$

L'interprétation de G_j et Γ_j comme coefficients de gain et de perte de l'onde de matière est confirmée.

Intensité laser pompe faible

$$G_j \ll \Gamma_j$$

L'équation donnant v_j montre que v_j tend vers $2 \Omega_0 / (\Gamma_j - G_j)$.

Le report de cette expression dans l'équation $\Omega = \Omega_0 + (G_j / 2)v$ donne :

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 + \frac{G_j}{\Gamma_j - G_j} \right) = \Omega_0 \frac{\Gamma_j}{\Gamma_j - G_j}$$

On a négligé dans ce traitement les effets de propagation et remplacé le champ par un champ moyen uniforme.

Gain optique

L'équation obtenue pour Ω montre que le champ sonde est amplifié par un facteur

$$\frac{\Gamma_j}{\Gamma_j - G_j} = 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j - G_j} \underset{G_j \ll \Gamma_j}{\simeq} 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j}$$

Section efficace de gain σ_{gain}

Le gain en amplitude calculé en T-240 peut être écrit

$$1 + \frac{G_j}{\Gamma_j} = 1 + \frac{1}{2} \rho_0 l \sigma_{\text{gain}}$$

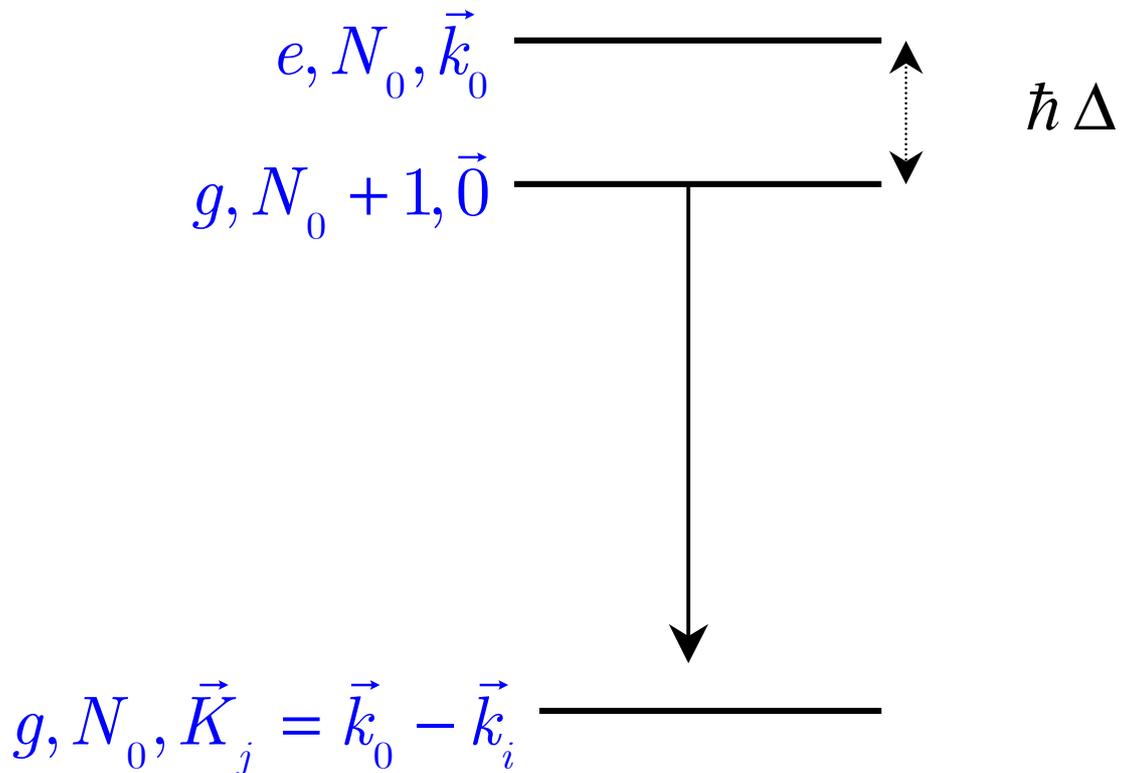
où σ_{gain} est la section efficace de gain correspondant au processus au cours duquel un photon sonde incident arrivant sur un atome du condensat donne naissance à un nouveau photon, ρ_0 est la densité spatiale du condensat, de longueur l .

A partir de l'expression de G_j donnée en T-238, on déduit

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{gain}} &= \frac{2G_j}{\Gamma_j \rho_0 l} = \frac{2}{\rho_0 l} \frac{1}{\Gamma_j} \rho_0 V R_1 \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda^2}{S} \\ &= \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{R_1}{\Gamma_j} \end{aligned}$$

Calcul direct de σ_{gain}

Etats non perturbés du système atome + photons du laser pompe.



e, g : Nombres quantiques internes

$N_0, N_0 + 1$: Nombres de photons du laser pompe

$\hbar \vec{k}_0, 0, \hbar \vec{K}_j$: Impulsions de l'atome

$|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle$ est "contaminé" par $|e, N_0, \vec{k}_0\rangle$

(couplage de Rabi $\Omega_1 / 2$)

Amplification

Elle se fait sur la transition entre l'état $|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle$ contaminé

$$\overline{|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle} = |g, N_0, 1, \vec{0}\rangle - \frac{\Omega_1}{2\Delta} |e, N_0, \vec{k}_0\rangle$$

et l'état $|g, N_0, \vec{K}_j\rangle$.

Initialement, l'état $\overline{|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle}$ a une population égale à 1 et l'état $|g, N_0, \vec{K}_j\rangle$ est vide.

Force d'oscillateur de la transition

Egale au poids de e dans l'état initial

$$\Omega_1^2 / 4\Delta^2$$

Largeur de raie de la transition

Taux d'amortissement du réseau de densité (« cohérence » entre $\vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{k} = \vec{K}_j$)

$$\Gamma_j$$

Expression de σ_{gain}

$$\sigma_{\text{gain}} = \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \times \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} \right)^2 \times \frac{\Gamma}{\Gamma_j}$$

En effet $R_1 = \Gamma \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} \right)^2$ (voir T-227)

Premier facteur $\frac{3}{2\pi} \lambda^2$

Section efficace à résonance pour une transition $e \leftrightarrow g$ de force d'oscillateur 1.

Second facteur $\left(\Omega_1 / 2\Delta \right)^2$

Facteur de réduction de la section efficace précédente dû à la réduction de la force d'oscillateur pour la transition d'amplification.

Troisième facteur Γ / Γ_j

Facteur d'augmentation dû au fait que l'émission se fait sur une largeur Γ_j plus petite que Γ .

Approche du seuil de superradiance

G_j n'est plus très petit devant Γ_j et le facteur par lequel le champ sonde est multiplié doit être écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_j}{\Gamma_j - G_j} &= 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j - G_j} \\ &= 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j} + \left(\frac{G_j}{\Gamma_j}\right)^2 + \left(\frac{G_j}{\Gamma_j}\right)^3 + \dots\end{aligned}$$

Série de termes décrivant les effets d'ordre supérieur.

Au seuil de superradiance

Le gain diverge.

L'onde de matière \vec{K}_j et l'onde optique \vec{k}_0 croissent de manière exponentielle jusqu'à ce que les effets de déplétion du condensat viennent arrêter cette croissance.

Expérience de M.I.T.

(référence 26)

Le faisceau laser pompe et le faisceau laser sonde tous deux perpendiculaires à l'axe du condensat.

Les polarisations sont parallèles à l'axe du condensat de manière à éviter les effets de superradiance spontanée.

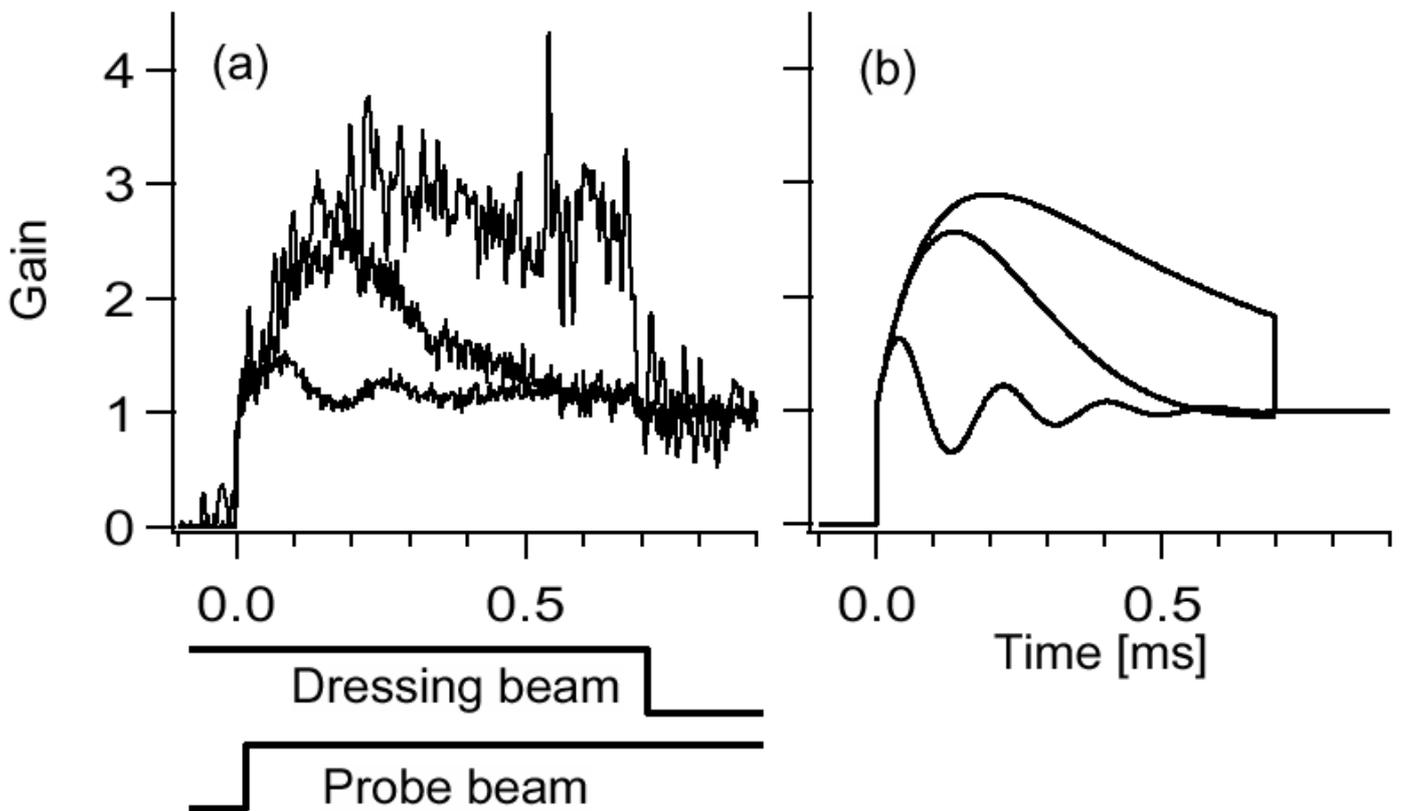
La transmission du faisceau laser sonde est mesurée pour diverses valeurs de l'intensité de ce faisceau.

Voir la figure 2 de la référence 26, reproduite sur T-247.

La figure 2a donne les courbes expérimentales, la figure 2b les courbes correspondantes calculées à partir des équations de Bloch.

Figure 2 de la référence 26

S.Inouye, R.Löw, R.Gupta, T.Pfau, A.Görlitz,
T.Gustavson, D.Pritchard, W.Ketterle,
Phys.Rev.Lett. **85**, 4225 (2000).



Commentaires sur la figure 2a

Les courbes sont normalisées par l'intensité du laser sonde.

L'intensité du laser sonde est 5.7mW/cm^2 pour la courbe du bas, 1.5mW/cm^2 pour la courbe du milieu, 0.10mW/cm^2 pour la courbe du haut.

A faible intensité (régime de décroissance exponentielle), le gain est de l'ordre de 2.8.

A intensité plus élevée, apparaissent des oscillations de Rabi.

Dans la référence 26 sont également étudiés des effets de modification de la vitesse de groupe de la lumière dans le condensat, associés à la très forte variation de l'indice du milieu (courbe de gain très étroite).

Spectroscopie pompe-sonde du réseau de densité

Le principe de l'expérience consiste à préparer tout d'abord un réseau de densité par interférence entre le condensat et une onde de matière \vec{K}_j obtenue par diffusion de Bragg.

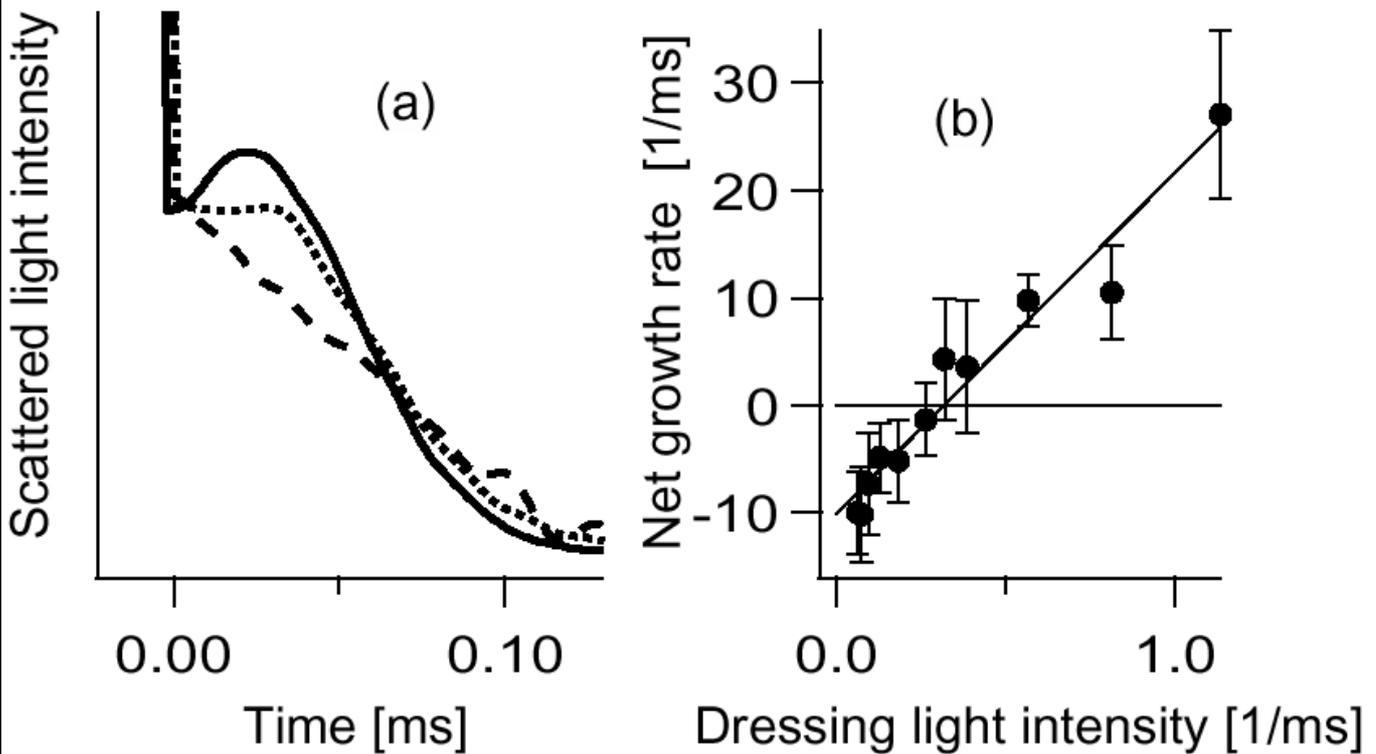
Le faisceau laser \vec{k}_i est ainsi appliqué pendant une durée de $100\mu s$ et environ 5% des atomes sont portés dans l'état \vec{K}_j .

Après coupure du faisceau laser \vec{k}_i , on étudie l'évolution temporelle du réseau de densité en observant les variations de la lumière du faisceau laser pompe diffractée par le réseau de densité. Le faisceau laser pompe est alors utilisé comme sonde pour suivre l'évolution du réseau de densité.

Voir la figure 4 de la référence 26 reproduite sur T-250.

Figure 4 de la référence 26

S.Inouye, R.Löw, R.Gupta, T.Pfau, A.Görlitz,
T.Gustavson, D.Pritchard, W.Ketterle,
Phys.Rev.Lett. **85**, 4225 (2000).



Commentaires sur la figure 4

Courbe a

Résultats expérimentaux (normalisés par l'intensité diffractée à $t=0$) pour diverses valeurs de l'intensité du laser pompe.

2.9mW/cm² pour la courbe du bas

5.7mW/cm² pour la courbe du milieu

13mW/cm² pour la courbe du haut.

La pente à l'origine, négative à faible intensité, devient positive à haute intensité, montrant ainsi le changement de signe de $G_j - \Gamma_j$.

Courbe b

Taux de croissance initial de l'intensité diffractée en fonction de l'intensité laser pompe mesurée en unités du taux de diffusion Rayleigh R_1 .

La valeur de R_1 correspondant à l'annulation du taux de croissance ($G_j = \Gamma_j$) est en bon accord avec la valeur prévue à partir du temps de cohérence du condensat.

Références

26. S.Inouye, R.Löw, R.Gupta, T.Pfau, A.Görlitz, T.Gustavson, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **85**, 4225 (2000).
27. C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg, Processus d'interaction entre atomes et photons, InterEditions/Editions du CNRS, Paris (1988). Traduction anglaise : Atom-Photon Interactions, Wiley (1992).
28. R.Bonifacio, L. de Salvo, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, **A341**, 360 (1994).
29. M.Moore, P.Meystre, Phys.Rev. **A58**, 3248 (1998).
30. P.Berman, Phys.Rev.**A59**, 585 (1999).