

## Condensats homogènes

- Pas de potentiel de piégeage
- Densité spatiale indépendante de  $\vec{r}$
- Conditions aux limites périodiques dans un cube de côté  $L$

Hamiltonien  $\hat{H}$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(\hat{r}_i - \hat{r}_j)$$

$$V(\hat{r}_i - \hat{r}_j) = g \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j) \quad \text{Pseudo-potentiel}$$

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \quad a : \text{Longueur de diffusion}$$

Etat fondamental de  $\hat{H}$

Méthode variationnelle.

Quel est le meilleur état produit

$$|\psi_0\rangle = |\varphi(1)\rangle \dots |\varphi(i)\rangle \dots |\varphi(N)\rangle$$

où tous les atomes sont dans le même état  $\varphi$  ?

# Equation de Gross-Pitaevskii

La recherche du minimum de

$$E(\varphi) = \frac{\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}$$

conduit à l'équation suivante pour  $\varphi$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + (N-1)g |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r})$$

Le second terme décrit l'interaction de chaque atome avec le champ moyen créé par les  $N-1$  autres.

## Solution

$$\varphi(\vec{r}) = 1/L^{3/2}$$

Densité uniforme  $\rho_0 = N/L^3$

$$\mu = g \frac{N-1}{L^3} \simeq g \frac{N}{L^3} = g \rho_0$$

$\mu$  : Potentiel chimique

## Susceptibilité statique $\chi(q)$

(à la limite  $q \rightarrow 0$ )

Exemple simple de calcul ne nécessitant pas de connaître les états excités de  $\hat{H}$ .

Le système est soumis à une perturbation extérieure faible  $U_0 \cos q x$  qui donne naissance à une modulation spatiale de densité, linéaire en  $U_0$ . D'après la définition de  $\chi(q)$  (voir T- 40).

$$\rho_0 \rightarrow \rho_0 + L^{-3} U_0 \chi(q) \cos q x$$

Nous voulons ici calculer  $\lim_{q \rightarrow 0} \chi(q)$  pour utiliser ensuite un tel résultat dans la règle de somme

$$m_{-1}(q) = -\frac{\hbar}{2} \chi(q)$$

(voir T- 44)

## Principe du calcul

Sous l'effet de la force appliquée  $-\vec{\nabla} U_0 \cos q x$ , les atomes s'accroissent à certains endroits et la densité moyenne dépend de  $x$ .

Au sein du fluide, règne une pression

$$P(x) = \frac{1}{2} g \rho(x)^2 \text{ [en plus de la "pression}$$

quantique" liée à l'énergie de confinement et négligeable quand  $q \rightarrow 0$ , plus

précisément quand  $\hbar^2 q^2 / 2 m \ll g \rho_0$ ]. Voir cours 98-99 pages IX-10, IX-11.

Un équilibre statique sera atteint quand la force moyenne par particule liée au gradient de  $P(x)$

$$-\frac{1}{\rho(x)} \vec{\nabla} P(x) = -g \vec{\nabla} \rho(x)$$

compense la force extérieure

$$-\vec{\nabla} U_0 \cos q x$$

## Autre méthode plus directe

Utilisation de l'équation de  $G - P$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + U_0 \cos qx \varphi(x) + Ng |\varphi(x)|^2 \varphi(x) = \mu \varphi(x)$$

Le premier terme peut être négligé à la limite  $q \rightarrow 0$  (Thomas-Fermi)

L'équation de  $G - P$  devient

$$U_0 \cos qx + Ng |\varphi(x)|^2 = \mu$$

ce qui redonne bien, compte tenu de

$N |\varphi(x)|^2 = \rho(x)$  et  $\vec{\nabla} \mu = 0$ , la condition d'équilibre statique

$$-\vec{\nabla} U_0 \cos qx - g \vec{\nabla} \rho(x) = 0$$

On obtient alors, en posant

$$\rho(x) = \rho_0 + L^{-3} U_0 \chi(q) \cos qx$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(q) = -\frac{L^3}{g} = \frac{-N}{g \rho_0} = \frac{-N}{\mu}$$

## Propriétés dynamiques

La méthode variationnelle précédente ne donne que l'état fondamental du condensat et ses déformations sous l'effet d'une perturbation statique de grande longueur d'onde.

Pour calculer les facteurs de structure et les polarisabilités, il faut connaître les états excités de  $\hat{H}$  et leurs énergies.

Nous allons effectuer un tel calcul en utilisant la théorie de Bogolubov.

### Théorie de Bogolubov (ref.4)

Diagonalisation approchée de  $\hat{H}$  à la limite

$T \ll \text{Température critique } T_c$

$\rho_0 a^3 \ll 1$  : Milieu dilué

Pour un condensat homogène, cette approche donne des résultats analytiques.

# $\hat{H}$ en seconde quantification

Base  $\left\{ \left| \vec{k}_i \right\rangle \right\}$  des ondes planes  $L^{-3/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_{\vec{k}} \quad \hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_{\vec{k}}^+$$

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_k \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{V}_{\text{int}} \quad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar \omega_k^0$$

$$\hat{V}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r})$$

$$= \frac{g}{2L^3} \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}_1}^+ \hat{a}_{\vec{k}_2}^+ \hat{a}_{\vec{k}_2+\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}_1-\vec{k}}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad (\text{voir T-15})$$

Transformation de cet Hamiltonien utilisant le fait que

$$\langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle \gg \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \langle \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \rangle$$

## Hamiltonien approché $\hat{H}_{eff}$

- On néglige tous les termes de  $\hat{H}$  qui contiennent moins de 2 opérateurs  $\hat{a}_0$  ou  $\hat{a}_0^+$
- On replace  $\hat{a}_0$  et  $\hat{a}_0^+$  par  $\sqrt{N}$

Traitement spécial pour le terme

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= \frac{g}{2L^3} \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \\ &= \frac{g}{2L^3} \hat{a}_0^+ (\hat{a}_0 \hat{a}_0^+ - 1) \hat{a}_0 = \frac{g}{2L^3} \left[ (\hat{a}_0^+ \hat{a}_0)^2 - \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \right]\end{aligned}$$

On remplace  $\hat{a}_0^+ \hat{a}_0$  par  $N - \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}$

$$I_0 = \frac{g}{2L^3} \left[ N(N-1) - 2N \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \right]$$

On obtient ainsi pour  $\hat{H}_{eff}$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff} &= \frac{1}{2} g \rho_0 N + \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \varepsilon_k \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \\ &+ \frac{1}{2} g \rho_0 \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \left[ \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ \hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{-\vec{k}}^+ + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \right]\end{aligned}$$

## Structure de $\hat{H}_{eff}$

Fonction quadratique de  $\hat{a}_{\vec{k}}$  et  $\hat{a}_{\vec{k}}^+$  qui peut être diagonalisée par introduction de modes normaux de vibration

## Equation de Heisenberg pour $\hat{a}_{\vec{k}}$

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{\vec{k}} = \left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{H}_{eff} \right] = \partial\hat{H}_{eff} / \partial\hat{a}_{\vec{k}}^+$$

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{\vec{k}} = (\varepsilon_k + g\rho_0)\hat{a}_{\vec{k}} + g\rho_0\hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

L'évolution de  $\hat{a}_{\vec{k}}$  est couplée à celle de  $\hat{a}_{-\vec{k}}^+$ .

On calcule donc

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{-\vec{k}}^+ = \left[ \hat{a}_{-\vec{k}}^+, \hat{H}_{eff} \right] = -\partial\hat{H}_{eff} / \partial\hat{a}_{-\vec{k}}$$

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{-\vec{k}}^+ = -(\varepsilon_k + g\rho_0)\hat{a}_{-\vec{k}}^+ - g\rho_0\hat{a}_{\vec{k}}$$

Systeme fermé de 2 équations linéaires couplées pour  $\hat{a}_{\vec{k}}$  et  $\hat{a}_{-\vec{k}}^+$  dont on peut chercher les valeurs propres et les vecteurs propres.

# Modes normaux

## Fréquences propres

Valeurs propres de la matrice

$$\frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} \varepsilon_k + g\rho_0 & g\rho_0 \\ -g\rho_0 & -(\varepsilon_k + g\rho_0) \end{pmatrix}$$

On obtient  $\pm \hbar\omega_k^B$  avec

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2g\rho_0)} = \sqrt{\hbar\omega_k^0(\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$

## Vecteurs propres

$$\hat{b}_{\vec{k}} = u_k \hat{a}_{\vec{k}} + v_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

$$\hat{b}_{-\vec{k}}^+ = v_k \hat{a}_{\vec{k}} + u_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

où  $u_k$  et  $v_k$  sont réels, ne dépendent que de  $k = |\vec{k}|$  et sont normalisés de telle sorte que

$$\left[ \hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^+ \right] = 1$$

ce qui donne

$$u_k^2 - v_k^2 = 1$$

## Vecteurs propres (suite)

Comme  $u_k^2 - v_k^2 = 1$ , nous poserons

$$u_k = \cosh \theta_k \quad v_k = \sinh \theta_k$$

On trouve alors pour  $\theta_k$  le résultat

$$\tanh 2\theta_k = \frac{g\rho_0}{\epsilon_k + g\rho_0} = \frac{\mu}{\hbar\omega_k^0 + \mu}$$

## Récapitulation

$$\hat{b}_{\vec{k}} = \cosh \theta_k \hat{a}_{\vec{k}} + \sinh \theta_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

$$\hat{b}_{-\vec{k}}^+ = \sinh \theta_k \hat{a}_{\vec{k}} + \cosh \theta_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

L'inversion de ce système donne

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \cosh \theta_k \hat{b}_{\vec{k}} - \sinh \theta_k \hat{b}_{-\vec{k}}^+$$

$$\hat{a}_{-\vec{k}}^+ = -\sinh \theta_k \hat{b}_{\vec{k}} + \cosh \theta_k \hat{b}_{-\vec{k}}^+$$

Expression de  $\hat{H}_{eff}$  en fonction de  $\hat{b}_{\vec{k}}$  et  $\hat{b}_{\vec{k}}^+$

$$\hat{H}_{eff} = E_0 + \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_k^B \hat{b}_{\vec{k}}^+ \hat{b}_{\vec{k}}$$

# Interprétation physique

## Opérateurs $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}_{\vec{k}}^+$

Détruisent et créent une excitation élémentaire de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et d'énergie  $\omega_k^B$

## Relation de dispersion

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0 (\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$

Limite  $\hbar\omega_k^0 \ll \mu$

$$\hbar\omega_k^B \simeq \sqrt{2\hbar\omega_k^0 \mu} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{m} \mu}$$

$$\omega_k^B \simeq c k$$

$$c = \sqrt{\mu/m}$$

Les excitations élémentaires sont des phonons se propageant à la vitesse

$$c = \sqrt{\mu/m}$$

**Limite  $\hbar\omega_k^0 \gg \mu$**

$$\begin{aligned}\hbar\omega_k^B &= \hbar\omega_k^0 \sqrt{1 + \frac{2\mu}{\hbar\omega_k^0}} \\ &\simeq \hbar\omega_k^0 + \mu\end{aligned}$$

Les excitations élémentaires sont de type particule libre avec une correction en énergie égale à  $\mu$ .

**Valeur  $k_0$  de  $k$  séparant les 2 régimes**

$$\hbar\omega_{k_0}^0 = \mu$$

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = g\rho_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a\rho_0$$

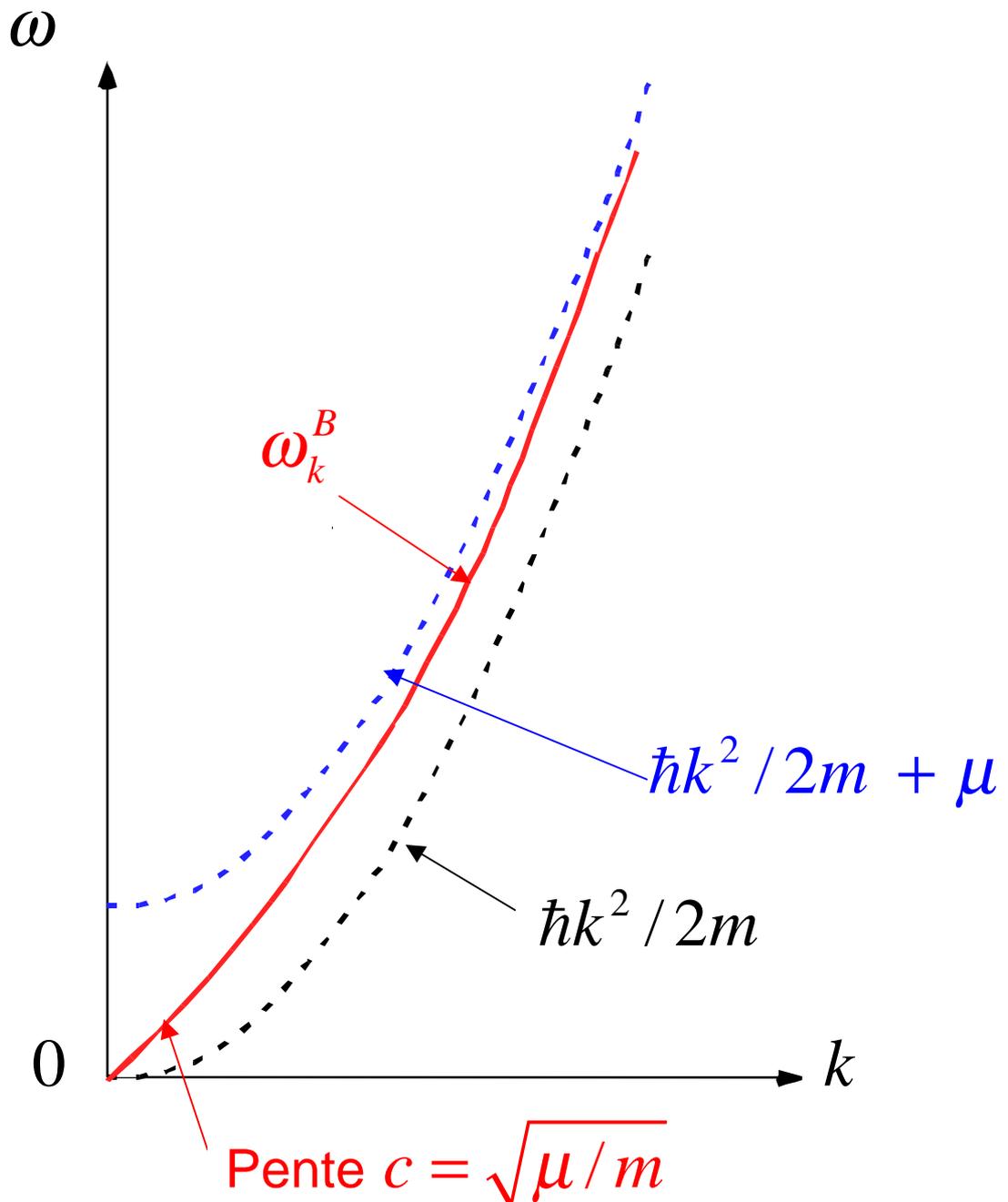
$$k_0^2 = 8\pi a\rho_0 = 1/\xi_0^2$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a\rho_0}}$$

Longueur de relaxation ("Healing length")

## Relation de dispersion

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0 (\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$



## Nouvel état fondamental

Energie  $E_0$  (voir ref.4)

$$\frac{E_0}{N} = \frac{1}{2} g \rho_0 \left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} (\rho_0 a^3)^{1/2} \right]$$

Fonction d'onde  $|\psi_0\rangle$

$$\text{Satisfait } \hat{b}_{\vec{k}} |\psi_0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} \neq \vec{0}$$

$$\left[ \cosh \theta_k \hat{a}_{\vec{k}} + \sinh \theta_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+ \right] |\psi_0\rangle = 0$$

Structure de  $|\psi_0\rangle$

$$|\psi_0\rangle = \alpha |n_0 = N, 0, 0, \dots\rangle$$

$$+ \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \beta_{\vec{k}} |n_0 = N - 2, \dots, n_{\vec{k}} = 1, n_{-\vec{k}} = 1, 0 \dots\rangle$$

+...

Excitation virtuelle de paires  $\vec{k}, -\vec{k}$  quand 2 atomes  $\vec{k} = \vec{0}$  interagissent (conservation de l'impulsion totale)

## Facteur de structure $S(\vec{q}, \omega)$

### Expression générale (voir T-31)

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta \left( \omega - \frac{E_f - E_i}{\hbar} \right)$$

$|\psi_0\rangle$  est l'état fondamental. Décrit un condensat homogène d'impulsion totale nulle.

$\hat{\rho}_{\vec{q}}$  translate l'impulsion globale du système de  $\hbar \vec{q}$  (voir T-16).

Dans la théorie de Bogobulov, il n'y a qu'un seul état excité d'impulsion  $\hbar \vec{q}$ , dont l'énergie vaut  $\hbar \omega_q^B$

$$|\psi_{\vec{q}}\rangle = \hat{b}_{\vec{q}}^+ |\psi_0\rangle$$

Par suite, la somme sur  $f$  figurant dans l'expression de  $S(\vec{q}, \omega)$  ne contient qu'un seul terme  $|\psi_f\rangle = |\psi_{\vec{q}}\rangle$

## Expression équivalente pour $\left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2$

$$\begin{aligned} \left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 &= \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_{\vec{q}} \rangle \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \\ &= \sum_{\vec{q}'} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_{\vec{q}'} \rangle \langle \psi_{\vec{q}'} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Les termes  $\vec{q}' \neq \vec{q}$  donnent en effet une contribution nulle à cause de la conservation globale de l'impulsion. On peut donc écrire

$$\left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle$$

et par suite

$$S(\vec{q}, \omega) = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \delta(\omega - \omega_q^B)$$

$$\begin{aligned} S(\vec{q}) &= \frac{1}{N} \int d\omega S(\vec{q}, \omega) \\ &= \frac{1}{N} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Dans le spectre  $S(\vec{q}, \omega)$ , il n'y a donc qu'une seule raie

- Centrée en  $\omega_q^B$
- De poids  $N S(\vec{q})$

## Expression approchée de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad (\text{voir T-15})$$

Pour être cohérent avec les approximations faites dans la théorie de Bogobulov, il ne faut conserver dans  $\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}$  que les termes contenant au moins 2 opérateurs  $\hat{a}_0$  ou  $\hat{a}_0^+$ , et remplacer ces opérateurs par  $\sqrt{N}$ .

Ceci revient à négliger dans  $\hat{\rho}_{\vec{q}}$  et  $\hat{\rho}_{\vec{q}}^+$  tous les termes contenant moins d'un opérateur  $\hat{a}_0$  ou  $\hat{a}_0^+$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\vec{q}} &= \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \\ &\simeq \hat{a}_{\vec{q}}^+ \hat{a}_0 + \hat{a}_0^+ \hat{a}_{-\vec{q}} \\ &\simeq \sqrt{N} \left( \hat{a}_{\vec{q}}^+ + \hat{a}_{-\vec{q}} \right) \end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \simeq \sqrt{N} \left( \hat{a}_{\vec{q}} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+ \right)$$

## Calcul de $S(\vec{q})$

En réexprimant  $\hat{a}_{\vec{q}}^+$  et  $\hat{a}_{-\vec{q}}$  en fonction de  $\hat{b}_{\vec{q}}^+$  et  $\hat{b}_{-\vec{q}}$  (voir T-59) on obtient

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\vec{q}} &\simeq \sqrt{N} (\hat{a}_{\vec{q}}^+ + \hat{a}_{-\vec{q}}) \\ &= \sqrt{N} \left[ (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q) \hat{b}_{\vec{q}}^+ \right. \\ &\quad \left. + (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q) \hat{b}_{-\vec{q}} \right]\end{aligned}$$

Comme  $\hat{b}_{-\vec{q}} |\psi_0\rangle = 0$  (voir T-63)

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} |\psi_0\rangle = \sqrt{N} (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q) \hat{b}_{\vec{q}}^+ |\psi_0\rangle$$

et par suite

$$\begin{aligned}S(\vec{q}) &= \frac{1}{N} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \\ &= (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q)^2 \langle \psi_0 | \hat{b}_{\vec{q}} \hat{b}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle \\ &= (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q)^2\end{aligned}$$

compte tenu de  $\hat{b}_{\vec{q}} \hat{b}_{\vec{q}}^+ = 1 - \hat{b}_{\vec{q}}^+ \hat{b}_{\vec{q}}$

et de  $\hat{b}_{\vec{q}} |\psi_0\rangle = 0$

## Calcul de $S(\vec{q})$ (suite)

$$\tanh 2\theta_q = \frac{g\rho}{\varepsilon_q + g\rho} = \frac{\mu}{\hbar\omega_q^0 + \mu} \quad (\text{voir T-59})$$

$$\begin{aligned} (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q)^2 &= \cosh 2\theta_q - \sinh 2\theta_q \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 2\theta_q}} (1 - \tanh 2\theta_q) \\ &= \sqrt{\frac{1 - \tanh 2\theta_q}{1 + \tanh 2\theta_q}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_q^0}{\hbar\omega_q^0 + 2\mu}} \end{aligned}$$

En utilisant

$$\hbar\omega_q^B = \sqrt{\hbar\omega_q^0 (\hbar\omega_q^0 + 2\mu)}$$

on obtient finalement

$$S(q) = \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B}$$

## Etude des diverses limites

**Limite**  $q \rightarrow \infty$   $\hbar\omega_q^0 \gg \mu$

On a alors (voir T-61)

$$\hbar\omega_q^B \simeq \hbar\omega_q^0 + \mu \simeq \hbar\omega_q^0$$

et par suite

$$S(\vec{q}) = \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \underset{q \rightarrow \infty}{\simeq} 1$$

Même résultat que pour  $g = 0$  c'est à dire pour un gaz parfait de bosons.

**Limite**  $q \rightarrow 0$   $\hbar\omega_q^0 \ll \mu$

On a alors (voir T-60)

$$\omega_q^B = c q \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\mu/m}$$

$$S(\vec{q}) = \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \underset{q \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\hbar q^2 / 2m}{c q} = \frac{\hbar q}{2m c}$$

$S(\vec{q})$  tend vers 0, linéairement en  $q$  quand  $q \rightarrow 0$

## Conclusion

L'annulation de  $S(\vec{q})$  quand  $q \rightarrow 0$  est une conséquence des interactions. Elle n'existe pas pour un gaz parfait.

Cette annulation apporte des informations sur la structure de  $|\psi_0\rangle$ .

Les 2 termes  $\hat{a}_{\vec{q}}^+ \hat{a}_0$  et  $\hat{a}_0^+ \hat{a}_{-\vec{q}}$  conservés dans l'expression de  $\hat{\rho}_{\vec{q}}$  (voir T-66) couplent les 2 états  $|n_0 = N, 0, 0\dots\rangle$  et  $|n_0 = N - 2, n_{+\vec{q}} = +1, n_{-\vec{q}} = +1, 0\dots\rangle$  apparaissant dans le développement de  $|\psi_0\rangle$  (voir T-63) au même état final  $|n_0 = N - 1, n_{+\vec{q}} = +1, 0, 0\dots\rangle$ .

Les 2 amplitudes correspondantes interfèrent destructivement quand  $\vec{q} \rightarrow 0$

## Résultats attendus pour la diffusion de Bragg

En faisant varier l'écart  $\omega$  entre les fréquences des 2 lasers qui induisent la transition, on s'attend à trouver une seule résonance étroite, centrée en  $\omega = \omega_q^B$ , dont l'intensité  $S(\vec{q})$  décroît quand  $q \rightarrow 0$ .

En fait, les expériences de MIT ont été réalisées sur des condensats piégés (inhomogènes).

Des corrections apparaissent alors par rapport aux prédictions précédentes, qui seront étudiées dans un chapitre ultérieur.

## Vérification des règles de somme

### 1. Règle de somme sur $m_1$

$$m_1(\vec{q}) = N \hbar q^2 / 2m \quad (\text{voir T-46})$$

Dans la théorie de Bogolubov, il y a un seul état excité d'énergie  $\hbar\omega_q^B$  pour un vecteur d'onde  $\vec{q}$  donné. Donc

$$\begin{aligned} m_1^B(q) &= |\langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2 \omega_q^B = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \omega_q^B \\ &= N S(\vec{q}) \omega_q^B = N \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \omega_q^B = N \frac{\hbar q^2}{2m} \end{aligned}$$

La règle de somme est bien satisfaite

### 2. Règle de somme sur $m_{-1}$

$$m_{-1}(\vec{q}) = -\hbar\chi(\vec{q}, 0)/2 = N\hbar/2\mu$$

d'après (T-44) et (T-53). Or,

$$\begin{aligned} m_{-1}^B(\vec{q}) &= \frac{NS(\vec{q})}{\omega_q^B} = \frac{N\omega_q^0}{(\omega_q^B)^2} = \\ &= N \frac{\hbar q^2 / 2m}{c^2 q^2} = \frac{N\hbar}{2m c^2} = \frac{N\hbar}{2\mu} \end{aligned}$$

Ici aussi, règle de somme satisfaite

## Polarisabilité dynamique

Un condensat homogène possède la symétrie  $P$  (réflexion d'espace).

Cette symétrie entraîne que

$$\left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle \right|^2$$

L'expression (T-39) de  $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}} = \chi(\vec{q}, \omega)$  est donc valable.

Comme il n'y a qu'un seul état excité couplé à  $|\psi_0\rangle$  par  $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ , l'expression (T-39) devient

$$\begin{aligned} \chi(\vec{q}, \omega) &= NS(\vec{q}) \frac{2\hbar\omega_q^B}{\hbar^2\omega^2 - \hbar^2(\omega_q^B)^2} \\ &= N \frac{2\hbar\omega_q^0}{\hbar^2\omega^2 - \hbar^2(\omega_q^B)^2} \end{aligned}$$

## Annulation de $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+}$

D'après (T-36), l'expression de  $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+}$  fait intervenir le produit suivant d'éléments de matrice

$$\langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle$$

$\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ = \hat{\rho}_{-\vec{q}}$  translate l'impulsion de  $-\hbar \vec{q}$

$\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle$  n'est donc non nul que si

$$p_n - p_0 = -\hbar \vec{q}.$$

De même,  $\langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_n \rangle$  n'est non nul que si

$$p_0 - p_n = -\hbar \vec{q}.$$

Comme  $\vec{q} \neq \vec{0}$ , ces 2 conditions sont incompatibles et  $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+} = 0$ .

Il s'ensuit qu'une excitation  $U_0 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$  ne donne naissance qu'à une onde en  $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . Aucune onde en  $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \omega t)$  ne peut apparaître.

# Diffusion d'un atome sonde par le condensat - Superfluidité

## Motivations d'un tel calcul

Etudier la section efficace totale de diffusion  $\sigma$  d'un atome sonde (et non plus d'un photon) par le condensat.

Montrer que  $\sigma$  s'annule quand la vitesse de l'atome est inférieure à une certaine valeur critique. Etudier ainsi le phénomène de superfluidité sur une sonde microscopique.

Distinguer, dans la décroissance de  $\sigma$ , la contribution du phénomène de superfluidité et celle de la réduction du facteur de structure statique  $S(\vec{q})$ .

## Lien avec une expérience récente réalisée au MIT (ref.5 )

L'atome sonde, de vitesse  $v$ , est obtenu par diffusion Raman stimulée d'un atome du condensat vers un autre niveau Zeeman non piégeant.

L'atome ainsi obtenu est discernable des atomes condensés et peut donc être considéré comme un atome sonde. Sa vitesse peut être réglée en faisant varier l'angle entre les 2 faisceaux laser induisant la transition Raman.

L'expérience est réalisée sur un condensat piégé.

Les calculs présentés ici sont relatifs à un condensat homogène (non piégé). Ils sont plus simples et permettent de dégager les idées physiques importantes.

(voir aussi refs.7 et 8)

# Calcul de la section efficace de diffusion

## Hamiltonien d'interaction (voir T-18)

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_{\vec{q}} \frac{1}{L^3} \mathcal{U}_{\vec{q}} e^{-i\vec{q} \cdot \hat{R}} \hat{\rho}_{\vec{q}}$$

$\hat{R}$  : Position de l'atome cible

$\mathcal{U}_{\vec{q}}$  : TF du potentiel d'interaction

$$\mathcal{U}_{\vec{q}} = \int d^3 r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} U(\vec{r})$$

Nous prendrons :  $U(\vec{r}) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r})$

$a$  : Longueur de diffusion pour les collisions atome sonde- atome du condensat

$$\mathcal{U}_{\vec{q}} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{4\pi\hbar^2}{mL^3} a \sum_{\vec{q}'} e^{-i\vec{q}' \cdot \hat{R}} \hat{\rho}_{\vec{q}'}$$

**Etat initial**  $|\vec{k}, \psi_0\rangle$

Atome sonde dans l'état  $|\vec{k}\rangle$

Condensat dans l'état  $\psi_0$

$$E_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_0$$

**Etat final**  $|\vec{k} - \vec{q}, \psi_{\vec{q}}\rangle$

Atome sonde dans l'état  $|\vec{k} - \vec{q}\rangle$

Condensat dans l'état  $\psi_{\vec{q}}$

$$E_{\text{fin}} = \frac{\hbar^2 (\vec{k} - \vec{q})^2}{2m} + E_0 + \hbar\omega_q^B$$

**Règle d'or de Fermi**

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{q}} \left| \langle \vec{k} - \vec{q}, \psi_{\vec{q}} | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}, \psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_{\text{in}} - E_{\text{fin}})$$

$$\sum_{\vec{q}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int q^2 dq d\Omega$$

## Elément de matrice de $\hat{H}_{\text{int}}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} - \vec{q}, \psi_{\vec{q}} | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}, \psi_0 \rangle &= \frac{4\pi\hbar^2}{mL^3} a \times \\ &\underbrace{\langle \vec{k} - \vec{q} | e^{-i\vec{q}\cdot\vec{R}} | \vec{k} \rangle}_{=1} \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

## Taux de diffusion $\Gamma$

$$\left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = N S(\vec{q}) = N \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B}$$

$$\delta(E_{\text{in}} - E_{\text{fin}}) = \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_q^B) = \frac{1}{\hbar} \delta(\omega - \omega_q^B)$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar(\vec{k} - \vec{q})^2}{2m} = \frac{\hbar\vec{k}\cdot\vec{q}}{m} - \frac{\hbar q^2}{2m}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{32\pi^3\hbar^2}{m^2L^3} a^2 \frac{N}{L^3} \sum_{\vec{q}} \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta(\omega - \omega_q^B) \\ &= \frac{4\hbar^2}{m^2} a^2 \rho_0 \int q^2 dq d\Omega \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta(\omega - \omega_q^B) \end{aligned}$$

## Section efficace de diffusion $\sigma$

$$\Gamma = \rho_0 v \sigma$$

$v = \hbar k / m$  : Vitesse de l'atome sonde.

De l'expression de  $\Gamma$  on déduit

$$\sigma = \sigma_0 F$$

$\sigma_0 = 4\pi a^2$  : Section efficace correspondant à la longueur de diffusion  $a$

$F$  : Facteur correctif lié au fait que l'atome sonde est diffusé par un condensat.

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar^2}{\pi m^2} \frac{1}{v} \int q^2 dq d\Omega \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta(\omega - \omega_q^B) \\ &= 2 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{v} \int_0^\infty q^2 dq \int_{-1}^{+1} du \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta\left(v q u - \frac{\hbar q^2}{2m} - \omega_q^B\right) \end{aligned}$$

On a posé

$$u = \cos \theta$$

$\theta$  : Angle entre  $\vec{q}$  et  $\vec{v}$

## Deux contributions au facteur $F$

1- Terme  $\omega_q^0 / \omega_q^B$  provenant du facteur de structure statique  $S(\vec{q})$ .

Décroit quand  $q \rightarrow 0$

Diminution de l'aptitude du condensat à absorber l'impulsion  $\hbar q$  quand  $q \rightarrow 0$

2- Argument de la fonction delta

Ne s'annule pas quand la vitesse  $v$  de l'atome sonde est inférieure à une valeur critique.  $F$  est alors identiquement nul.

Explication de Landau du phénomène de superfluidité (ref.6): La relation de dispersion des excitations élémentaires du condensat ne permet pas un transfert résonnant d'énergie et d'impulsion de la part de la particule sonde. Le mouvement de la particule sonde n'est alors pas affecté.

## Argument de la fonction delta

S'annule en principe quand

$$u = \cos \theta = \left( \frac{\hbar q}{2m} + \frac{\omega_q^B}{q} \right) \frac{1}{v}$$

La courbe donnant  $\omega_q^B$  en fonction de  $q$  est une courbe concave vers le haut partant de 0 avec une pente  $c$  (voir T-12). Il s'ensuit que :

$$\frac{\omega_q^B}{q} \geq c$$

Par ailleurs,  $q = |\vec{q}|$  est positif. Donc,

$$u \geq \frac{\omega_q^B}{q} \frac{1}{v} \geq \frac{c}{v}$$

Si  $v < c$ , la solution de l'équation donnant  $u$  est plus grande que 1 et ne peut convenir pour un cosinus. L'argument de la fonction delta ne peut alors pas s'annuler dans l'intervalle  $[-1, +1]$  admissible pour  $u$  et  $F$  est, dans ce cas, identiquement nul.

$$v < c$$

Pas d'interaction possible pour l'atome sonde.

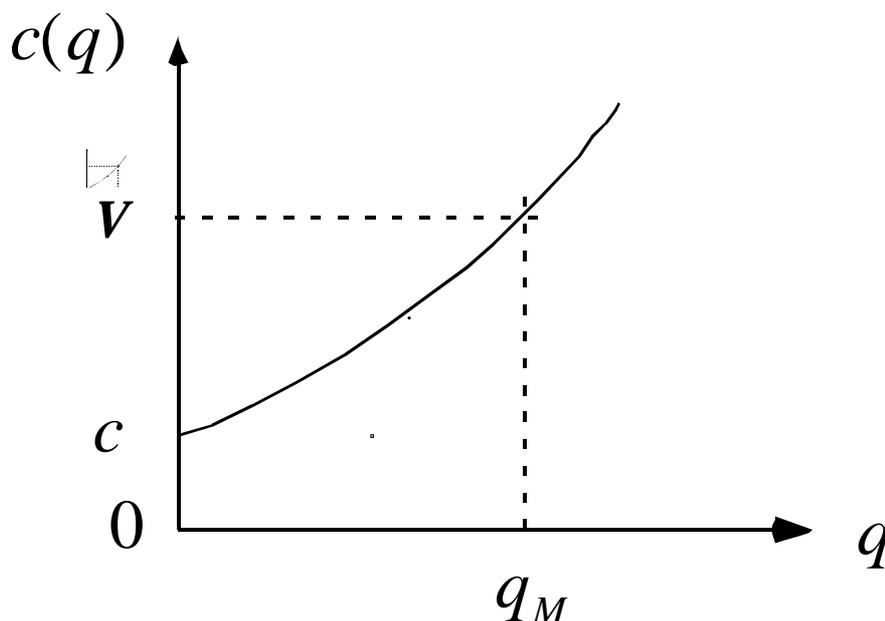
La vitesse critique de l'atome sonde au dessous de laquelle il y a superfluidité est donc la vitesse du son  $c = \sqrt{\mu / m}$ .

$$v > c$$

Posons :

$$c(q) = \frac{\hbar q}{2m} + \frac{\omega_q^B}{q} = \frac{\hbar q}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\hbar q}{2m}\right)^2 + c^2}$$

L'équation  $u = c(q) / v$  a une solution acceptable (c-à-d inférieure à 1) pour toute valeur de  $0 \leq q \leq q_M$  avec  $c(q_M) = v$ .



Courbe polaire donnant  $q$  en fonction de  $\theta$ .

$$u = \cos \theta = c(q) / v$$

Pour une valeur de  $v \geq c$ ,  $q$  varie de 0 à  $q_M$  (voir la figure de T-84).

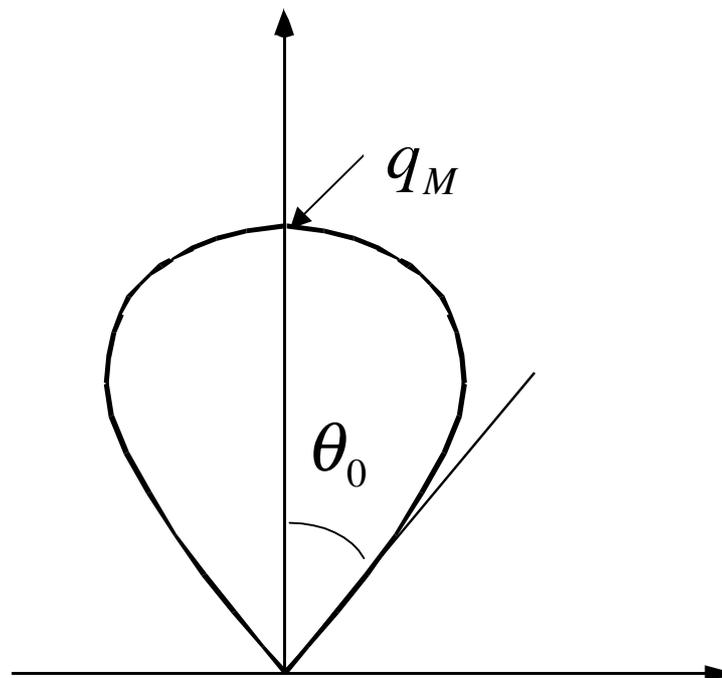
Pour  $q = 0$ ,  $c(q = 0) = c$ , et par suite

$$\cos \theta_0 = c / v$$

A la limite  $v \gg c$ ,  $\theta_0$  est très proche de  $\pi / 2$ .

Quand  $q = q_M$ ,  $u = 1$  et  $\theta$  vaut 0.

$\theta$  décroît donc de façon monotone quand  $q$  croît de 0 à  $q_M$



Forme de feuille de trèfle

## Limite $v \gg c$

On a alors  $\theta_0 \cong \pi / 2$  et  $c(q) \cong \hbar q / m$  de sorte que l'équation polaire de la courbe  $q = f(\theta)$  devient :

$$q \cong \frac{mv}{\hbar} \cos \theta$$

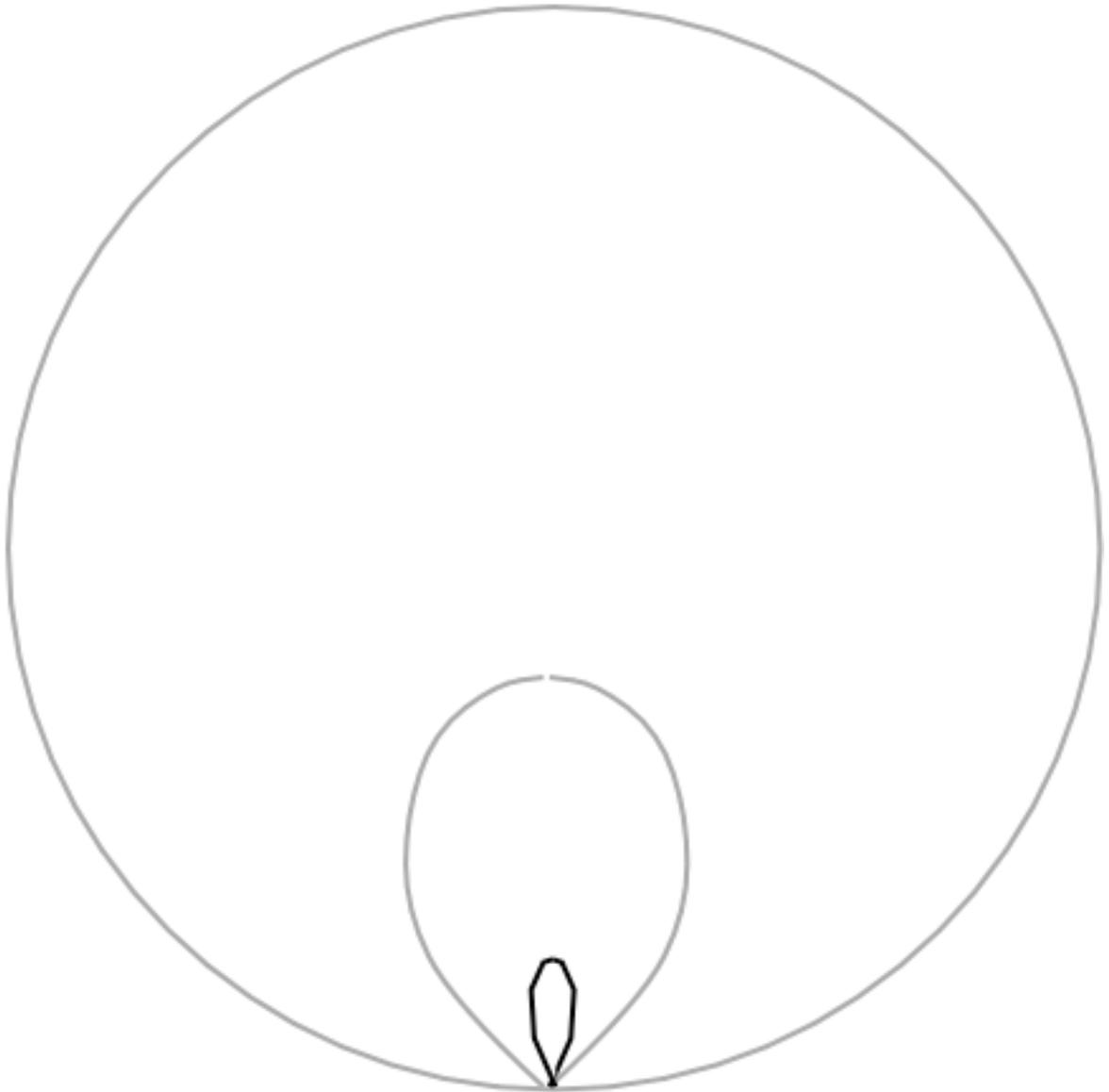
La feuille de trèfle devient un cercle de diamètre  $mv / \hbar$

## Interprétation

L'atome sonde crée dans la condensat une excitation de grand  $q$ , donc de type particule, qui a en fait la même masse que l'atome sonde (les 2 atomes ne diffèrent que par le niveau Zeeman).

La collision se produit donc entre un atome de vitesse  $v$  et un atome de même masse de vitesse nulle. La conservation de l'énergie et de l'impulsion totales entraîne alors que les vitesses finales des 2 atomes sont perpendiculaires et sur un cercle de diamètre  $v$ .

## Réduction de l'espace des phases à l'approche du seuil de superfluidité



La feuille de trèfle, initialement circulaire quand  $v \gg c$ , devient de plus en plus étroite et de moins en moins longue quand  $v$  diminue et disparaît quand  $v = c$ .

# Retour au calcul de $F$

## 1-Intégrale sur $u$

- Si  $v < c$ ,  $F$  est identiquement nul.
- Si  $v > c$ , l'argument de la fonction delta s'annule pour une valeur  $u_q$  de  $u$  tant que  $q$  reste compris entre 0 et  $q_M$ .

L'intégrale sur  $u$  donne alors :

$$\int_{-1}^{+1} \delta [qv(u - u_q)] = \frac{1}{qv}$$

## 2-Intégrale sur $q$

Elle s'effectue entre 0 et  $q_M$ , et donne :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2\hbar^2}{m^2 v^2} \int_0^{q_M} dq \, q \frac{\omega_k^0}{\omega_k^B} \\ &= \frac{2\hbar^2}{m^2 v^2} \int_0^{q_M} dq \, q \frac{\hbar q / 2m}{\sqrt{(\hbar q / 2m)^2 + c^2}} \end{aligned}$$

## Changement de variables

Posons :  $\frac{\hbar q}{2mc} = x = \sinh \alpha$  . Il vient :

$$\begin{aligned} F &= \frac{8c^2}{v^2} \int_0^{x_M} dx \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2c^2}{v^2} \left[ \sinh 2\alpha_M - 2\alpha_M \right] \end{aligned}$$

De  $\hbar q_M / 2m + \sqrt{(\hbar q_M / 2m)^2 + c^2} = v$ , on déduit en posant :

$$\eta = v / c$$

$$x_M + \sqrt{1+x_M^2} = \eta$$

$$\sinh \alpha_M = \frac{\eta^2 - 1}{2\eta} \quad \cosh \alpha_M = \frac{\eta^2 + 1}{2\eta}$$

$$\sinh 2\alpha_M = 2 \sinh \alpha_M \cosh \alpha_M = \frac{\eta^4 - 1}{2\eta^2}$$

$$e^{\theta_M} = \cosh \theta_M + \sinh \theta_M = \eta$$

$$\theta_M = \log \eta$$

## Résultat final

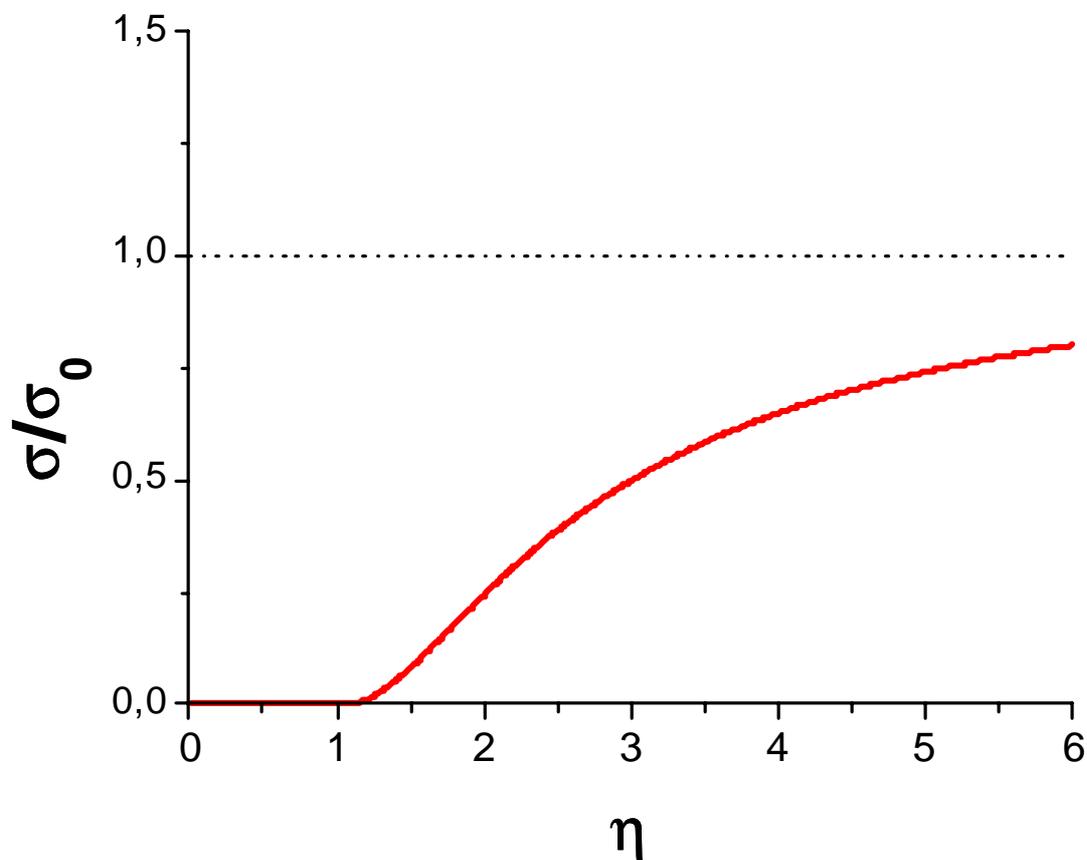
$$F = F(\eta) = \frac{2}{\eta^2} \left[ \frac{\eta^4 - 1}{2\eta^2} - 2 \log \eta \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\eta^4} - \frac{4}{\eta^2} \log \eta$$

$$\sigma = \sigma_0 F(\eta)$$

avec  $\eta = v/c$  et  $\sigma_0 = 4\pi a^2$

Rappelons que pour  $\eta < 1$ ,  $F \equiv 0$



## Références (suite de T-48)

4. Pour la théorie de Bogolubov, voir le cours 98-99, Pages VII-1 à VIII-10, et references in.
5. A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Stamper-Kurn, S.Inouye, S.Gupta, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **85**, 483 (2000)
6. L.Landau, J.Phys. (USSR) **5**, 71 (1941)
7. E.Timmermans, R.Côté, Phys.Rev.Lett. **80**, 3419 (1998)
8. Z.Idziaszek, K.Rzazewski, M.Wilkens, J.Phys. **B32**, L205 (1999)