Fonction d'onde ψ_f de l'état final

T.273

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_f}{dz^2} + mgz\,\psi_f = E_f\,\psi_f$$

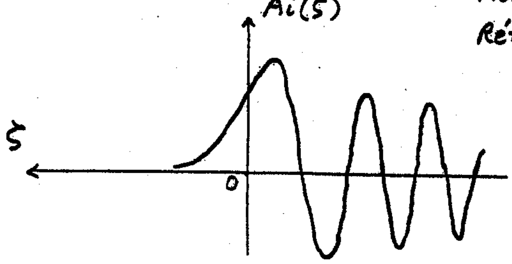
$$\frac{d^2\psi_f}{dz^2} - \frac{2m^2g}{\hbar^2}\left(z - \frac{E_f}{mg}\right)\psi_f = 0$$

Posons $\quad \zeta = \frac{1}{\ell}\left(z - \frac{E_f}{mg}\right) \qquad \ell^3 = \frac{\hbar^2}{2m^2g}$

$$\frac{d^2\psi_f}{d\zeta^2} - \zeta\,\psi_f = 0$$

Solution de cette équation : Fonction d'Airy $Ai(z)$

Référence 6



- Décroissance rapide pour $\zeta > 0$, en $\zeta^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}$
- Pour $\zeta \gg 1$, $\quad Ai(\zeta) \propto |\zeta|^{-1/4} \exp\left(i\,\frac{2}{3}|\zeta|^{3/2}\right)$
- Largeur du 1er lobe au voisinage de $\zeta = 0$

  $\Delta\zeta \simeq 1 \quad \rightarrow \quad \Delta z \simeq \ell$

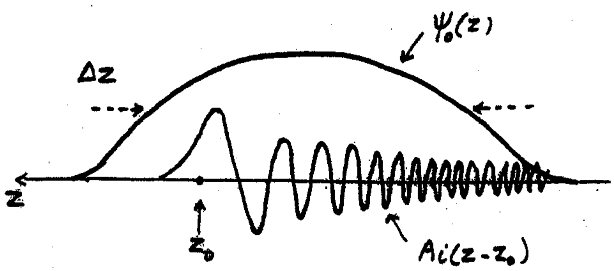
Amplitude de transition $\psi_0 \rightarrow \psi_f$

T.274

Proportionnelle à l'intégrale de recouvrement de l'état initial ψ_0 avec l'état final ψ_f

$$\int \psi_0(z)\, Ai(z - z_0)\, dz$$

Analogie avec un facteur de Franck-Condon



$$z_0 = \frac{E_f}{mg} = \frac{E_0 - h\nu_{RF}}{mg}$$

L'essentiel de la contribution à l'intégrale de recouvrement provient du voisinage de z_0. A partir des transformées de Fourier de ψ_0 et ψ_f, on peut montrer (Y. Castin) que pour $\Delta z \gg \ell$

$$\int \psi_0(z)\, Ai(z - z_0)\, dz \quad \propto \quad \psi_0(z_0)$$

Ordres de grandeur

T.275

- Pour ^{87}Rb

  $\ell = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2g}\right)^{1/3} \simeq 0.3\ \mu m$
- L'extension de l'état fondamental du piège dans la direction z vaut

  $\Delta z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}} \simeq 0.9\ \mu m$

  $\omega_\perp / 2\pi = 140\ Hz$
- Comme le condensat "gonfle" sous l'effet des interactions répulsives entre atomes, on a pour la largeur du condensat une valeur de l'ordre de 3 à 4 μm
- On a donc bien $\Delta z \gg \ell$, et on peut considérer que les atomes sont extraits d'une région d'altitude z_0 bien définie

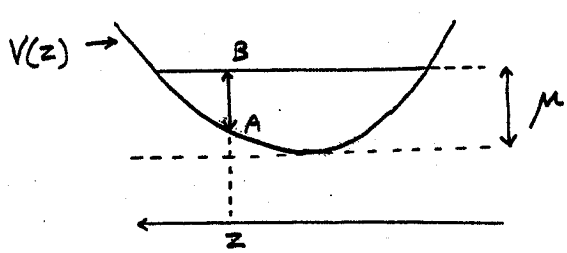
Effet des interactions

T.276

Limite de Thomas-Fermi

Détermination graphique de $g\,n(z)$

L'énergie de ψ_0 est égale au potentiel chimique μ (et non à E_0)



En chaque point z, on a

$$V(z) + g\,n(z) = \mu$$

puisqu'on néglige l'énergie cinétique

On en déduit que $g\,n(z)$ est égal à la longueur du segment AB