Expression approchée de $\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$ T-209

Pour des valeurs pas trop élevées de p_x, p_y, p_z, on peut donc écrire

$$\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z) \propto e^{-K^2/6} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{p_x^2}{6\hbar^2/x_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{p_y^2}{6\hbar^2/y_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{6\hbar^2/z_0^2}\right\}$$

L'intégrale sur p_y et p_z est alors immédiate et on trouve

$$\mathcal{P}(p_x) \propto \exp\left\{-\frac{p_x^2}{6\hbar^2/x_0^2}\right\}$$

La valeur quadratique moyenne de p_x est égale, dans cette approximation, à

$$\Delta p_x = \sqrt{3}\,\frac{\hbar}{x_0} = 1.73\,\frac{\hbar}{x_0}$$

Remarques

① Dans la référence 1, c'est $\mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0)$ qui est calculé au lieu de $\iint dp_y\,dp_z\,\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$
On trouve alors

$$\mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0) \propto \left[\frac{J_2\left(\frac{p_x x_0}{\hbar}\right)}{p_x^2 x_0^2/\hbar^2}\right]^2$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\frac{21}{8}}\,\frac{\hbar}{x_0} = 1.62\,\frac{\hbar}{x_0}$$

Remarques (suite) T-210

② Le traitement présenté ici s'intéresse à la partie centrale de $\mathcal{P}(p_x)$ qui a la forme d'une courbe en cloche se rapprochant d'une Gaussienne

L'ajustement des résultats expérimentaux étant fait avec une Gaussienne, une telle approche doit donner une valeur raisonnable de Δp_x

③ La fonction d'onde à l'approximation de Thomas-Fermi a une pente verticale en $x = x_0$, ce qui conduit à une divergence de la variance Δp_x^2 de p_x.

Même après un traitement plus précis de la zone $x \simeq x_0$, on obtient des valeurs élevées de Δp_x différentes de la 1/2 largeur à $1/\sqrt{e}$. L'approximation faite ici est donc plus proche de l'expérience

④ Le profil Doppler est proportionnel à $\iint dp_y\,dp_z\,\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$ et non à $\mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0)$

Distribution $\mathcal{P}(n)$ des valeurs de n T-211

$$n(\vec{r}) = n_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$$

Après le changement de variables
$x, y, z \rightarrow \xi, \eta, \zeta \qquad \vec{r} \rightarrow \vec{\rho}$

$$n(\vec{\rho}) = n_0(1 - \rho^2)$$

Chaque valeur de ρ contribue au signal avec un poids proportionnel au nombre d'atomes situés à cette valeur de ρ

Distributions $P(\rho)$ des poids des diverses valeurs de ρ

$$P(\rho)\,d\rho = \mathcal{N}\,4\pi x_0 y_0 z_0\,\rho^2 d\rho\, n(\rho)$$
$$= 4\pi\mathcal{N} n_0 x_0 y_0 z_0\,\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

$\mathcal{N}$: constante de normalisation déterminée par $\int_0^1 P(\rho)\,d\rho = 1$

$$\mathcal{N} = \frac{15}{8\pi}\,\frac{1}{n_0 x_0 y_0 z_0}$$

On a donc

$$P(\rho) = \frac{15}{2}\,\rho^2(1 - \rho^2)$$

Calcul de $\mathcal{P}(n)$ T-212

A chaque valeur de ρ est associée une valeur de n par

$$n = n_0(1 - \rho^2)$$
$$\mathcal{P}(n)\,dn = P(\rho)\,d\rho$$
$$\mathcal{P}(n) = P(\rho)\left|\frac{d\rho}{dn}\right|$$
$$P(\rho) = \frac{15}{2}\,\rho^2(1-\rho^2) = \frac{15}{2}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right)\frac{n}{n_0}$$
$$dn = -2n_0\,\rho\,d\rho$$
$$\left|\frac{d\rho}{dn}\right| = \frac{1}{2n_0\rho} = \frac{1}{2n_0}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{n_0}}}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}(n) = \frac{15}{4n_0^2}\,n\sqrt{1 - \frac{n}{n_0}}$$