Calcul de $E(N_1+1, N_2-1) - E(N_1,N_2)$

T-312

$$E(N_1+1, N_2-1) \simeq \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right) E(N_1,N_2)$$
$$= \mu_1(N_1,N_2) - \mu_2(N_1,N_2)$$

La différence des potentiels chimiques $\mu_1-\mu_2$ joue en quelque sorte le role de la fréquence de Larmor pour un spin 1/2

Calcul de la dispersion $\Delta\Omega$ sur $(\mu_1-\mu_2)/\hbar$ quand N_1 et N_2 varient sur un intervalle ΔN autour de $\overline{N}_1$ et $\overline{N}_2$

$$\hbar\Omega(N_1,N_2) = \mu_1(N_1,N_2) - \mu_2(N_1,N_2)$$
$$\Delta\Omega \simeq \Omega(\overline{N}_1+\Delta N, \overline{N}_2-\Delta N) - \Omega(\overline{N}_1,\overline{N}_2)$$
$$\simeq \Delta N \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right) \Omega(N_1,N_2)\Big|_{N_1=\overline{N}_1,\, N_2=\overline{N}_2}$$

Temps de brouillage : $T_{coh} \simeq \dfrac{1}{\Delta\Omega}$

Pour calculer un ordre de grandeur de $\Delta\Omega$ on va se limiter au cas simple d'un mélange homogène de 2 condensats dans une boite $V = L^3$

Expression de $E(N_1,N_2)$ pour un mélange homogène de 2 condensats

T-313

$$E(N_1,N_2) = \frac{1}{2} g_1 \frac{N_1^2}{V} + \frac{1}{2} g_2 \frac{N_2^2}{V} + g_{12}\frac{N_1 N_2}{V}$$

Expression de $\mu_1(N_1,N_2)$ et $\mu_2(N_1,N_2)$

$$\mu_1(N_1,N_2) = \frac{\partial}{\partial N_1} E(N_1,N_2) = g_1 \frac{N_1}{V} + g_{12}\frac{N_2}{V}$$
$$\mu_2(N_1,N_2) = \frac{\partial}{\partial N_2} E(N_1,N_2) = g_2 \frac{N_2}{V} + g_{12}\frac{N_1}{V}$$
$$\mu_1(N_1,N_2) - \mu_2(N_1,N_2) = g_1\frac{N_1}{V} - g_2\frac{N_2}{V} + g_{12}\frac{N_2-N_1}{V}$$
$$\hbar\Omega(N_1,N_2) = \mu_1(N_1,N_2) - \mu_2(N_1,N_2)$$

Calcul de $\Delta\Omega$

$$\Delta\Omega = \Delta N \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right)\Omega(N_1,N_2)\Big|_{N_1=\overline{N}_1,\, N_2=\overline{N}_2}$$
$$= \frac{\Delta N}{\hbar V}\left(g_1 + g_2 - 2g_{12}\right)$$

Cas où $g_{12} = 0$, mais où $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$

T-314

- On a alors $\Delta\Omega = \dfrac{\Delta N}{\hbar V}(g_1+g_2)$
- Prenons
  $\overline{N}_1 = \overline{N}_2 = \dfrac{N}{2}$ $\qquad g_1 = g_2 = g$
  $\Delta N = \sqrt{N}$
  On obtient $\Delta\Omega = \dfrac{\sqrt{N}}{\hbar V} g$
- Par ailleurs
  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \dfrac{gN}{V}$
  de sorte que $\mu' = \dfrac{\partial\mu}{\partial N} = \dfrac{g}{V}$
  On en deduit
  $$\Delta\Omega = \frac{\mu'\sqrt{N}}{\hbar}$$
  et donc $T_{coh} = \dfrac{1}{\Delta\Omega} = \dfrac{\hbar}{\mu'\sqrt{N}}$

On retrouve le résultat du cours VI (voir T.188)

Cas où $g_{12} \neq 0$ et où $g_1 + g_2 - 2g_{12} = 0$

On trouve alors $\Delta\Omega = 0$ et $T_{coh} = \infty$

Les interactions entre les condensats 1 et 2 peuvent supprimer le brouillage de phase !

Interprétation physique

T-315

- Pour un ΔN donné, ce qui compte, c'est la variation de $\mu_1-\mu_2$ quand N_1 augmente de $+1$ et N_2 diminue de -1
- Cas $g_{12} = 0$
  Quand N_1 augmente, μ_1 augmente (il y a davantage d'atomes dans le condensat 1)
  En même temps N_2 diminue et μ_2 diminue
  Donc $\mu_1-\mu_2$ augmente
- Cas $g_{12} \neq 0$
  Quand on fait passer un atome du condensat 2 au condensat 1, l'interaction d'un atome du condensat 1 avec les autres atomes de ce condensat 1 augmente car N_1 augmente. Mais en même temps, l'interaction de cet atome avec les atomes du condensat 2 diminue car N_2 diminue. La variation de μ_1 peut donc être plus faible. Idem pour μ_2
- Pour ^{87}Rb, on a à peu près $2g_{12} = g_1 + g_2$

On peut ainsi comprendre la "robustesse" de la phase relative survivant après une dynamique spatiale complexe des 2 condensats