

Résumé du cours 1997-1998

Le cours de l'année 1997-1998 est le premier d'une série de cours consacrés à l'étude de la condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultrafroids. La première séance passe rapidement en revue les divers développements expérimentaux qui ont permis l'observation récente d'un tel phénomène : refroidissement et piégeage d'atomes neutres par des faisceaux laser ; pièges magnétostatiques utilisant des gradients de champ magnétique ; refroidissement évaporatif sous l'effet de collisions élastiques entre atomes piégés permettant à certains atomes de gagner une énergie suffisante pour s'échapper du piège, au détriment des autres qui, après rethermalisation, acquièrent une température plus basse. On souligne également l'intérêt de l'étude de la condensation de Bose-Einstein sur des milieux dilués comme les gaz d'atomes alcalins ultrafroids. Les interactions entre atomes, apparaissant essentiellement lors de collisions binaires, ne sont pas prépondérantes devant les effets de statistique pure, comme c'est le cas dans des milieux plus denses, tels que l'hélium superfluide. Il est possible de calculer simplement l'effet de ces collisions binaires à très basse température au moyen d'un petit nombre de paramètres comme la longueur de diffusion et d'établir ainsi un lien quantitatif entre les propriétés macroscopiques de condensats et ces paramètres microscopiques. Le confinement spatial des atomes dans un piège magnétique permet par ailleurs d'éviter les phénomènes complexes se produisant sur des parois matérielles et d'observer une condensation spatiale des atomes qui viennent s'accumuler dans l'état fondamental du piège. Enfin, la fluorescence des atomes alcalins est aisée à observer, ce qui permet une détection optique sensible de l'apparition et de l'évolution des condensats.

Rappels de mécanique statistique

Un certain nombre de notions essentielles de mécanique statistique sont brièvement rappelées afin de préciser les notations et d'introduire les outils théoriques adaptés à l'étude de la condensation de Bose-Einstein.

L'entropie statistique $S(\hat{D})$ est définie à partir de l'opérateur densité \hat{D} décrivant l'état quantique d'un système, et ses propriétés importantes sont brièvement passées en revue : interprétation en termes d'information manquante, additivité, concavité, invariance dans une transformation unitaire.

L'opérateur densité d'équilibre \hat{D} est déterminé en rendant l'entropie statistique $S(\hat{D})$ maximale, compte tenu des contraintes. On introduit alors la fonction de partition Z associée à \hat{D} ainsi que divers ensembles statistiques (microcanonique, canonique, grand canonique) correspondant à divers types de contraintes.

Le lien avec la thermodynamique est alors étudié, ce qui permet d'établir un certain nombre de relations importantes entre diverses grandeurs physiques, comme le nombre de particules, l'énergie interne ou la pression et les dérivées partielles du logarithme de la fonction de partition par rapport au potentiel chimique, à la température et au volume.

Le cas particulier des particules indépendantes est également analysé et l'on établit les lois de distribution de Bose-Einstein et Fermi-Dirac donnant les nombres d'occupation moyens des divers états quantiques individuels pour un ensemble de bosons ou de fermions identiques sans interactions.

On introduit enfin l'idée des méthodes variationnelles thermodynamiques. Le calcul explicite du logarithme de la fonction de partition n'est en général possible que pour des particules sans interactions. En présence d'interactions, il peut être judicieux de remplacer le véritable Hamiltonien \hat{H} par un Hamiltonien d'essai \hat{H}_e à particules indépendantes, contenant un potentiel de champ moyen \hat{V} qui essaie de reproduire au mieux l'effet des interactions entre particules. Des inégalités sont établies sur les potentiels thermodynamiques associés à \hat{H} et \hat{H}_e permettant de déterminer par des méthodes variationnelles le meilleur choix possible pour \hat{H}_e .

Bosons sans interactions dans une boîte

La condensation de Bose-Einstein est habituellement décrite pour un ensemble de bosons identiques sans interactions, enfermés dans une boîte de volume V , en équilibre thermodynamique à la température T . Une séance est consacrée à l'étude de ce problème.

A partir de l'expression des énergies des niveaux quantiques individuels dans la boîte, il est possible de calculer le nombre d'états quantiques $\rho(\varepsilon)d\varepsilon$, d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, $\rho(\varepsilon)$ étant la densité d'états. Il est très courant, en mécanique statistique, de remplacer les sommes discrètes sur les états quantiques individuels qui apparaissent dans l'expression des diverses

grandeurs physiques par des intégrales sur ϵ pondérées par la densité d'états $\rho(\epsilon)$.

Une telle approximation « continue » conduit à une difficulté sérieuse quand on l'applique au calcul du nombre total de particules N obtenu en attribuant à chaque niveau quantique individuel une population donnée par la distribution de Bose-Einstein et en sommant sur tous ces états. On trouve qu'avec un potentiel chimique négatif, ce qui est nécessaire pour obtenir une distribution normalisable, il est impossible de répartir les N bosons dans les divers états quantiques en suivant la distribution de Bose-Einstein.

La difficulté précédente est liée en fait à l'approximation continue qui revient à pondérer la population de l'état fondamental $\epsilon_0 = 0$ de la boîte par la densité d'états $\rho(0)$ qui est nulle. Un calcul plus précis, n'utilisant pas l'approximation continue, montre qu'en dessous d'une certaine température critique T_c , la population N_0 du niveau fondamental peut devenir macroscopique, c'est-à-dire représenter une fraction significative du nombre total N de particules. Négliger N_0 , comme on le fait en pondérant la population de l'état fondamental par $\rho(0) = 0$, conduit donc à un résultat inexact. Le calcul précis de la population N_1 du premier niveau excité de la boîte, situé à une distance $\delta\epsilon$ au dessus du niveau fondamental, montre que $k_B T_c \gg \delta\epsilon$ où k_B est la constante de Boltzmann. Un tel résultat indique que l'accumulation des bosons dans l'état fondamental n'est pas un effet thermique trivial, qui apparaîtrait quand l'énergie thermique $k_B T_c$ devient de l'ordre de $\delta\epsilon$ ou inférieure à ϵ . La condensation de Bose-Einstein est un effet de statistique quantique qui apparaît à des températures T_c telles que le facteur de Boltzmann usuel $\exp(-\delta\epsilon/k_B T_c)$ est de l'ordre de 1. Le calcul de la température critique montre en fait que T_c est donnée par l'équation $n[\Lambda_{dB}(T_c)]^3 = 2.612$ où $n = N/V$ est la densité spatiale de particules et $\Lambda_{dB}(T) = [2\pi\hbar^2/mk_B T]^{1/2}$ la longueur d'onde de de Broglie thermique à la température T . En d'autres termes, la condensation de Bose-Einstein apparaît quand la distance moyenne entre particules devient de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie thermique. Les paquets d'ondes associés aux diverses particules commencent alors à se recouvrir et les effets de statistique quantique deviennent importants.

Après une telle discussion physique qualitative, une étude plus quantitative est présentée. On calcule la fraction de particules condensée N_0/N que l'on trouve être égale à $1 - (T/T_c)^{3/2}$ pour $T \leq T_c$. L'expression du logarithme de la fonction de partition est également établie, ce qui permet d'en déduire la valeur de toute une série de grandeurs physiques comme l'énergie U , la pression P , la chaleur spécifique à volume constant C_v . On montre en particulier que C_v reste continue en $T = T_c$, alors que la dérivée de C_v par rapport à T est discontinue en ce point (à la limite $N \rightarrow \infty$). L'étude des isothermes $P = f(V)$ correspondant

à diverses valeurs de T permet enfin de souligner des analogies et différences avec les isothermes de changement d'état d'un corps pur (équilibre liquide-vapeur).

Bosons sans interaction dans un piège harmonique

Le traitement précédent est étendu au cas, correspondant aux expériences réalisées récemment, de N bosons piégés dans un potentiel harmonique. On néglige là encore toute interaction entre les particules.

Comme pour le cas de la boîte, l'approximation continue conduit au résultat absurde qu'il est impossible de répartir les N bosons dans les états quantiques du piège en suivant la loi de distribution de Bose-Einstein. Là encore, la résolution d'une telle difficulté est obtenue quand on réalise qu'au dessous d'une certaine température critique T_c , un nombre macroscopique N_0 de bosons vient se condenser dans l'état fondamental du piège. On démontre que $k_B T_c / \hbar \omega$ est de l'ordre de $N^{1/3}$, de sorte que là encore $k_B T_c$ est très grand devant l'écart $\hbar \omega$ entre l'état fondamental et le premier état excité du piège harmonique supposé isotrope. Quant à la fraction N_0/N d'atomes condensés, elle est maintenant égale à $1 - (T/T_c)^3$ pour $T \leq T_c$. Tous ces résultats sont aisément étendus au cas d'un piège harmonique anisotrope.

On calcule également le logarithme de la fonction de partition d'où l'on déduit l'énergie interne U et la chaleur spécifique $C = \partial U / \partial T$. Il apparaît ici, qu'à la différence de ce qui se passe dans une boîte, la chaleur spécifique présente une discontinuité en $T = T_c$.

Une autre différence importante avec ce qui se passe dans une boîte est le caractère spatial de la condensation de Bose-Einstein de particules piégées. Au dessous de T_c , les N_0 particules condensées dans l'état fondamental φ_0 du piège donnent naissance à un pic étroit dans la distribution spatiale des atomes dont la largeur $\Delta x_0 \approx \sqrt{\hbar/m\omega}$ est la largeur spatiale de la fonction d'onde $\varphi_0(x)$ de l'état fondamental, m étant la masse des particules. Les $N - N_0$ particules non condensées forment un « nuage thermique » dont la largeur Δx_T est, beaucoup plus grande que Δx_0 , par un facteur de l'ordre de $\sqrt{k_B T_c / \hbar \omega} \approx N^{1/6}$. La distribution spatiale des atomes piégés est donc bimodale en dessous de T_c , c'est-à-dire formée d'un pic étroit émergeant au-dessus d'un fond beaucoup plus large. Dans une boîte au contraire, la distribution spatiale des atomes est uniforme quelle que soit la température T . Dans les deux cas, boîte et piège, il y a bien sûr une condensation dans l'espace des impulsions.

Corrections dues au nombre fini de particules

Toutes les expériences réalisées sur la condensation de Bose-Einstein d'atomes alcalins ultrafroids l'ont été bien sûr avec un nombre fini N de particules dans un piège harmonique. Il est important d'évaluer les différences entre les prédictions théoriques correspondant, en l'absence d'interactions, à N fini et N infini, de manière à ne pas attribuer, à tort, ces différences à l'existence d'interactions entre particules.

Des expressions plus précises sont établies pour la densité d'états $\rho(\epsilon)$ et le nombre N_c de particules excitées, c'est-à-dire dans des états autres que l'état fondamental ϕ_0 . On trouve que le fait que N soit fini abaisse la température critique T_c , l'abaissement relatif $[T_c(\infty) - T_c(N)]/T_c(\infty)$ étant de l'ordre de $0.7 N^{-1/3}$.

Un tel résultat est confirmé par des calculs numériques, sans approximations, effectués pour des valeurs pas trop élevées de N (de l'ordre de quelques 10^4). Ce calcul numérique montre également que le fait d'avoir un nombre fini N de particules « arrondit » les variations de N_0/N avec T/T_c au voisinage de $T/T_c = 1$, et supprime par ailleurs la discontinuité de la chaleur spécifique C au voisinage de T_c , chaleur spécifique qui conserve toutefois une variation d'autant plus rapide en $T = T_c$ que N est plus élevé.

Problèmes de dimensions inférieures à 3

Considérons un piège harmonique anisotrope avec trois fréquences propres différentes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le long des trois axes. Si l'une de ces fréquences ω_3 est choisie très grande devant les deux autres et si le domaine de températures T explorées est tel que $\hbar\omega_3 \gg kT$, on peut considérer que le degré de liberté correspondant est « gelé » et que le nombre de dimension du problème passe de 3 à 2. Il faut bien sûr vérifier ensuite que la température critique T_c correspondant à une éventuelle condensation à deux dimensions vérifie bien $\hbar\omega_3 \gg kT_c$. La même procédure peut être suivie pour passer de deux dimensions à une dimension.

La méthode générale développée plus haut pour étudier la condensation de Bose-Einstein se généralise aisément à deux et une dimension. A deux dimensions, on trouve des résultats très analogues aux précédents, la seule différence importante étant que la chaleur spécifique C reste continue au voisinage de $T = T_c$, alors qu'elle est discontinue pour un problème à trois dimensions. La fraction de particules condensées N_0/N varie comme $1 - (T/T_c)^2$ pour $T \leq T_c$.

Pour un piège harmonique de dimension D , il semble naturel de définir la limite thermodynamique en faisant tendre le nombre total de particules N vers l'infini, et la fréquence ω de l'oscillateur vers 0, tout en gardant constante la densité $N/(\Delta x_T)^D$ au centre du nuage thermique de largeur Δx_T . Comme Δx_T est proportionnel à $1/\omega$, une telle condition revient à garder $N\omega^D$ constant dans la limite $N \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$. On trouve alors que la température critique T_c tend vers 0 à la limite thermodynamique dans un piège harmonique à une dimension, alors qu'elle ne tend pas vers 0 pour $D=2$ ou 3. On peut donc considérer qu'il n'y a pas de condensation de Bose-Einstein au sens strict dans un piège harmonique à une dimension. Pour un nombre fini N de particules, il subsiste néanmoins une variation rapide de N_0/N avec T au voisinage d'une température T_c non nulle. Les calculs de N_0/N et T_c sont très voisins pour des bosons dans une boîte à deux dimensions et dans un piège harmonique à une dimension, et les conclusions précédentes sont donc généralisables à une boîte 2D.

Premières observation expérimentales

Le cours se poursuit par une description succincte des premières mises en évidence expérimentales de la condensation de Bose-Einstein d'atomes alcalins ultrafroids. Sont passées en revue les expériences réalisées en 1995 à Boulder sur le Rubidium, à M.I.T. sur le Sodium et à Houston sur le Lithium. La séquence temporelle de chaque expérience est analysée et les résultats obtenus dans chaque cas sont décrits et discutés. La plupart d'entre eux peuvent être interprétés au moins de manière qualitative, au moyen de la théorie de la condensation de Bose-Einstein d'un gaz de bosons sans interactions décrite précédemment. D'autres expériences ont été réalisées depuis, mettant en évidence des effets liés aux interactions entre bosons. Elles seront décrites et analysées dans des cours ultérieurs.

Sujets abordés

Etude des effets nouveaux introduits par les interactions entre atomes.

Comment les résultats relatifs à la condensation de Bose-Einstein d'un gaz de bosons sans interactions sont-ils modifiés par ces interactions? Peut-on calculer simplement ces modifications? Sont-elles importantes pour un gaz dilué? Les prédictions théoriques sont-elles en accord avec les observations expérimentales? Peut-on interpréter simplement les propriétés statiques et dynamiques des condensats au moyen de quelques paramètres microscopiques décrivant les collisions binaires entre atomes?

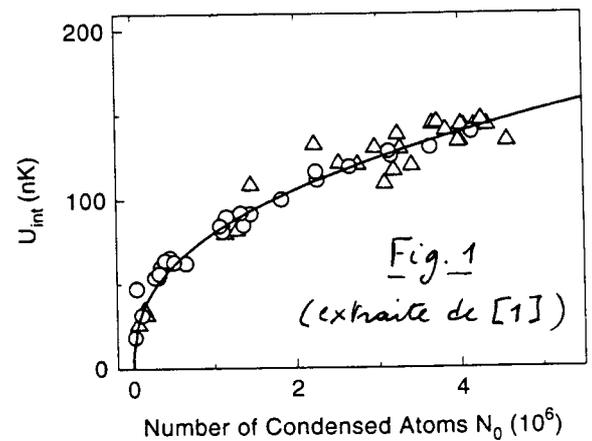
Exemples de résultats expérimentaux montrant l'importance des interactions

- Mesure directe de l'énergie d'interaction moyenne par atome U_{int} en fonction du nombre total N_0 d'atomes

Principe: On coupe brusquement le piège, on laisse le nuage se dilater pendant un certain temps et on mesure l'énergie cinétique moyenne par atome.

En l'absence d'interactions, cette énergie est l'énergie cinétique moyenne initiale dans l'état fondamental des puits: $\frac{1}{4}(\hbar^2 \omega_x^2 + \hbar^2 \omega_y^2 + \hbar^2 \omega_z^2)$, indépendante du nombre N_0 d'atomes.

En présence d'interactions répulsives, l'énergie d'interaction initiale se transforme en énergie cinétique au cours de l'expansion balistique et on peut ainsi la mesurer. La courbe en traits pleins de la figure 1 représente le meilleur ajustement avec une loi en $N_0^{2/5}$ déduite d'une théorie qui sera décrite plus loin dans ce cours.



- Mesure de la distribution spatiale des atomes dans le condensat.

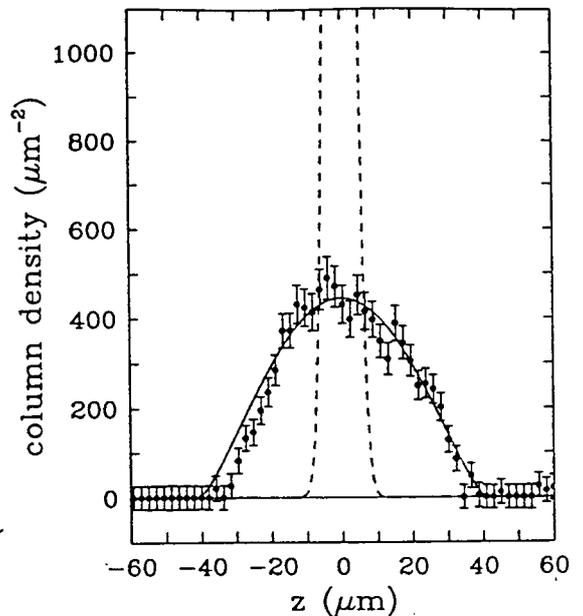
Imagerie par absorption d'un faisceau laser résonnant

La figure 2 extraite de [2] montre une telle image obtenue sur des atomes de Sodium par L. Hau, B. Bush, C. Liu, Z. Dutton, M. Burns et J. Golovchenko

Les points avec les barres d'erreur représentent les résultats expérimentaux

La courbe en traits interrompus est la forme qui serait obtenue en l'absence d'interactions (tous les atomes étant dans l'état fondamental du piège)

La courbe en traits pleins est la forme théorique prévue et tenant compte des interactions. Notez la différence importante entre les largeurs des 2 courbes. La théorie (qui sera exposé plus loin) prévoit une forme parabolique inversée et non pas une gaussienne.



Approximations

- On se limitera à des collisions binaires entre atomes, la densité étant suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les collisions à 3 corps
- Très souvent, on négligera les corrélations spatiales entre atomes, ce qui revient à suivre une approche de type champ moyen. Des méthodes plus élaborées, comme la méthode de Bogolubov, seront également décrites pour étudier les excitations élémentaires

Organisation du début du cours

Etude des collisions binaires à très basse énergie

- Déphasage dans l'onde s - longueur de diffusion - portée effective
- Pseudopotentiel : remplacement du potentiel exact par un potentiel plus simple, donnant la même longueur de diffusion et pouvant être traité à l'approximation de Born.

Structure du condensat dans un piège

- Calcul variationnel de la fonction d'onde de l'état fondamental
Equation de Gross-Pitaevskii
- Cas des longueurs de diffusion négatives - Condition de stabilité
- limite des densités élevées - Approximation de Thomas-Fermi

Approche de Bogolubov pour un système homogène (dans une boîte)

- Excitations élémentaires - Phonons
- Corrélations spatiales entre atomes - longueur de cohérence

Dynamique du condensat dans un piège harmonique

- Modes propres de vibration - Approche hydrodynamique
- Expansion du condensat après coupure du piège

Diffusion par un potentiel - Brefs rappels

Particule de masse μ diffusé par un potentiel $V(\vec{r})$
Etat stationnaire de diffusion

- Equation de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \quad (1.1)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (1.2.a) \quad V(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2\mu} U(\vec{r}) \quad (1.2.b)$$

$$[\Delta + k^2 - U(\vec{r})] \varphi_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.3)$$

- Solution de (1.3) ayant le comportement asymptotique suivant, somme d'une onde plane incidente e^{ikz} et d'une onde sphérique diffusée, d'amplitude décroissant en $1/r$

$$v_k^{\text{diff}}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikz} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.4)$$

- $f_k(\theta, \varphi)$: Amplitude de diffusion dans la direction θ, φ

$$\text{Section efficace différentielle} \quad \sigma(\theta, \varphi) = |f_k(\theta, \varphi)|^2 \quad (1.5)$$

Equation intégrale de la diffusion

- Fonction de Green sortante $G_+(\vec{r})$

$$G_+(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.6)$$

Solution de

$$(\Delta + k^2) G_+(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (1.7)$$

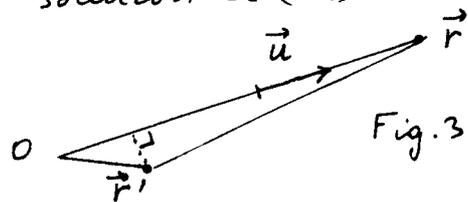
ayant un comportement asymptotique d'onde sphérique sortante.

- L'état stationnaire de diffusion $v_k^{\text{diff}}(\vec{r})$ vérifie l'équation intégrale

$$v_k^{\text{diff}}(\vec{r}) = e^{ikz} + \int d^3r' G_+(\vec{r}-\vec{r}') U(\vec{r}') v_k^{\text{diff}}(\vec{r}') \quad (1.8)$$

• En effet, en appliquant $(\Delta + k^2)$ aux 2 membres de (1.8) et en utilisant (1.7), on vérifie que v_k^{diff} est solution de (1.3).

• D'autre part, pour $r \gg r'$, on peut écrire (voir Fig. 3), en introduisant $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$



$$G_+(\vec{r}-\vec{r}') \underset{r \gg r'}{\sim} -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\vec{u} \cdot \vec{r}'} \quad (1.9)$$

de sorte que (1.8) devient

$$v_k^{\text{diff}}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-ik\vec{u} \cdot \vec{r}'} U(\vec{r}') v_k^{\text{diff}}(\vec{r}') \quad (1.10)$$

On retrouve bien le comportement asymptotique (1.4) et on déduit de plus

$$f_k(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} U(\vec{r}') v_k^{\text{diff}}(\vec{r}') \quad (1.11)$$

où $\vec{k}_f = k\vec{u}$ est le vecteur d'onde final (ou diffusé) dans la direction \vec{u} du point \vec{r}' d'angles polaires θ, φ .

Approximation de Born

Expression de l'amplitude de diffusion

On remplace dans (1.11) $v_k^{\text{diff}}(\vec{r}')$ par la solution d'ordre 0 en V de (1.3), $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'}$. En posant $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ ou $\vec{k}_i = k\hat{z}$ est le vecteur d'onde initial (ou incident), on obtient

$$f_k(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f) \cdot \vec{r}} U(\vec{r}) \quad (1.12)$$

A l'approximation de Born, l'amplitude de diffusion est la transformée de Fourier du potentiel

Limite des très basses énergies

Soit r_0 la portée du potentiel. Si l'énergie de la particule $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$ est suffisamment faible pour que $kr_0 \ll 1$, on peut remplacer l'exponentielle de (1.12) par 1 et obtenir

$$f_k(\theta, \varphi) \underset{k \rightarrow 0}{\approx} -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' U(\vec{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r V(\vec{r}) \quad (1.13)$$

L'amplitude de diffusion ne dépend plus de θ et φ . La diffusion est isotrope, même si V n'a pas la symétrie sphérique.

Conditions de validité de l'approximation de Born à basse énergie

- Dans (1.8), le 2^{ème} terme du membre de droite doit être très petit devant le 1^{er}. Remplaçons dans ce terme $v_k^{\text{diff}}(\vec{r}')$ par la solution d'ordre 0, $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'}$, et remplaçons toutes les exponentielles par 1, ce qui est valable à très basse énergie. On doit donc avoir

$$\left| \int d^3r' G_+(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \right| \ll 1 \quad (1.14)$$

- Prenons pour $U(\vec{r})$ un potentiel de hauteur V_0 et de largeur r_0 . En utilisant (1.6), on trouve que la condition (1.14) est équivalente à $V_0 r_0^2 \ll 1$, c'est à dire encore en revenant à V grâce à (1.2.b)

$$V_0 \ll \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} \quad (1.15)$$

L'énergie potentielle d'interaction V_0 doit être petite devant l'énergie cinétique de confinement dans une région d'extension r_0 .

Diffusion par un potentiel central

I-11

V ne dépend que de $r = |\vec{r}|$: $V(r)$

Equation radiale

- On peut choisir des solutions de la forme

$$\Psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (1.16)$$

- Posons : $R_{k\ell}(r) = \frac{1}{r} u_{k\ell}(r)$ (1.17)

L'équation de Schrödinger (1.3) devient pour $u_{k\ell}(r)$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) \right] u_{k\ell}(r) = 0 \quad (1.18)$$

- Les solutions de (1.18) ne sont en fait solutions de (1.3) que si $R_{k\ell}(r)$ est suffisamment régulière au voisinage de $r=0$, pour que l'action de Δ ne donne pas des fonctions δ . Il faut alors ajouter à (1.18) la condition

$$u_{k\ell}(0) = 0 \quad (1.19)$$

Ondes sphériques libres

- Pour $U=0$, on connaît les solutions $\Psi_{k\ell m}^{(0)}$ de (1.3) :

$$\Psi_{k\ell m}^{(0)}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (1.20)$$

où les $j_{\ell}(\rho)$ sont les fonctions de Bessel sphériques d'ordre ℓ

$$j_{\ell}(\rho) \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \frac{\rho^{\ell}}{(2\ell+1)!!} \quad (1.21.a) \quad j_{\ell}(\rho) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \ell \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.21.b)$$

- Loins de l'origine, $\Psi_{k\ell m}^{(0)}(\vec{r})$ est donc la superposition d'une onde entrante et d'une onde sortante

$$\Psi_{k\ell m}^{(0)}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \frac{1}{2ikr} \left[e^{i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - \ell \frac{\pi}{2})} \right] \quad (1.22)$$

- L'onde plane e^{ikz} peut être développée en ondes sphériques libres

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^0(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} \Psi_{k\ell 0}^{(0)}(\vec{r}) \quad (1.23)$$

Effet du potentiel - Déphasages δ_{ℓ}

- On suppose maintenant $U \neq 0$. Considérons une onde entrante $e^{-i(kr - \ell \frac{\pi}{2})}$ multipliée par le même coefficient que dans (1.22). Comme la diffusion par un potentiel se fait avec un coefficient de réflexion égal à 1 (conservation de la norme), l'onde sortante est multipliée par un coefficient de même module que celui de l'onde entrante. Par rapport à ce qui

se passe pour $V = 0$, on a donc simplement un facteur de phase

- On en conclut qu'il existe une solution de (1.3) pour $V \neq 0$ qui a le comportement asymptotique suivant

$$\Psi_{klm}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{1}{2ikr} \left[e^{i(kr - l\frac{\pi}{2} + 2\delta_l)} - e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2})} \right] \quad (1.24)$$

Alors que $\Psi_{klm}^{(0)}$ varie en $\frac{1}{r} \sin(kr - l\frac{\pi}{2})$ pour r grand, $\Psi_{klm}(\vec{r})$ varie en $\frac{1}{r} \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)$. δ_l est le déphasage de l'onde l

Amplitude de diffusion en fonction des déphasages

- Chaque fonction $\Psi_{kl0}(\vec{r})$ est solution de (1.3). Prenons la superposition linéaire $\sum_l c_l \Psi_{kl0}(\vec{r})$ avec les mêmes coefficients c_l qu'en (1.23). C'est aussi une solution de (1.3). Son comportement asymptotique est obtenu en utilisant (1.24). En écrivant

$$e^{i(kr - l\frac{\pi}{2} + 2\delta_l)} = e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})} e^{2i\delta_l} = e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})} [1 + 2ie^{i\delta_l} \sin\delta_l] \quad (1.25)$$

- et en utilisant (1.22) et (1.23), on constate que $\sum_l c_l \Psi_{kl0}(\vec{r})$ est une solution de (1.3) qui a bien le comportement asymptotique (1.4), et on obtient de plus l'expression suivante pour l'amplitude de diffusion f_k (qui ne dépend pas de φ à cause de la symétrie de V)

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin\delta_l Y_l^0(\theta) \quad (1.25)$$

- Si l'on connaît les déphasages δ_l , on connaît donc l'amplitude de diffusion. Le cas intéressant est bien sûr celui où un très petit nombre de déphasages sont non négligeables.

Références

- (1) M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 77, 416 (1996)
- (2) F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, "Theory of trapped Bose-condensed gases", Article de revue à paraître dans Rev. Mod. Phys.

Pour la théorie de la diffusion par un potentiel, voir les ouvrages de A. Messiah ; L. Landau et E. Lifschitz ; C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloe, sur la mécanique quantique.