

Dynamique d'un condensat dans un piège à $T=0^{\circ}\text{K}$

① Condensat dans un piège harmonique à la limite des hautes densités.

Remplacement des équations hydrodynamiques par des équations différentielles - Transparents T1 à T5.

Références [2], [3], [4]

② Expansion balistique d'un condensat

Transparents T6 à T7

③ Modes propres de vibration d'un condensat

- Utilisation des équations différentielles du § 1 - Transparents T8 à T12

- Equations hydrodynamiques linéarisées - Transparents T13 à T16
Références [12], [13], [14]

④ Description et analyse de quelques expériences

Références [15][16][17][18]

Références

- [1] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, Article de revue à paraître dans Rev. Mod. Phys.
- [2] Y. Castin, R. Dum, Phys. Rev. Lett. 77, 5315 (1996)
- [3] Yu Kagan, E. Surkov, G. Shlyapnikov, Phys. Rev. A54, R1753 (1996)
- [4] F. Dalfovo, C. Minniti, S. Stringari, L. Pitaevskii, Phys. Lett. A227, 259 (1997)
- [5] P. Ruprecht, M. Edwards, K. Burnett, C. Clark, Phys. Rev. A54, 4178 (1996)
- [6] M. Edwards, K. Ruprecht, K. Burnett, R. Dodd, C. Clark, Phys. Rev. Lett. 77, 1671 (1996)
- [7] K. Singh, D. Rokhsar, Phys. Rev. Lett. 77, 1667 (1996)
- [8] B. Esry, Phys. Rev. A55, 1147 (1997)
- [9] D. Hutchinson, E. Zaremba, A. Griffin, Phys. Rev. Lett. 78, 1842 (1997)
- [10] L. You, W. Hoston, M. Lewenstein, Phys. Rev. A55, R1581 (1997)
- [11] F. Dalfovo, S. Giorgini, M. Guilleumas, L. Pitaevskii, S. Stringari, Phys. Rev. A56, 3840 (1997)
- [12] S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 77, 2360 (1996)
- [13] E. Zaremba, Phys. Rev. A57, 518 (1998)
- [14] S. Stringari, Phys. Rev. A58, 2385 (1998)
- [15] D. Guéry-Odelin, Thèse de doctorat, Paris (1998).
- [16] D. Jin, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, E. Cornell, Phys. Rev. Lett. 77, 420 (1996)
- [17] M.-O. Hewes, M. Andrews, N. van Druten, D. Kurn, D. Durfee, C. Townsend, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 77, 988 (1996)
- [18] M. Andrews, D. Kurn, H. Miesner, D. Durfee, C. Townsend, S. Inouye, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 79, 553 (1997) + Erratum 1998, Phys. Rev. Lett. 80, 2967

X-2]

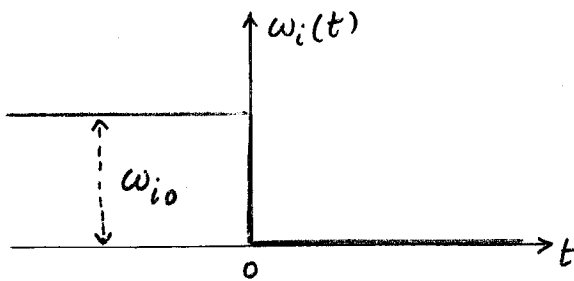
Remplacement des équations hydrodynamiques par une équation différentielle (à haute densité)

Valable quand $V_{ext}(\vec{r})$ est harmonique et ne dépend de t que par l'intermédiaire des $\omega_i(t)$

$$V_{ext}(\vec{r}, t) = \frac{m}{2} \sum_{i=x,y,z} \omega_i^2(t) r_i^2$$

$$r_i = x, y, z$$

Exemple de problème abordé



Expansion balistique

Densité initiale à l'équilibre (2)

$\omega_i(t)$ est resté constant et égal à ω_{i0} pendant un temps suffisant

↳ Etat d'équilibre donné par (Thomas-Fermi)

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{r}) &= \frac{1}{g} (\mu - V_{ext}(\vec{r})) \\ &= \frac{\mu}{g} - \frac{m}{2g} \sum_{i=x,y,z} \omega_{i0}^2 r_i^2 \end{aligned}$$

A partir de $t=0$, $\omega_i(t)$ peut changer et prendre une valeur quelconque

On va montrer que la solution des équations hydrodynamiques est

$$r_i(t) = b_i(t) r_i(0)$$

Simple dilatation

Quelle est l'équation donnant $b_i(t)$?

References [2], [3], [4].

Densité $\rho(\vec{r}, t)$ à l'instant t (3)

Une particule au point r_i à l'instant t était en $\frac{r_i}{b_i(t)}$ à l'instant $t=0$.

La dilatation $b_x(t), b_y(t), b_z(t)$ suivant les 3 axes réduit la densité par un facteur $\frac{1}{b_x(t)b_y(t)b_z(t)}$

$$\rho(r_i, t) = \frac{1}{b_x(t)b_y(t)b_z(t)} \rho_0\left(\frac{r_i}{b_i(t)}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu}{g} \frac{1}{b_x(t)b_y(t)b_z(t)} - \\ &\quad - \frac{m}{2g} \sum_{i=x,y,z} \frac{\omega_{i0}^2 r_i^2}{b_x(t)b_y(t)b_z(t) b_i^2(t)} \end{aligned}$$

Le nombre total de particules est conservé est l'équation de continuité est satisfaite

Champ de vitesses $\vec{v}(r_i, t)$ (4)

La particule en $\vec{r}$ à t est partie de $\vec{r}_0$ à $t=0$

$$r_{i0} = \frac{r_i}{b_i(t)}$$

Sa vitesse à l'instant t est

$$\begin{aligned} v_i(\vec{r}, t) &= \dot{b}_i(t) r_{i0} \\ &= \frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} r_i \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i(\vec{r}, t) = \left[\frac{\ddot{b}_i(t)}{b_i(t)} - \left(\frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} \right)^2 \right] r_i$$

$$\vec{v}^2 = \sum_i \left(\frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} \right)^2 r_i^2$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = m \sum_i \left(\frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} \right)^2 r_i$$

Equation du mouvement de $\vec{v}$ (5)

$$m \frac{\partial}{\partial t} v_i = - \frac{\partial}{\partial r_i} \left[\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{1}{2} m \sum_j \omega_j^2(t) r_j^2 + g\rho \right]$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} v_i = m \left[\frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} - \left(\frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} \right)^2 \right] r_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{\partial}{\partial r_i} \left[\frac{1}{2} \sum_j m \left(\frac{\dot{b}_j(t)}{b_j(t)} \right)^2 r_j^2 \right]$$

$$= m \left(\frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} \right)^2 r_i$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left[\frac{1}{2} m \sum_j \omega_j^2(t) r_j^2 \right] = m \omega_i^2(t) r_i$$

$$g \frac{\partial \rho}{\partial r_i} = g \left(-\frac{m}{2g} \right) \frac{\partial}{\partial r_i} \sum_j \frac{\omega_{0j}^2 r_j^2}{b_x(t) b_y(t) b_z(t) b_j^2(t)}$$

$$= -m \frac{\omega_{0i}^2 r_i}{b_x(t) b_y(t) b_z(t) b_i^2(t)}$$

(1) est équivalente à

$$\ddot{b}_i(t) + \omega_i^2(t) b_i(t) - \frac{\omega_{0i}^2}{b_x(t) b_y(t) b_z(t) b_i(t)} = 0$$

Système d'équations différentielles plus simples que l'équation (1)

Expansion balistique (6)

Condensat initialement dans un piège à symétrie cylindrique et très anisotrope : $\omega_{03} \ll \omega_{0\perp}$

Coupure du piège à $t=0$

$$\omega_i(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

$$\frac{d^2 b_{\perp}(t)}{dt^2} = \frac{\omega_{0\perp}^2}{b_{\perp}^3(t) b_3(t)} \quad \frac{d^2 b_3}{dt^2} = \frac{\omega_{03}^2}{b_{\perp}^2(t) b_3^2(t)}$$

$$\tau = \omega_{0\perp} t \quad \lambda = \frac{\omega_{03}}{\omega_{0\perp}} \ll 1$$

$$\frac{d^2 b_{\perp}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{b_{\perp}^3(\tau) b_3(\tau)} \quad \frac{d^2 b_3}{d\tau^2} = \frac{\lambda^2}{b_{\perp}^2(\tau) b_3^2(\tau)}$$

Solution sous forme d'un développement en puissances de λ^2

$$\begin{cases} b_{\perp}(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} \\ b_3(\tau) = 1 + \lambda^2 [\tau \text{Arctan } \tau - \ln \sqrt{1+\tau^2}] \end{cases}$$

Ref. [2]

Evolution du rapport d'anisotropie A (7)

- Avant la coupure du piège, l'approximation de Thomas-Fermi donne

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{g} \left[\mu - \frac{1}{2} m (\omega_{03}^2 z^2 + \omega_{0\perp}^2 r^2) \right]$$

Dimensions du piège : $R_3, R_{\perp}$

$$A = \frac{R_{\perp}}{R_3} = \frac{\omega_{03}}{\omega_{0\perp}} = \lambda$$

- Après coupure du piège

$$A(\tau) = \frac{R_{\perp}(\tau)}{R_3(\tau)} = \frac{R_{\perp} b_{\perp}(\tau)}{R_3 b_3(\tau)}$$

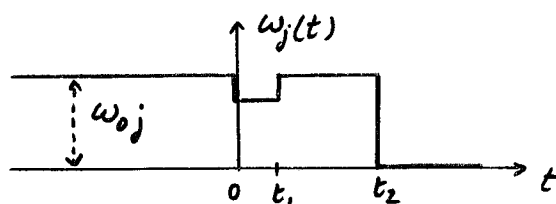
$$= \lambda \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{1 + \lambda^2 [\tau \text{Arctan } \tau - \ln \sqrt{1+\tau^2}]}$$

- Vérifications expérimentales

Voir références [1], [15]

Modes propres de vibration (8)

Variation temporelle des $\omega_j(t)$



0 - t_1 Phase de préparation
On excite certains modes de vibration

t_1 - t_2 Phase d'oscillation
les modes excités oscillent librement

$t > t_2$ Expansion balistique

Principe de l'expérience : On mesure le rapport d'anisotropie A pour plusieurs valeurs de $t_2 - t_1$

Possibilité de détection dispersive (non destructive) - MIT

Limite des faibles excitations

1^{ère} méthode

Résolution numérique de l'équation aux valeurs propres de $\mathcal{H}_P$

(Linéarisation de l'équation de G-P dépendant du temps - Equ. (9.28) du cours IX) Références [5] à [11]

2^{ème} méthode (valable à haute densité)

- Résolution des équations hydrodynamiques linéarisées

Recherche des valeurs propres de l'équation (9.67) du cours IX

- Cas d'un piège harmonique

Résolution des équations linéarisées pour les facteurs de dilatation $b_x(t), b_y(t), b_z(t)$

Linéarisation des équations du mouvement des $b_i(t)$

Piège harmonique anisotrope

$$\omega_{0z} \quad \omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_{0\perp}$$

Phase d'oscillation libre

$$\begin{cases} \ddot{b}_x + \omega_{0\perp}^2 b_x - \frac{\omega_{0\perp}^2}{b_x^2 b_y b_z} = 0 \\ \ddot{b}_y + \omega_{0\perp}^2 b_y - \frac{\omega_{0\perp}^2}{b_x b_y^2 b_z} = 0 \\ \ddot{b}_z + \omega_{0z}^2 b_z - \frac{\omega_{0z}^2}{b_x b_y b_z^2} = 0 \end{cases}$$

Linéarisation : $b_i = 1 + \delta b_i$

On ne garde que les termes linéaires en δb_i

$$\begin{cases} (\delta \ddot{b}_x) + 3\omega_{0\perp}^2 \delta b_x + \omega_{0\perp}^2 \delta b_y + \omega_{0\perp}^2 \delta b_z = 0 \\ (\delta \ddot{b}_y) + \omega_{0\perp}^2 \delta b_x + 3\omega_{0\perp}^2 \delta b_y + \omega_{0\perp}^2 \delta b_z = 0 \\ (\delta \ddot{b}_z) + \omega_{0z}^2 \delta b_x + \omega_{0z}^2 \delta b_y + 3\omega_{0z}^2 \delta b_z = 0 \end{cases}$$

Recherche des fréquences propres ω

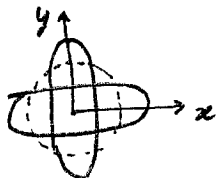
$$\delta b_i(t) \propto e^{-i\omega t} \quad \delta \ddot{b}_i = -\omega^2 b_i$$

$$\begin{cases} (3\omega_{0\perp}^2 - \omega^2) \delta b_x + \omega_{0\perp}^2 \delta b_y + \omega_{0\perp}^2 \delta b_z = 0 \\ \omega_{0\perp}^2 \delta b_x + (3\omega_{0\perp}^2 - \omega^2) \delta b_y + \omega_{0\perp}^2 \delta b_z = 0 \\ \omega_{0z}^2 \delta b_x + \omega_{0z}^2 \delta b_y + (3\omega_{0z}^2 - \omega^2) \delta b_z = 0 \end{cases}$$

1^{er} vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \delta b_x = -\delta b_y \\ \delta b_z = 0 \end{matrix}$

$$\hookrightarrow \omega^2 = 2\omega_{0\perp}^2 \quad \omega = \omega_{0\perp} \sqrt{2}$$

Mode $|m| = 2$
Variation de $x^2 - y^2$
sans variation de z



Recherche des autres vecteurs propres

$$\delta b_x = \delta b_y = \delta b_z \quad \delta b_z \neq 0$$

$$\begin{cases} (4\omega_{0\perp}^2 - \omega^2) \delta b_{\perp} + \omega_{0\perp}^2 \delta b_z = 0 \\ 2\omega_{0z}^2 \delta b_{\perp} + (3\omega_{0z}^2 - \omega^2) \delta b_z = 0 \end{cases}$$

Equation aux valeurs propres

pour les 2 modes $\delta b_x = \delta b_y \quad \delta b_z \neq 0$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 4\omega_{0\perp}^2 - \omega^2 & \omega_{0\perp}^2 \\ 2\omega_{0z}^2 & 3\omega_{0z}^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - \omega^2 (3\omega_{0z}^2 + 4\omega_{0\perp}^2) + 10\omega_{0\perp}^2 \omega_{0z}^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[3\omega_{0z}^2 + 4\omega_{0\perp}^2 \pm \sqrt{9\omega_{0z}^4 + 16\omega_{0\perp}^4 - 16\omega_{0z}^2 \omega_{0\perp}^2} \right]$$

Comparaison avec les expériences du JILA

Piège TOP $\rightarrow \omega_{0z}^2 = 8\omega_{0\perp}^2$

$$\omega^2 = [2(7 \pm \sqrt{29})] \omega_{0\perp}^2$$

$$\omega_1 = 4.976 \omega_{0\perp}$$

$\delta b_{\perp}$ et δb_z de même signe

$$\omega_2 = 1.797 \omega_{0\perp}$$

$\delta b_{\perp}$ et δb_z de signe opposé

Equations hydrodynamiques linéarisées ⁽¹³⁾

Valables à haute densité et à faible excitation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \rho(\vec{r}, t) = \frac{g}{m} \vec{\nabla} \cdot [\rho_0(\vec{r}) \vec{\nabla} \delta \rho(\vec{r}, t)]$$

Fréquences ω des modes propres de vibration : $\delta \rho(\vec{r}, t) \propto e^{-i\omega t}$

$$\omega^2 \delta \rho(\vec{r}) = -\frac{g}{m} \vec{\nabla} \cdot [\rho_0(\vec{r}) \vec{\nabla} \delta \rho(\vec{r})]$$

Cas simple d'un piège isotrope

A l'approximation de Thomas-Fermi

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{r}) &= \frac{1}{g} \left[\mu - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 [R^2 - r^2] \end{aligned}$$

R : rayon du condensat

$$\frac{g}{\mu} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \delta \rho(\vec{r}) = -\frac{1}{2} R^2 \vec{\nabla} \cdot \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{\nabla} \delta \rho(\vec{r}) \right]$$

Référence [12]

Calcul des fréquences propres ω ⁽¹⁴⁾

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \Omega^2 \quad u = \frac{r}{R} \quad \delta \rho(\vec{r}) = Y_l^m(\theta, \varphi) R_l(u)$$

L'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\delta \rho(\vec{r})$ devient :

$$\begin{aligned} (1-u^2) \frac{d^2}{du^2} R_l(u) + \left(\frac{2}{u} - 4u \right) \frac{d}{du} R_l(u) + \\ + \left[2\Omega^2 + \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) l(l+1) \right] R_l(u) = 0 \end{aligned}$$

Solution sous forme d'un développement en puissances de u

$$R_l(u) = u^s (1 + A_2 u^2 + \dots + A_{2n} u^{2n} + \dots)$$

Annulation du coefficient du terme en u^{s-2}

$$s(s-1) + 2s - l(l+1) = 0$$

$$s(s+1) - l(l+1) = 0$$

2 solutions : $s = l \quad s = -(l+1)$

Seule la solution $s = l$ est acceptable pour éviter une divergence en $u = 0$

Relation de récurrence ⁽¹⁵⁾

$$R_l(u) = u^l + A_2 u^{l+2} + \dots + A_{2n} u^{l+2n} + \dots$$

Annulation du coeff^t du terme en u^{l+2n}

$$\begin{aligned} A_{2n+2} [(l+2n+2)(l+2n+1) + 2(l+2n+2) - l(l+1)] = \\ = A_{2n} \{ (l+2n)(l+2n-1) + 4(l+2n) - 2\Omega^2 - l(l+1) \} \end{aligned}$$

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2} = 1$$

La série $R_l(u)$ diverge en $u=1$ ($r=R$)

Pour éviter cette situation non physique, A_{2n+2} doit s'annuler. $R_l(u)$ se réduit alors à un polynôme

Annulation de A_{2n+2}

$$(l+2n)(l+2n-1) + 4(l+2n) - 2\Omega^2 - l(l+1) = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2n^2 + 2nl + 3n + l$$

Comparaison avec un gaz sans interactions

$$\Psi(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \sum_{n_x n_y n_z} c_{n_x n_y n_z} \varphi_{n_x n_y n_z}(\vec{r}) e^{-i(n_x + n_y + n_z)\omega t}$$

$$\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \text{ oscille à } (n_x + n_y + n_z)\omega$$

Autre situation analysée Refs [13], [14] ⁽¹⁶⁾

Propagation d'ondes dans un condensat extrêmement allongé le long de Oz apparaissant à la limite comme un cylindre de rayon R

Dans le plan radial, la densité $\rho(r)$ est parabolique (Thomas-Fermi), et la densité maximale au centre $\rho(0)$ est 2 fois plus grande que la densité moyennée dans le plan radial

$$\rho(0) = 2\bar{\rho}$$

Des ondes sonores de longueur d'onde λ se propagent le long de Oz .

Problème à 1 dimension si $\lambda \gg R$.

On trouve une vitesse de propagation

$$c = \sqrt{\frac{g\bar{\rho}}{m}} = \sqrt{\frac{g\rho(0)}{2m}}$$

Résultat analogue à celui de la théorie de Bogolubov avec ρ remplacé par $\bar{\rho}$