

Propriétés asymptotiques du refroidissement subrecoil (suite et fin)

Le but de ce cours est de montrer comment il est possible de calculer la distribution d'impulsions $\mathcal{P}(p)$ des atomes piégés. Nous pourrions ainsi déterminer la largeur δp des structures étroites de cette distribution et voir si δp tend vers 0 quand le temps d'interaction Θ tend vers l'infini. Nous étudions également la hauteur des pics correspondants (densité en $p=0$ dans l'espace des impulsions) ainsi que la proportion d'atomes refroidis.

(5) Etude quantitative de la distribution d'impulsions $\mathcal{P}(p)$ des atomes piégés

5.1 Rappel des arguments qualitatifs utilisés dans les premières descriptions du refroidissement subrecoil

Estimation de la largeur δp de $\mathcal{P}(p)$

- Le raisonnement présenté dans les premières études théoriques du refroidissement VSCPT (Ref [1]) est le suivant : Soit Θ le temps d'interaction. Les états dans lesquels l'atome peut rester piégé pendant Θ sont ceux dont l'impulsion p est suffisamment petite pour que la probabilité d'absorber un photon pendant le temps Θ soit négligeable.

$$\Gamma'(p) \cdot \Theta < 1 \quad (8.1)$$

où $\Gamma'(p) = (1/\tau_0)(p/p_0)^2$ est le taux d'absorption donné en (5.5). Introduisons la quantité p_Θ définie par

$$\Gamma'(p_\Theta) \cdot \Theta = 1 \quad (8.2)$$

c'est à dire encore par

$$p_\Theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\Theta} \right)^{1/2} \quad (8.3)$$

Les atomes demeurant piégés pendant un temps Θ sont ceux pour lesquels $p < p_\Theta$. On considère alors que p_Θ donne un ordre de grandeur de la largeur δp de $\mathcal{P}(p)$.

- le raisonnement qualitatif précédent était en fait confirmé par la résolution numérique des équations de Bloch optiques décrivant le refroidissement VSCPT à 1 dimension en configuration $\sigma^+ - \sigma^-$. On trouve que la largeur des structures étroites de $\mathcal{P}(p)$ décroît avec Θ comme $1/\sqrt{\Theta}$ (voir Fig. 1a), en accord avec (8.3). On trouve également que cette largeur est proportionnelle à la fréquence de Rabi Ω_1 (voir Fig. 1b). Or, la largeur p_0 du trou Raman de $\Gamma'(p)$ et le temps d'excitation $1/\tau_0$ en dehors de ce trou, varient comme l'intensité laser, proportionnelle à Ω_1^2 , de sorte que dans (8.3) on a bien $p_0 \sqrt{\tau_0} \propto \Omega_1^2 \sqrt{1/\Omega_1^2} = \Omega_1$.

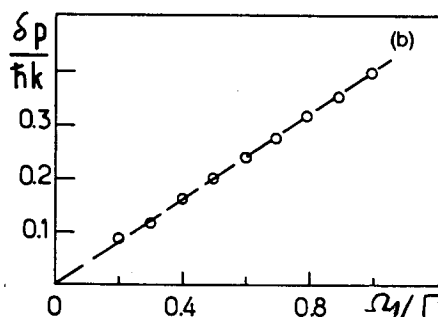
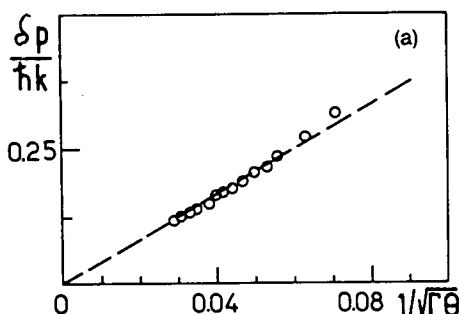


Figure 1
(Extrait de [1])

Insuffisances du raisonnement précédent

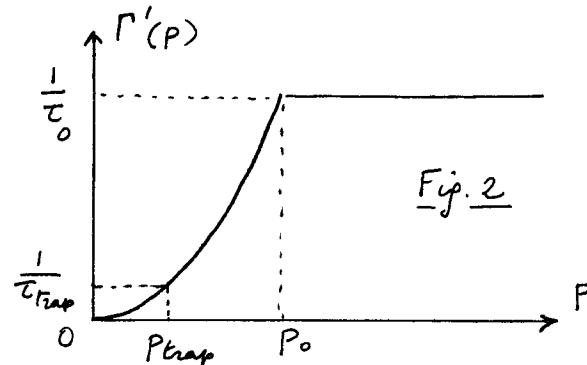
- Le raisonnement précédent met l'accent sur l'effet du "filtrage" en vitesse associé à l'interaction atome-laser. Si les atomes quittant le piège n'y reviennent jamais plus, ceux qui resteraient dans le piège au bout d'un temps Θ auraient effectivement une impulsion inférieure en module à P_0 . En fait, les atomes sortent du piège et y retournent en permanence. C'est d'ailleurs grâce à ce "recyclage" que la densité d'atomes en $p < P_0$ peut croître au cours du temps et qu'on obtient un refroidissement, et non pas seulement une sélection. En fait, à un instant donné Θ , le piège contient des atomes qui peuvent y être entrés pour la dernière fois à n'importe quel instant $\Theta - \tau$, avec $0 \leq \tau \leq \Theta$. Si $\tau \ll \Theta$, de tels atomes peuvent avoir une impulsion p très supérieure à P_0 , puisque p n'est limitée que par la condition $\Gamma'(p)\tau \leq 1$, exprimant que l'atome reste piégé pendant τ . La distribution $\mathcal{P}(\vec{p})$ des atomes piégés peut donc avoir des ailes qui s'étendent jusqu'à P_{trap} . Quelle est l'importance de ces ailes? Dans la sphère de rayon P_{trap} , la majorité des atomes est-elle contenue dans la sphère de rayon P_0 ($|\vec{p}| < P_0$) ou hors de cette sphère ($P_0 < |\vec{p}| < P_{\text{trap}}$)? Quelle est la proportion d'atomes refroidis?
- On pourrait être tenté de faire un raisonnement un peu plus élaboré, reposant sur l'idée que chaque atome d'impulsion $\vec{p}$ passe dans le piège un temps $\tau(\vec{p})$ de l'ordre de $\tau_0 P_0^2 / p^2$. Plus $|\vec{p}|$ est petit, plus longtemps l'atome reste piégé. Comme l'arrosage du piège à l'entrée est uniforme en $\vec{p}$, on aurait tendance à penser que la densité en $\vec{p}$ est proportionnelle à $\tau(\vec{p})$ et varie donc comme $1/p^2$ (la courbe étant tronquée pour $p < P_0$ puisque τ ne peut dépasser Θ). Un tel raisonnement reviendrait en fait à confondre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble, et nous avons vu dans le cours VII qu'il n'est pas toujours correct. Une analyse plus approfondie est donc nécessaire.

5.2 Etablissement de l'expression donnant $\mathcal{P}(p)$

Hypothèses simplificatrices

- La figure 2 rappelle les variations de $\Gamma'(p)$ avec le module p de l'impulsion. Pour simplifier, on suppose que la dépendance en p^2 de $\Gamma'(p)$ demeure valable jusqu'à ce que $\Gamma'(p)$ atteigne son valeur $1/\tau_0$ en $p = P_0$.

$$\begin{cases} \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{P_0} \right)^2 & \text{si } p < P_0 \\ \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} & \text{si } p \geq P_0 \end{cases} \quad (8.4)$$



- Le piège est défini par $p < P_{\text{trap}}$, avec comme dans le cours V
- $$P_{\text{trap}} < P_0, \text{ tel que} \quad (8.5)$$

La valeur de $\Gamma'(p)$ pour $p = P_{\text{trap}}$ est notée $1/\tau_{\text{trap}}$, τ_{trap} étant le temps de piégeage le plus court. Comme les points $(1/\tau_0, P_0)$ et $(1/\tau_{\text{trap}}, P_{\text{trap}})$ sont sur la même parabole, on a

$$\tau_0 P_0^2 = \tau_{\text{trap}} P_{\text{trap}}^2 \quad (8.6)$$

- Il sera commode pour la suite de considérer des dépendances de $\Gamma'(p)$ plus générales que la dépendance parabolique donnée en (8.4) :

$$\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{P_0} \right)^\alpha \quad (8.7)$$

Avec ce nouvel exposant α , les équations (8.3) et (8.6) doivent être modifiées et deviennent

$$P_\theta = P_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} \quad (8.8)$$

$$\tau_0 P_0^\alpha = \tau_{\text{trap}} P_{\text{trap}}^\alpha \quad (8.9)$$

- Enfin, nous supposons que le lien entre l'impulsion p d'un atome piégé et le temps $\tau(p)$ pendant lequel cet atome peut rester piégé est déterministe

$$\tau(p) = \frac{1}{\Gamma'(p)} = \tau_0 \left(\frac{P_0}{p} \right)^\alpha \quad (8.10)$$

Distribution $\mathcal{P}(p)$ du module de l'impulsion

- La loi d'arrosage calculée dans le § 3 du cours VII donne la probabilité par unité de temps $E(t)$ pour qu'un atome entre dans le piège à l'instant t . Comme $P_{\text{trap}} < k$, l'arrosage du piège est uniforme (voir § 4 du cours V), et la probabilité pour que l'atome entre dans le piège avec le module de son impulsion compris entre p et $p+dp$ vaut $\Pi(p)dp$ où

$$\Pi(p) = \frac{D p^{D-1}}{P_{\text{trap}}^D} \quad (8.11)$$

D étant la dimension d'espace. On en déduit que $\Pi(p)E(t)dpdt$ est la probabilité pour qu'un atome entre dans le piège entre t et $t+dt$, avec le module de son impulsion compris entre p et $p+dp$.

- Considérons alors les atomes se trouvant dans le piège à l'instant θ . Un atome d'impulsion p a pu entrer pour la dernière fois à n'importe quel instant $\theta - \tau$ pourvu que τ soit inférieur à $\tau(p)$. Si τ était supérieur à $\tau(p)$, l'atome aurait certainement quitté le piège avant l'instant θ . Deux cas sont alors à considérer suivant que $p > P_\theta$ ou $p < P_\theta$, P_θ étant défini par (8.8) qui exprime que $\tau(P_\theta) = \theta$. Si $p > P_\theta$, on a $\tau(p) < \theta$ et les atomes d'impulsion p se trouvant dans le piège à l'instant θ peuvent y être entrés pour la dernière fois à n'importe quel instant compris entre θ et $\theta - \tau(p)$. Si $p < P_\theta$, $\tau(p) > \theta$ et les atomes correspondants peuvent être entrés dans le piège pour la dernière fois à n'importe quel instant entre 0 et θ . On en déduit

$$\mathcal{P}(p, \theta) = D \frac{p^{D-1}}{P_{\text{trap}}^D} \left[Y(p - P_\theta) \int_0^{\tau(p)} E(\theta - \tau) d\tau + Y(P_\theta - p) \int_0^\theta E(\theta - \tau) d\tau \right] \quad (8.12)$$

où $Y(x)$ est la fonction saut.

Remarque

Calculons à partir de (8.12) la probabilité $\int_0^{P_{\text{trap}}} dp \mathcal{P}(p, \theta)$ pour qu'un atome se trouve dans le piège à l'instant θ avec n'importe quelle valeur de p (nécessairement comprise entre 0 et P_{trap} puisque l'atome est piégé). On a à faire une intégrale double sur τ et sur p . Dans l'intégration sur p on peut changer de variable et passer de p à $\tau'(p)$ donné par (8.10). En utilisant $\Pi(p)|dp| = P(\tau')|d\tau'|$, en utilisant (8.11) (et en permutant le nom des variables $\tau \leftrightarrow \tau'$), on tombe sur la même intégrale double que celle définissant $f(\theta)$ [Eq. 7.16 du cours VII]. On a donc bien

$$f(\theta) = \int_0^{P_{\text{trap}}} dp \mathcal{P}(p, \theta) \quad (8.13)$$

où $f(\theta)$ est la proportion d'atomes piégés. On vérifie bien ainsi que $\mathcal{P}(p, \theta)$ est correctement normalisée.

Distribution d'une composante de l'impulsion.

- Soit $\mathcal{P}(\vec{p})$ la distribution des extrémités du vecteur $\vec{p}$. Pour calculer, par exemple à 3 dimensions, la distribution des valeurs possibles de p_x , il faudrait intégrer $\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$ sur toutes les valeurs possibles de p_y et p_z . Plutôt que d'effectuer un tel calcul, nous limiterons ici à étudier les variations de $\mathcal{P}(\vec{p})$ le long de l'axe x en considérant la fonction de p_x :

$$\pi(p_x) = \mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0) \quad (8.14)$$

- Pour simplifier encore les calculs, nous supposons que $\mathcal{P}(\vec{p})$ a la symétrie sphérique et ne dépend que du module p de $\vec{p}$. On peut alors aisément, pour $D=1, 2$ ou 3 , exprimer $\pi(p_x)$ en fonction de la distribution $\mathcal{P}(p)$ du module p de $\vec{p}$ écrite en 8.12

Introduisons la fonction

$$\varphi(p, \theta) = \frac{\mathcal{P}(p, \theta)}{p^{D-1}} = \frac{D}{p_{\text{trap}}^D} \left[\gamma(p-p_\theta) \int_0^{p(p)} E(\theta-\tau) d\tau + \gamma(p_\theta-p) \int_0^\theta E(\theta-\tau) d\tau \right] \quad (8.15)$$

Des équations

$$D=1 \quad 2 dp_x \pi(p_x) = \mathcal{P}(p=|p_x|) dp_x \quad (8.16.a)$$

$$D=2 \quad 2\pi|p_x| dp_x \pi(p_x) = \mathcal{P}(p=|p_x|) dp_x \quad (8.16.b)$$

$$D=3 \quad 4\pi p_x^2 dp_x \pi(p_x) = \mathcal{P}(p=|p_x|) dp_x \quad (8.16.c)$$

on déduit (en se limitant à $p_x > 0$)

$$D=1 \quad \pi(p_x, \theta) = \varphi(p_x, \theta) / 2 \quad (8.17.a)$$

$$D=2 \quad \pi(p_x, \theta) = \varphi(p_x, \theta) / 2\pi \quad (8.17.b)$$

$$D=3 \quad \pi(p_x, \theta) = \varphi(p_x, \theta) / 4\pi \quad (8.17.c)$$

Il suffit donc de calculer $\varphi(p, \theta)$ pour obtenir, au moyen de 8.15 et 8.17 les expressions de $\mathcal{P}(p, \theta)$ et $\pi(p_x, \theta)$ à n'importe quelle dimension.

5.3 Etude du cas où $\langle \tau \rangle$ est infini et $\langle \hat{\tau} \rangle$ fini : $\mu < 1$ $\hat{\mu} > 1$

Calcul de $\varphi(p, \theta)$

- Pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$, il faut utiliser l'expression (7.12) de $E(t)$. Le préfacteur B de $P(\tau) = B/\tau^{1+\mu}$ est égal ici à $\mu \tau_{\text{trap}}^\mu$

$$E(t) = \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} t^{\mu-1} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \tau_{\text{trap}}^\mu} t^{\mu-1} \quad (8.18)$$

- On en déduit

$$\int_0^\theta E(\theta-\tau) d\tau = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{\theta^\mu}{\tau_{\text{trap}}^\mu} \quad (8.19)$$

$$\int_0^{p(p)} E(\theta-\tau) d\tau = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{1}{\tau_{\text{trap}}^\mu} \left[\theta^\mu - (\theta - p(p))^\mu \right] \quad (8.20)$$

ce qui, reporté dans (8.15), donne

$$\varphi(p, \theta) = D \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{1}{\tau_{\text{trap}}^\mu p_{\text{trap}}^D} \left\{ \gamma(p-p_\theta) [\theta^\mu - (\theta - \tau(p))^\mu] + \gamma(p_\theta - p) \theta^\mu \right\} \quad (8.21)$$

- Rappelons que l'exposant μ de la distribution $P(\tau)$ est lié à l'exposant α de l'expression (8.7) de $P'(p)$ et à la dimension d'espace D par la relation 5.22)

$$\mu = \frac{D}{\alpha} \quad (8.22)$$

Compte tenu de (8.9), on peut donc écrire

$$\tau_{\text{trap}}^\mu p_{\text{trap}}^D = [\tau_{\text{trap}} p_{\text{trap}}]^\mu = \tau_0^\mu p_0^D \quad (8.23)$$

- Mettons θ^μ en facteur dans l'accolade de (8.21) et utilisons $\tau(p)/\theta = (p_\theta/p)^\alpha$ qui découle de (8.8) et (8.10). Réécrivons enfin θ en fonction de p_θ grâce à (8.8)

$$\theta = \tau_0 \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.24)$$

On aboutit ainsi à l'expression suivante de $\varphi(p, \theta)$

$$\varphi(p, \theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_\theta^D} \left\{ \gamma(p-p_\theta) \left[1 - \left(1 - \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \right)^\mu \right] + \gamma(p_\theta - p) \right\} \quad (8.25)$$

On constate que p_{trap} et τ_{trap} ont disparu des équations

Allure des variations avec p de $\varphi(p, \theta)$ et $\mathcal{P}(p, \theta)$

- Pour $p < p_\theta$, l'accolade de (8.25) se réduit à $\gamma(p_\theta - p) = 1$ et on a

$$\varphi(p < p_\theta, \theta) = \varphi_M = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_\theta^D} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_0^D} \frac{\theta^\mu}{\tau_0^\mu} \quad (8.26)$$

- Pour $p > p_\theta$, l'accolade de (8.25) se réduit à

$$\left\{ \right\} = 1 - \left[1 - \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \right]^\mu \quad (8.27)$$

- Pour p voisin de p_θ , on peut écrire

$$\left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha = \left[1 + \frac{p_\theta - p}{p} \right]^\alpha \simeq 1 - \alpha \frac{p - p_\theta}{p_\theta} \quad (8.28)$$

de sorte que $\left\{ \right\} \simeq 1 - \alpha^\mu \left(\frac{p - p_\theta}{p_\theta} \right)^\mu \quad (8.29)$

Comme $\mu < 1$, la courbe donnant $\varphi(p)$ décroît à partir de $p = p_\theta$ avec une tangente verticale

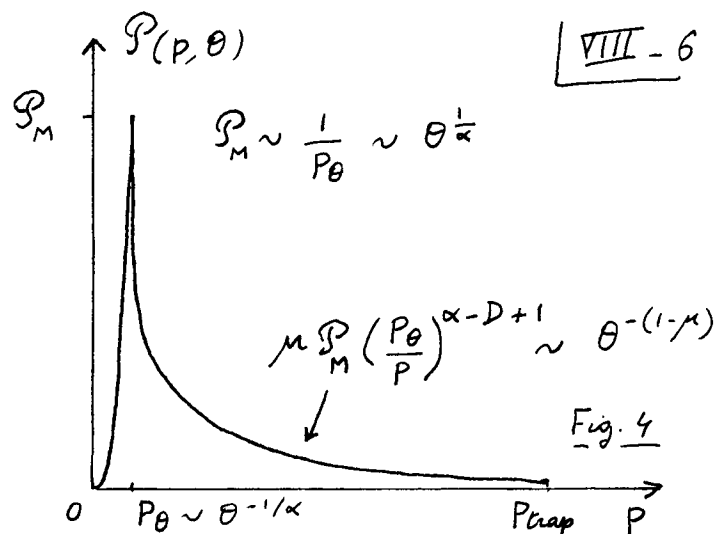
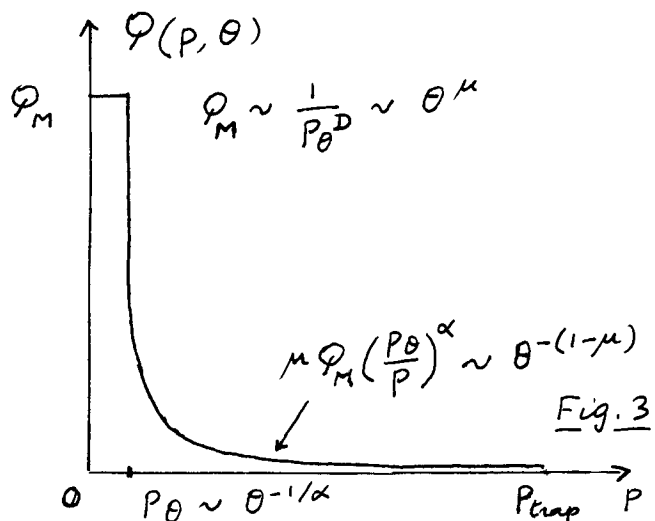
- Pour $p \gg p_\theta$, c'est à dire dans les ailes de $\varphi(p, \theta)$, on a

$$\left[1 - \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \right]^\mu \simeq 1 - \mu \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.30)$$

de sorte que l'accolade de (8.25) se réduit à $\mu \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha$. On a donc

$$\varphi(p \gg p_\theta, \theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_\theta^D} \mu \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha = \mu \varphi_M \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.31)$$

- Tous ces résultats sont regroupés sur la figure 3. Si l'on prenait une distribution de valeurs possibles de $\tau(p)$ pour un p donné, au lieu de la relation déterministe (8.10), les points anguleux de cette courbe seraient "arrondis".



- Nous avons aussi représenté sur la figure 4 les variations avec p de la distribution $P(p, \theta)$ du module p , qui s'obtient en multipliant $Q(p, \theta)$ par p^{D-1} . $P(p, \theta)$ croît entre 0 et p_θ , comme une loi de puissance en p^{D-1} et atteint en $p = p_\theta$ sa valeur maximale

$$P(p_\theta, \theta) = P_M = Q_M p_\theta^{D-1} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_\theta} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_0} \left(\frac{\theta}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (8.32)$$

$$P(p < p_\theta, \theta) = P_M \left(\frac{p}{p_\theta} \right)^{D-1} \quad (8.33)$$

Puis, pour $p > p_\theta$, $P(p, \theta)$ décroît en partant avec une tangente verticale, puis en variant dans les ailes comme :

$$P(p \gg p_\theta, \theta) \sim \mu P_M \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^{\alpha-D+1} \quad (8.34)$$

Largeur de la distribution en impulsion $P(\vec{p}, \theta)$

- Les variations de $P(\vec{p}, \theta)$ lorsque $\vec{p}$ se déplace le long de l'axe x sont données, d'après (8.17), par $Q(p_x, \theta)$ à un facteur près. On voit clairement sur la figure 3 que ces variations font apparaître un pic de largeur p_θ . Comme p_θ est donné par l'équation (8.2), on retrouve le résultat obtenu à partir des arguments qualitatifs du § 5.1 page VIII-1.

- Pour voir si p_θ caractérise effectivement la distribution en impulsion $P(\vec{p}, \theta)$ des atomes piégés, il faut maintenant calculer la proportion d'atomes ayant leur impulsion $\vec{p}$ dans la sphère de rayon p_θ . Nous appellerons une telle proportion d'atomes refroidis $r(\theta)$. On sait déjà (voir § 4.3 du cours VII) que pour $\mu < 1$ et $\tilde{\mu} > 1$, la proportion d'atomes piégés $f(\theta)$ tend vers 1 si $\theta \rightarrow \infty$. Si $r(\theta) \approx f(\theta) \approx 1$, la contribution des ailes de $P(\vec{p}, \theta)$ [$p > p_\theta$] sera négligeable et p_θ sera une bonne caractérisation aussi bien des atomes piégés que des atomes refroidis.

Contribution des ailes - Proportion $r(\theta)$ des atomes refroidis

- Notons tout de suite que les ailes de $Q(p, \theta)$ et de $P(p, \theta)$ varient en $1/\theta^{1-\mu}$ et tendent donc vers 0 quand $\theta \rightarrow \infty$ (puisque $\mu < 1$)
- Pour calculer $r(\theta)$, il est plus commode d'utiliser $P(p, \theta)$ qui donne la distribution du module p de $\vec{p}$. D'après (8.33)

$$r(\theta) = \int_0^{p_\theta} P(p, \theta) dp = P_M \frac{p_\theta}{D} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \quad (8.35)$$

- On voit ainsi que $r(\theta)$ peut atteindre des valeurs appréciables, de l'ordre de 1 si $\pi\mu < 1$. En fait, on peut montrer que tous les atomes piégés sont dans une sphère de rayon P_m égal à quelques P_θ . En effet, comme $\mu < 1$, on a, d'après (8.22), $D < \alpha$, de sorte que les ailes de $\mathcal{P}(p, \theta)$ décroissent, d'après (8.34), plus vite que $1/p$. L'intégrale de $\mathcal{P}(p, \theta)$ converge donc, et on peut majorer la proportion d'atomes ayant une valeur de p comprise entre P_m et P_{trap} en étendant la borne supérieure de l'intégrale de P_{trap} à $+\infty$.

$$\int_{P_m}^{P_{\text{trap}}} \mathcal{P}(p, \theta) dp < \int_{P_m}^{\infty} \mathcal{P}(p, \theta) dp = \mu P_m \int_{P_m}^{\infty} \left(\frac{P_\theta}{p}\right)^{\alpha-D+1} dp$$

$$= \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \frac{D}{\alpha-D} \left(\frac{P_\theta}{P_m}\right)^{\alpha-D} \quad (8.36)$$

Prenons pour fixer les idées $D=1$, $\alpha=2$ et donc $\mu=1/2$, $P_m = 5 P_\theta$ [de manière à pouvoir utiliser (8.34)]. L'équation (8.36) montre alors que la proportion d'atomes piégés ayant $p > 5 P_\theta$ est inférieure à $2/5\pi \approx 10\%$.

- En conclusion, on peut donc dire que pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$, les ailes de $\mathcal{P}(\vec{p}, \theta)$ ont une contribution négligeable pour la proportion d'atomes piégés et que P_θ caractérise aussi bien les atomes piégés que les atomes refroidis.

Densité en $\vec{p}=\vec{0}$. Hauteur du pic

- La densité en $\vec{p}=\vec{0}$ dans l'espace des $\vec{p}$ est donnée par $\mathcal{P}(\vec{p}=\vec{0}, \theta) = \pi_x(p_x=0, \theta)$. De (8.17) et (8.26), on déduit alors

$$\mathcal{P}(\vec{p}=\vec{0}, \theta) = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \frac{1}{\lambda_D P_\theta^D} = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \frac{1}{V_D(P_\theta)} \quad (8.37)$$

où

$$\lambda_{D=1} = 2 \quad \lambda_{D=2} = \pi \quad \lambda_{D=3} = \frac{4\pi}{3} \quad (8.38)$$

- En fait, $V_D(P_\theta) = \lambda_D P_\theta^D$ n'est autre que le volume à D dimensions d'une "sphère" de "rayon" P_θ (intervalle $-P_\theta, P_\theta$ pour $D=1$, de longueur $2P_\theta$; disque de surface πP_θ^2 pour $D=2$, sphère de rayon $4\pi P_\theta^3/3$ pour $D=3$). L'équation (8.37) exprime donc tout simplement que la densité en $\vec{p}=\vec{0}$ obtenue après un temps θ , correspond à $\sin \pi\mu / \pi\mu$ atomes dans un volume $V_D(P_\theta)$ de rayon P_θ .
- Quand θ croît, la densité en $\vec{p}=\vec{0}$, qui n'est autre à un coefficient près que la hauteur du pic de la figure 3 croît comme $1/P_\theta^D$, c'est-à-dire comme θ^μ .

Gain de densité dans l'espace des phases

- En général, les atomes auxquels on applique le refroidissement subreent ont été au préalable piégés et prérefroidis. Ils occupent dans l'espace des positions un volume de rayon de l'ordre d'une fraction de mm, et dans l'espace des impulsions un volume de rayon P_{Max} de l'ordre de 3 à 4 μeV . Leur vitesse de déplacement est alors suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les variations du volume spatial qu'ils occupent pendant le temps θ [voir Ref [2] §V, 5.4.3].
- Le gain dans l'espace des phases réalisé après un temps θ coïncide alors avec le rapport des volumes dans l'espace des $\vec{p}$

$$\text{Gain dans l'espace des phases après un temps } \theta = \left(\frac{P_{\text{Max}}}{P_\theta}\right)^D \quad (8.39)$$

5.4 Etude du cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis (μ et $\hat{\mu} > 1$)

[VIII-8]

- Nous supposons maintenant $\mu > 1$, c.-à-d. $D > \alpha$. C'est le cas par exemple de VSCPT à 3 dimensions : $D=3, \alpha=2$, donc $\mu = D/\alpha = 3/2$. La distribution des temps de piégeage $P(\tau) = \mu \tau_{\text{trap}}^\mu / \tau^{1+\mu}$ a alors un 1^{er} moment fini

$$\langle \tau \rangle = \int_{\tau_{\text{trap}}}^{\infty} d\tau \tau P(\tau) = \mu \tau_{\text{trap}}^\mu \int_{\tau_{\text{trap}}}^{\infty} \tau^{-\mu} d\tau = \frac{\mu}{\mu-1} \tau_{\text{trap}} \quad (8.40)$$

- Rappelons également l'expression de $\langle \hat{\tau} \rangle$ avec une diffusion confinée par des murs à $p = p_{\text{max}}$ [cf § 5.3 du cours V].

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \left(\frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (8.41)$$

Calcul de $\Phi(p, \theta)$

- Il faut ici utiliser l'expression (7.11) de $E(t)$

$$E(t) = \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (8.42)$$

- Reportons (8.42) dans (8.15). Les intégrales sur τ valent $\tau(p)$ et θ , respectivement. Utilisant (8.10) et (8.24), on obtient alors

$$\begin{aligned} \Phi(p, \theta) &= \frac{D}{p_{\text{trap}}^D} \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \left[Y(p - p_\theta) \tau(p) + Y(p_\theta - p) \theta \right] \\ &= \frac{D}{p_{\text{trap}}^D} \frac{\tau_0}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \left[Y(p - p_\theta) \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha + Y(p_\theta - p) \left(\frac{p_0}{p_\theta} \right)^\alpha \right] \end{aligned} \quad (8.43)$$

- On voit apparaître au dénominateur $p_{\text{trap}}^D (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)$ qu'on peut transformer grâce à (8.40) et (8.41)

$$\begin{aligned} p_{\text{trap}}^D (\langle \hat{\tau} \rangle + \langle \tau \rangle) &= \tau_0 p_{\text{max}}^D + \frac{\mu}{\mu-1} \underbrace{\tau_{\text{trap}} p_{\text{trap}}^\alpha}_{= \tau_0 p_0^\alpha \text{ d'après (8.9)}} p_{\text{trap}}^{D-\alpha} \\ &= \tau_0 p_{\text{max}}^D \left[1 + \frac{\mu}{\mu-1} \left(\frac{p_0}{p_{\text{max}}} \right)^\alpha \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_{\text{max}}} \right)^{D-\alpha} \right] \simeq \tau_0 p_{\text{max}}^D \end{aligned} \quad (8.44)$$

car $p_0 < p_{\text{max}}$ et $p_{\text{trap}} < p_{\text{max}}$. Finalement

$$\Phi(p, \theta) = \frac{D p_0^\alpha}{p_{\text{max}}^D} \left[Y(p - p_\theta) \frac{1}{p^\alpha} + Y(p_\theta - p) \frac{1}{p_\theta^\alpha} \right] \quad (8.45)$$

On constate que p_{trap} et τ_{trap} ont disparu des équations. Par contre p_{max} est apparu, ce qui n'était pas le cas précédemment pour $\mu < 1$.

Allure des variations avec p de $\Phi(p, \theta)$ et $\mathcal{P}(p, \theta)$

- La figure 5 donne les variations de $\Phi(p, \theta)$. Comme précédemment, on a un plateau pour $p < p_\theta$

$$\Phi(p < p_\theta, \theta) = \Phi_M = \frac{D}{p_{\text{max}}^D} \left(\frac{p_0}{p_\theta} \right)^\alpha = \frac{D}{p_{\text{max}}^D} \frac{\theta}{\tau_0} \quad (8.46)$$

Φ_M croît donc maintenant comme θ , et non plus comme θ^μ .

- Pour $p > p_\theta$, Φ décroît comme $1/p^\alpha$, comme pour $\mu < 1$

$$\Phi(p > p_\theta, \theta) = \frac{D}{p_{\text{max}}^D} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha = \Phi_M \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.47)$$

Il apparaît clairement sur la 1^{ère} égalité (8.47) que $\Phi(p, \theta)$ est indépendant de θ pour $p > p_\theta$. Il y a là une différence importante avec le cas $\mu < 1$. On voit en effet sur les figures 3 et 4 que les ailes de $\Phi(p, \theta)$ et $\mathcal{P}(p, \theta)$ varient en $1/\theta^{1-\mu}$. Pour $\mu < 1$, toute la courbe $\Phi(p, \theta)$

change donc quand θ croît, les ailes diminuant et le pic augmentant. Par contre, pour $\mu > 1$, on a une courbe fixe indépendante de θ , qu'on tronque pour $p < p_\theta$ à la valeur qu'elle atteint en $p = p_\theta$. Quand θ change, seule change l'abscisse p_θ en dessous de laquelle on tronque la courbe.

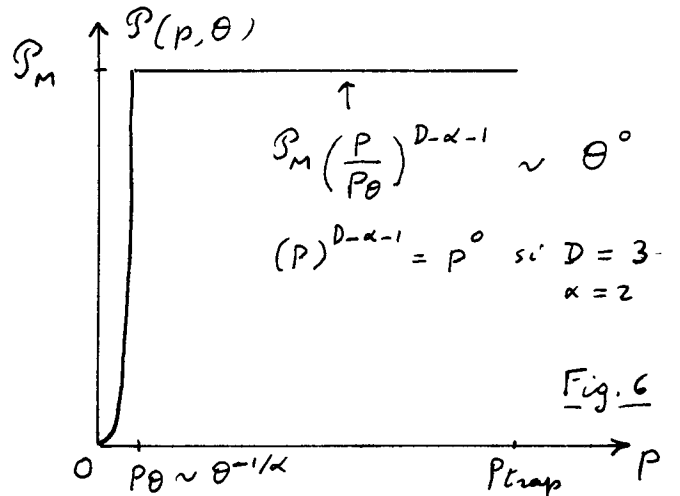
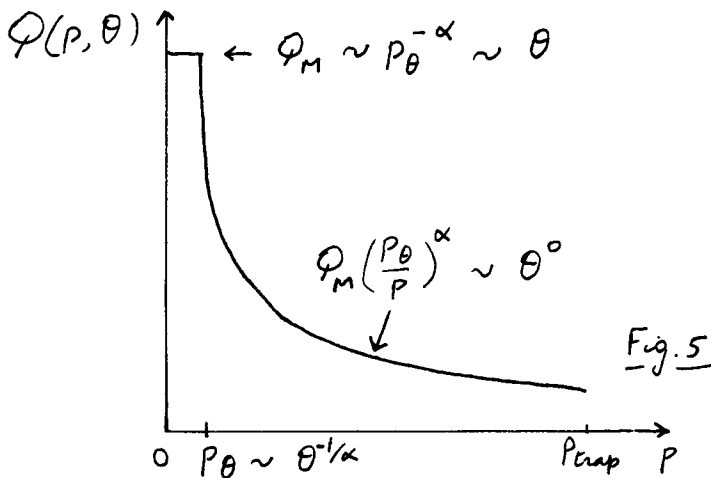
- La figure 6 donne les variations de $\mathcal{P}(p, \theta)$. Nous avons choisi le cas VSCPT-3D ($D=3, \alpha=2, \mu=3/2$), ce qui explique pourquoi les ailes, qui varient en $p^{D-\alpha-1}$ sont ici indépendantes de p .

$$\mathcal{P}(p < p_\theta, \theta) = \frac{D p_\theta^{D-1}}{P_{\text{Max}}^D} \left(\frac{p_\theta}{p_\theta} \right)^\alpha = \frac{D p_\theta^{D-1}}{P_{\text{Max}}^D} \frac{\theta}{\tau_0} \quad (8.48)$$

$$\mathcal{P}(p = p_\theta, \theta) = \mathcal{P}_M = \frac{D p_\theta^\alpha}{P_{\text{Max}}^D} p_\theta^{D-\alpha-1} \quad (8.49)$$

$$\mathcal{P}(p > p_\theta, \theta) = \frac{D p_\theta^\alpha}{P_{\text{Max}}^D} p^{D-\alpha-1} = \mathcal{P}_M \left(\frac{p}{p_\theta} \right)^{D-\alpha-1} \quad (8.50)$$

Comme $\varphi(p, \theta)$, $\mathcal{P}(p, \theta)$ ne dépend pas de θ pour $p > p_\theta$



Largeur de la distribution en impulsion $\mathcal{P}(\vec{p}, \theta)$

- La figure 5 montre que les variations de $\mathcal{P}(\vec{p}, \theta)$ le long d'un axe font apparaître un pic de largeur p_θ , avec des ailes variant en $p^{-\alpha}$.
- A la différence du cas précédent ($\mu < 1$), nous allons voir cependant que ce pic n'est dû qu'à une faible proportion des atomes piégés.

Contribution des ailes - Proportion $r(\theta)$ des atomes refroidis.

Pour calculer le nombre d'atomes dont l'impulsion a un module inférieur à p_θ , utilisons (8.48)

$$r(\theta) = \int_0^{p_\theta} \mathcal{P}(p, \theta) dp = \frac{p_\theta^\alpha}{P_{\text{Max}}^D} p_\theta^{D-\alpha} \quad (8.51)$$

Comme $D > \alpha$, $r(\theta)$ tend vers 0 comme $p_\theta^{D-\alpha}$ quand $\theta \rightarrow \infty$, c'est à dire comme $1/\theta^{\mu-1}$. Un tel résultat apparaît d'ailleurs clairement sur la figure 6 correspondant au cas $D=3, \alpha=2$. $\mathcal{P}_M$ est alors indépendant de p et θ et l'aire de 0 à p_θ , c.-à-d. $r(\theta)$, est négligeable devant l'aire de 0 à p_{trap} , c.-à-d. $f(\theta) \sim \mathcal{P}_M p_{\text{trap}}$. Si on voulait définir une largeur p_m caractéristique des atomes piégés, c.-à-d. celle sur la moitié de ces atomes piégés se trouvent dans une sphère de rayon p_m , on aurait ici $p_m = p_{\text{trap}}/2$. Pour $\mu > 1$, la largeur p_θ ne caractérise donc que les atomes refroidis et non les atomes piégés.

Densité en $\vec{p}=\vec{0}$. Hauteur du piège.

VIII-10

- Comme $\mathcal{P}(\vec{p}=\vec{0}, \theta) = \pi_x(p_x=0, \theta)$, cette densité n'est autre, à un coefficient de l'ordre de 1 près, que le maximum φ_m de la courbe de la figure 5. La densité en $\vec{p}=\vec{0}$ croît donc linéairement avec θ .
- Le fait que cette densité augmente avec θ se comprend aisément. Les atomes initialement dans le piège avec $p < p_0$ n'en sortent pas au bout d'un temps θ . Sous l'effet du recyclage, d'autres atomes tombent dans le piège dans l'intervalle $0 < p < p_0$ et y demeurent piégés. La densité en $\vec{p}=\vec{0}$ ne peut donc qu'augmenter.
- On peut dire encore que la densité d'atomes en $\vec{p}=\vec{0}$ correspond à $r(\theta)$ atomes dans un volume de l'ordre de p_0^D . En divisant (8.51) par p_0^D , on retrouve bien effectivement à un facteur près φ_m donné par (8.46). Quand $\theta \rightarrow \infty$, à la fois $r(\theta)$ et p_0^D tendent vers 0, mais $r(\theta)$ tend vers 0 moins rapidement [en $p_0^{D-\alpha}$] que p_0^D , et c'est pourquoi $r(\theta)/p_0^D$ augmente. Dans le cas $\mu < 1$ du § 5.3 précédent, $r(\theta) \rightarrow 1$ quand $\theta \rightarrow \infty$ et l'augmentation de la densité en $\vec{p}=\vec{0}$ n'est due qu'à la diminution de p_0^D .

Gain de densité dans l'espace des phases

- En supposant, comme pour $\mu < 1$, que le volume spatial occupé par les atomes change peu au cours de θ , et en utilisant le fait que le volume initial occupé par les atomes dans l'espace des $\vec{p}$ est de l'ordre de $p_{\max}^D$, on obtient
Gain dans l'espace des phases après un temps $\theta \sim \frac{\varphi_m}{1/p_{\max}^D} \sim \left(\frac{p_0}{p_0^D}\right)^\alpha$ (8.52)
- Bien que la proportion d'atomes refroidis soit faible, ce gain est appréciable. Il croît avec θ comme $(p_0)^{-\alpha}$, c.-à-d. comme θ . Le résultat (8.52) est important pour le refroidissement VSCPT à 3 dimensions. Il montre que, même si tous les atomes ne sont pas transférés dans le piè de largeur p_0 , la densité dans l'espace des phases augmente linéairement avec θ .

5.5 Conclusion - Importance des statistiques de Lévy

- Dans le cas $\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$ où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis, nous avons trouvé que la distribution d'impulsion $\varphi(p, \theta)$ le long d'une axe est décrite par une courbe indépendante de θ , qui est simplement tronquée pour $p < p_0$. Pour $p > p_0$, toute la dépendance en p de $\varphi(p, \theta)$ est contenue dans $\tau(p)$ [voir la 1^{ère} ligne de (8.43)]: Chaque impulsion intervient dans $\varphi(p)$ avec un poids égal à $\tau(p)$, à un coefficient indépendant de p près. On retrouve là le résultat du raisonnement esquissé à la fin du § 5.1. Un tel raisonnement est valable ici parce que le système a atteint, au bout d'un temps θ suffisamment long, un état stationnaire: $\varphi(p, \theta)$ est indépendant de θ pour $p > p_0$; seuls les atomes $p < p_0$ continuent à évoluer quand θ croît, mais leur poids $r(\theta)$ est de plus en plus négligeable.

- La situation est radicalement différente pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$. Le système n'atteint jamais un état stationnaire. Toute la courbe $\varphi(p, \theta)$ continue à évoluer quel que soit θ . De plus, tous les atomes viennent s'accumuler dans une sphère de rayon $P_{\max}$ de l'ordre de quelques P_0 , de sorte que la quasi-totalité des atomes piégés sont en train de subir des phases de piégeage de l'ordre d'une fraction non négligeable du temps total θ . Pour comprendre physiquement un tel résultat, revenons aux figures 3, a, b, c du cours VI (la longueur spatiale des pas étant remplacé par la durée temporelle des phases de piégeage). Imaginons un ensemble de telles simulations. Pour chacune d'elles, 3 ou 4 phases de piégeage "écrasent" toutes les autres. Si l'on se place à un instant donné, la probabilité de se trouver à cet instant dans une phase de piégeage longue est donc très voisine de 1. La moyenne d'ensemble effectuée à l'instant θ va donc donner une répartition d'atomes dont la plupart sont en train de subir une phase de piégeage longue, durant un temps de l'ordre d'une fraction importante de θ . L'impulsion de la majorité des atomes ne peut donc être très supérieure à P_0 . On voit ainsi que la possibilité de caractériser la totalité de atomes piégés par P_0 est une conséquence directe de la propriété fondamentale de sommes de Lévy d'être dominées par un petit nombre de termes, de l'ordre de la somme totale.

- Un dernier point mérite d'être noté. Pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$, $P_{\max}$ n'apparaît jamais dans les prédictions concernant les atomes piégés et décrits par $f(\theta)$, $r(\theta)$, $\varphi(p, \theta)$, $P(p, \theta)$. [Si $P_{\max}$ apparaît dans l'équation (8.39), c'est uniquement parce qu'on compare la densité en $\vec{p} = \vec{0}$ obtenue après un temps θ à la densité initiale, de l'ordre de $1/P_{\max}^3$]. Ceci montre qu'une description détaillée du refroidissement Sisyphe n'est pas essentielle dans le cas $\mu < 1$ pour comprendre les propriétés asymptotiques du refroidissement subrecul. Pourvu que $\langle \hat{\tau} \rangle$ soit fini et petit devant θ , les détails du recyclage dans le piège importent peu. Par contre, pour $\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$, $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont tous les 2 finis, et les résultats concernant les atomes piégés au refroidissement dépendent de $\langle \hat{\tau} \rangle$, et donc de $P_{\max}$.

Références

- [1] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C. Cohen-Tannoudji, JOSA B6, 2112 (1989)
- [2] F. Bardou, Thèse (Paris 1995).