

① Introduction

- Dans le cours V, nous avons modélisé le refroidissement sub-recul par une marche au hasard dans l'espace des impulsions. Pendant certains intervalles de temps $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$, l'atome reste "piégé" dans des états quasirésonants, caractérisés par une quasiimpulsion p inférieure à une certaine valeur P_{trap} . Entre 2 phases de piégeage, l'atome diffuse hors du piège, dans des états $p > P_{\text{trap}}$, et pendant des intervalles de temps $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_i, \dots$. Dans de nombreux cas, nous avons calculé les distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de piégeage τ et des temps de premier retour dans le piège $\hat{\tau}$. Et nous avons montré que ces distributions avaient des comportements asymptotiques (aux temps longs) caractérisés par des lois de puissances en $\tau^{-(1+\mu)}$ ou $\hat{\tau}^{-(1+\hat{\mu})}$, μ et $\hat{\mu}$ pouvant être plus petits que 1.
- Dans le cours VI, nous avons montré que les sommes de variable aléatoires indépendantes, décrites par la même loi de probabilité ayant un comportement asymptotique en loi de puissance, n'obéissent plus au théorème usuel de la limite centrale. Nous avons introduit les nouvelles lois de probabilité, dites lois de Lévy, qui régissent le comportement de ces sommes de variables aléatoires indépendantes, et souligné un certain nombre de propriétés originales qui les caractérisent.
- Le fait que nous ayons trouvé au cours V des distributions de probabilité en $\tau^{-(1+\mu)}$ ou $\hat{\tau}^{-(1+\hat{\mu})}$ montre donc que les statistiques de Lévy s'introduisent tout naturellement dans le problème du refroidissement subrecul. Nous allons montrer effectivement dans ce cours que l'utilisation des résultats du cours VI permet d'effectuer un certain nombre de prédictions quantitatives sur les propriétés asymptotiques (aux temps d'interaction longs) du refroidissement subrecul: proportion d'atomes piégés, distribution d'impulsion de ces atomes... Nous montrerons également qu'un tel point de vue permet d'apporter un éclairage nouveau sur certaines propriétés du refroidissement subrecul, comme l'absence d'ergodicité.

② Compétition entre piégeage et diffusion hors du piège2.1 Importance des exposants μ et $\hat{\mu}$

- Supposons tout d'abord que les exposants μ et $\hat{\mu}$ caractérisant les comportements asymptotiques de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ soient tous deux inférieurs à 1.

$$\mu < 1 \quad \hat{\mu} < 1 \quad (7.1)$$

Considérons alors N périodes alternées de piégeage et de diffusion hors du piège. D'après le paragraphe 3.1 du cours VI, on peut dire que:

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \propto N^{1/\mu} \quad \hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \propto N^{1/\hat{\mu}} \quad (7.2)$$

Si $\mu < \hat{\mu}$, le temps total passé dans le piège, T_N , croîtra plus vite avec N que le temps total passé hors du piège. On s'attend donc à ce que la proportion d'atomes piégés tende vers 1 quand le temps d'interaction Θ

tend vers l'infini. La conclusion est opposée quand $\hat{\mu} < \mu$. Si $\mu = \hat{\mu}$, T_N et $\hat{T}_N$ croissent de la même manière et on s'attend à ce que f tende vers une constante quand $\Theta \rightarrow \infty$.

- Supposons maintenant que l'un des 2 exposants, par exemple μ , reste inférieur à 1, alors que l'autre, $\hat{\mu}$, est supérieur à 1, de sorte que la valeur moyenne de $\hat{\tau}$ est finie. C'est ce qui se passe notamment, en présence de prérefroidissement Si-syphé.

$$\mu < 1 \quad \text{et} \quad \hat{\mu} > 1 \quad \langle \tau \rangle = \infty \quad \langle \hat{\tau} \rangle < \infty \quad (7.3)$$

Dans ce cas, on a

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \propto N^{1/\mu} \gg N \quad \hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \propto N \langle \hat{\tau} \rangle \quad (7.4)$$

Par suite, $T_N \gg \hat{T}_N$ quand $N \rightarrow \infty$ et on prédit que $f \rightarrow 1$ si $\Theta \rightarrow \infty$.

- Enfin si μ et $\hat{\mu}$ sont tous deux supérieurs à 1, de sorte que $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis, T_N et $\hat{T}_N$ croissent avec N comme $N \langle \tau \rangle$ et $N \langle \hat{\tau} \rangle$, respectivement, et on s'attend à ce que $f \rightarrow \langle \tau \rangle / (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)$ quand $\Theta \rightarrow \infty$.
- On voit ainsi que la simple connaissance des exposants μ et $\hat{\mu}$ permet de faire des prédictions importantes sur l'efficacité du refroidissement subrept. Peut-on aller plus loin et prédire la manière dont f tend vers sa limite quand $\Theta \rightarrow \infty$?

2.2 Moyenne temporelle et moyenne d'ensemble.

- Considérons, pour fixer les idées, le cas où $\mu = 1/2$ et $\hat{\mu} = 1/4$, qui est celui du refroidissement VSCPT à 1 dimension, avec retour dans le piège ralenti par désaccord Doppler aux grandes valeurs de p (Voir Fig. 1a et § 5.2 du cours V). On a alors :

$$\mu = 1/2 \quad \hat{\mu} = 1/4 \quad \rightarrow \quad T_N \propto N^2 \quad \hat{T}_N \propto N^4 \quad (7.5)$$

- Pour calculer la proportion f d'atomes piégés et la manière dont f tend vers 0 quand $\Theta \rightarrow \infty$, on en tente alors de faire le raisonnement suivant. La proportion relative de temps passé dans le piège vaut

$$\frac{T_N}{T_N + \hat{T}_N} \propto \frac{N^2}{N^2 + N^4} \sim \frac{1}{N^2} \quad (7.6)$$

Par ailleurs, comme $\hat{T}_N \gg T_N$, on a $\hat{T}_N \sim \Theta$ où Θ est la durée d'interaction, et par suite $N^4 \propto \Theta$, d'où l'on tire $N \propto \Theta^{1/4}$, et par suite

$$\frac{T_N}{T_N + \hat{T}_N} \sim N^{-2} \sim \Theta^{-1/2} \quad (7.7)$$

Il est tentant alors d'identifier f à $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$ et de conclure que f tend vers 0 comme $\Theta^{-1/2}$ quand $\Theta \rightarrow \infty$.

- En fait, le résultat précédent est inexact. f ne coïncide pas avec $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$. Nous verrons plus loin que f tend vers 0 comme $\Theta^{-1/4}$, et non comme $\Theta^{-1/2}$, une telle prédiction étant de plus confirmée par les résultats de simulations Monte-Carlo. L'origine d'une telle erreur est la confusion entre moyennes temporelles et moyennes d'ensemble. $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$ est la probabilité d'occupation du piège, moyennée temporellement entre 0 et Θ . Or, f est la probabilité moyenne d'occupation du piège après un temps Θ , c.-à-d. la probabilité d'occupation du piège à l'instant Θ , moyennée sur plusieurs réalisations différentes de l'expérience. f est donc une moyenne d'ensemble. Et moyennes temporelles et moyennes d'ensemble ne coïncident que si le système est ergodique. Or, le

refroidissement subrecoil est fondamentalement caractérisé par une absence d'ergodicité. Aussi long que soit le temps d'interaction Θ , il y a toujours des temps caractéristiques du système qui sont du même ordre que Θ : quand $p \rightarrow 0$, l'atome peut rester piégé pendant un temps variant comme p^{-2} , qui peut être aussi long que l'on veut si p est suffisamment petit.

2-3 Expression exacte de la proportion f d'atomes piégés.

- Nous devons donc exprimer f comme une moyenne d'ensemble, c'est à dire comme la probabilité moyenne de trouver, à l'instant Θ , l'atome dans le piège ($p < p_{trap}$)
- Un atome dans le piège à l'instant Θ est entré dans le piège pour la dernière fois à un instant antérieur $\Theta - \tau$ (avec $0 \leq \tau \leq \Theta$) et n'a pas quitté le piège entre $\Theta - \tau$ et τ .

Introduisons alors la probabilité $E(t)dt$ pour que l'atome entre dans le piège entre les instants t et $t+dt$. Une telle définition ne présume en rien du nombre d'entrées et de sorties que l'atome a pu faire avant l'instant t . On peut donc écrire

$$f(\Theta) = \int_0^\Theta dt E(\Theta - \tau) \tilde{\Psi}(\tau) \quad (7.8)$$

où $\tilde{\Psi}(\tau)$ est la probabilité pour que l'atome ne quitte pas le piège entre $\Theta - \tau$ et Θ , c.à.d. encore la probabilité pour qu'il demeure piégé un temps plus long que τ

$$\tilde{\Psi}(\tau) = \int_\tau^\infty dt' P(t') \quad (7.9)$$

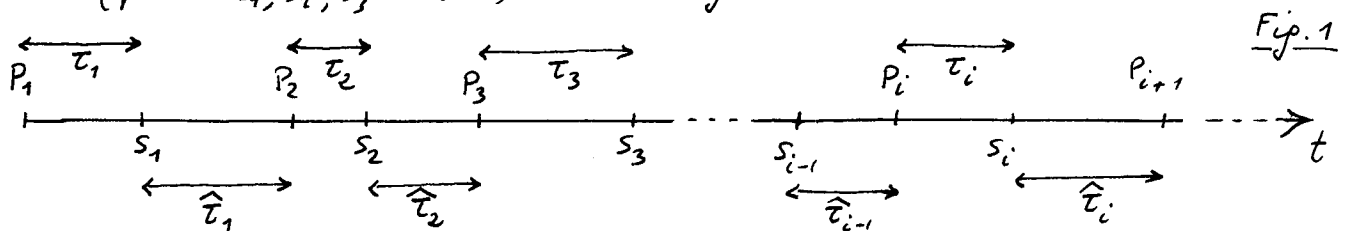
Le calcul de f nécessite donc au préalable d'évaluer E .

③ Probabilité par unité de temps d'entrer dans le piège

Le calcul de $E(t)$ est très voisin de celui de la loi d'arrosage $A(t)$ présentée à la fin du cours VI (§ 4).

3.1 Processus ponctuel associé aux distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$

- Portons sur l'axe des temps les divers instants où l'atome entre dans le piège (points $P_1, P_2, P_3 \dots P_i \dots$) et les divers instants où il en sort (points $S_1, S_2, S_3 \dots S_i \dots$). Voir Fig. 1



Chaque point P_i est entre 2 points S_{i-1} et S_i . Chaque point S_i est entre 2 points P_i et P_{i+1} . L'intervalle $P_i S_i$ vaut τ_i , l'intervalle $S_i P_{i+1}$ vaut $\hat{\tau}_i$.

- Comme les τ_i et les $\hat{\tau}_i$ sont des variables aléatoires indépendantes, on obtient 2 ensembles aléatoires infinis et discrets de points $P_1, P_2, P_3 \dots S_1, S_2, S_3 \dots$ imbriqués l'un dans l'autre
- On considère plusieurs réalisations différentes de ces 2 ensembles aléatoires et on se pose la question suivante : Quelle est la probabilité moyenne $E(t)dt$ de trouver un point P , quel que soit son numéro i , dans l'intervalle $[t, t+dt]$. En d'autres termes, quelle est la densité de points P sur l'axe des t ?

- La distance $P_i P_{i+1}$ entre 2 points P consécutifs vaut simplement $\tau_i + \hat{\tau}_i$. Comme τ et $\hat{\tau}$ sont des variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$, $\tau + \hat{\tau}$ est distribué suivant une loi $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ qui est le produit de convolution de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$, et dont la transformée de Laplace $\tilde{P}(s)$ est le produit des transformées de Laplace $\tilde{P}(s)$ et $\hat{\tilde{P}}(s)$ de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$.

$$\tilde{P}(\tau + \hat{\tau}) = P(\tau) \otimes \hat{P}(\hat{\tau}) \quad (7.10.a) \quad \tilde{P}(s) = \tilde{P}(s) \cdot \hat{\tilde{P}}(s) \quad (7.10.b)$$

3.2 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis ($\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

- Comme $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis, on sait (voir Eq. (5.44)) que $\tilde{P}(s)$ et $\hat{\tilde{P}}(s)$ partent linéairement en s quand $s \rightarrow 0$: $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \langle \tau \rangle s$, $\hat{\tilde{P}}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \langle \hat{\tau} \rangle s$, de sorte que, d'après (7.10.b), $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle) s$. $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ a donc un premier moment fini, égal à $\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle$, résultat qui était évident a priori. On en déduit

$$E(t) = \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (7.11)$$

- La densité moyenne de points P est l'inverse de la distance moyenne entre 2 points P consécutifs.

3.3 Cas où $\langle \hat{\tau} \rangle$ est fini et $\langle \tau \rangle$ infini ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

- On a toujours $\hat{\tilde{P}}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \langle \hat{\tau} \rangle s$. D'après l'appendice B des cours V $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$. On en déduit $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu - \langle \hat{\tau} \rangle s$. Quand $s \rightarrow 0$, le terme dominant de $\tilde{P}(s)$ est $1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$ (car $\mu < 1$), de sorte que le comportement de $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ est en $B/(\tau + \hat{\tau})^{1+\mu}$ aux temps longs.

- On peut donc utiliser le résultat (6.44) des cours VI pour obtenir la loi d'arrosage des points P de la figure 1

$$E(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A(t) = \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} \frac{1}{t^{1-\mu}} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \frac{1}{\tau_B} \left(\frac{\tau_B}{t} \right)^{1-\mu} \quad (7.12)$$

Un tel résultat revient à dire qu'aux temps longs, on peut négliger $\hat{\tau}_i$ devant τ_i .

3.4 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont infinis ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} < 1$)

- ~~Commençons par supposer $\mu < \hat{\mu}$~~

On a alors $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, $\hat{\tilde{P}}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{\hat{B}}{\hat{\mu}} \Gamma(1-\hat{\mu}) s^{\hat{\mu}}$ et par suite $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu - \frac{\hat{B}}{\hat{\mu}} \Gamma(1-\hat{\mu}) s^{\hat{\mu}}$. Comme $\mu < \hat{\mu}$, le terme dominant est $1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, ce qui permet à nouveau de montrer que $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ varie en $B/(\tau + \hat{\tau})^{1+\mu}$ aux temps longs et d'utiliser (6.44) qui conduit à (7.12)

En fait, un calcul plus précis de $E(t)$ est possible (voir Ref [1], chap. V, § 4.3.3.2) et fournit les premières corrections à apporter à (7.12) aux temps intermédiaires (termes "sous-dominants"). On trouve :

$$E(t) \underset{}{\sim} \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} \frac{1}{t^{1-\mu}} \left[1 + C \frac{\hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}}{\tau_B^\mu} \frac{1}{t^{\hat{\mu}-\mu}} \right] \quad (7.13)$$

où C est une constante sans dimension ne dépendant que de μ et $\hat{\mu}$ et où on a posé $B = \mu \tau_B^\mu$, $\hat{B} = \hat{\mu} \hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}$. Quand $t \gg \tau_B, \hat{\tau}_B$, le terme correctif de (7.13) est très petit devant 1 et (7.13) se réduit, comme il se doit, à (7.12)

- Pour $\hat{\mu} < \mu$, il suffit dans (7.13), d'échanger μ et $\hat{\mu}$, τ_B et $\hat{\tau}_B$, B et $\hat{B}$

- Enfin, si $\hat{\mu} = \mu$, on a $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, $\hat{\tilde{P}}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{\hat{B}}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, de sorte que $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{(B + \hat{B})}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, ce qui conduit tout simplement à remplacer dans (6.44), B par $B + \hat{B}$

$$E(t) \underset{}{\sim} \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi (B + \hat{B})} \frac{1}{t^{1-\mu}} \quad (7.14)$$

④ Etude quantitative de l'efficacité du refroidissement

VII-5

4-1 Autres expressions équivalentes de la proportion d'atomes piégés $f(\theta)$

- Reportons (7.9) dans (7.8). On obtient pour $f(\theta)$ l'expression

$$f(\theta) = \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \int_\tau^\infty d\tau' P(\tau') \quad (7.15)$$

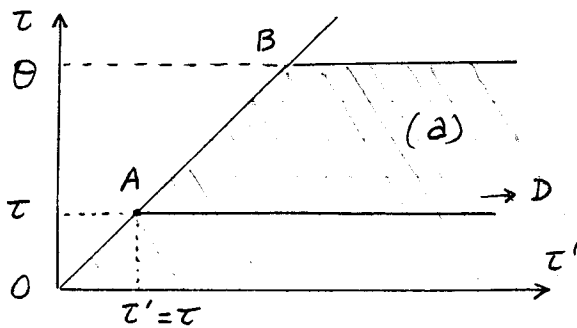
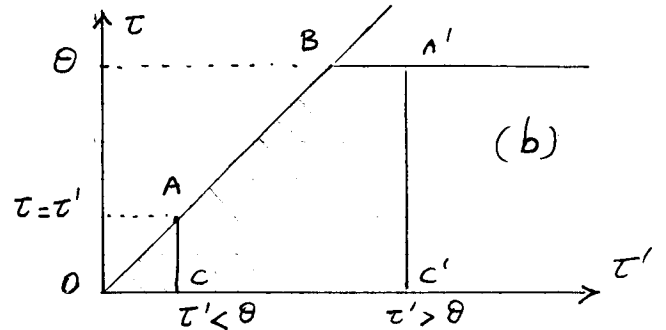


Fig. 2



- Dans (7.15), on commence, τ étant fixé par intégrer sur τ' de τ à $+\infty$, c-à-d le long de la droite AD de la figure 2a (D est à l'infini sur l'horizontale partant de A). Puis, on intègre sur τ de 0 à θ , ce qui revient, à déplacer le point A de la figure 2a de 0 à B. Le domaine d'intégration sur τ et τ' est donc la zone hachurée.

On peut bien sûr inverser l'ordre des intégrations dans la même zone hachurée (Fig. 2b). τ' étant fixé, on peut d'abord intégrer sur τ , de 0 à τ' si $\tau' < \theta$ (segment CA de la figure 2b), ou de 0 à θ si $\tau' > \theta$ (segment C'A'). Ensuite on intègre sur τ' de 0 à $+\infty$. On obtient donc une autre expression équivalente de $f(\theta)$

$$f(\theta) = \int_0^\infty d\tau' P(\tau') \left[Y(\theta-\tau') \int_0^{\tau'} d\tau E(\theta-\tau) + Y(\tau'-\theta) \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \right] \quad (7.16)$$

où $Y(x)$ est la fonction saut [$Y(x) = 0$ si $x < 0$, $Y(x) = 1$ si $x > 0$].

- Jusqu'ici nous n'avons considéré que la proportion $f(\theta)$ d'atomes piégés. On pourrait aussi considérer la proportion $\hat{f}(\theta)$ d'atomes hors du piège. On a bien sûr $f + \hat{f} = 1$ puisque l'atome est, soit dans le piège, soit hors du piège. $\hat{f}(\theta)$ est donné par une expression analogue à (7.15), où $P(\tau')$ est remplacé par $\hat{P}(\hat{\tau}')$ et où $E(\theta-\tau)$ est remplacé par $\hat{E}(\theta-\tau)$, probabilité par unité de temps que l'atome sorte du piège à l'instant $\theta-\tau$. En fait, $\hat{E}(t)$ est la densité de points S sur l'axe des temps de la figure 1. Comme chaque point S est entouré de 2 points P, et réciproquement, on se convainc aisément que les densités de points P et S sont égales, de sorte que

$$E(t) = \hat{E}(t) \quad (7.17)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 - \hat{f}(\theta) = 1 - \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \int_\tau^\infty d\hat{\tau}' \hat{P}(\hat{\tau}') \\ &= 1 - \int_0^\infty d\hat{\tau}' \hat{P}(\hat{\tau}') \left[Y(\theta-\hat{\tau}') \int_0^{\hat{\tau}'} d\tau E(\theta-\tau) + Y(\hat{\tau}'-\theta) \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \right] \quad (7.18) \end{aligned}$$

Suivant les cas, il sera plus commode, pour calculer $f(\theta)$, d'utiliser (7.15), (7.16) ou (7.18).

4.2 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis ($\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

[VII-6]

- Dans ce cas, il faut utiliser l'expression (7.11) de E . Comme E est constant, les 2 intégrales de (7.16) sont élémentaires et conduisent à

$$f(\theta) = \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \left[\int_0^\theta d\tau' \tau' P(\tau') + \theta \int_0^\infty d\tau' P(\tau') \right] \quad (7.19)$$

- Si $\theta \gg \langle \tau \rangle$, le 2^{ème} terme du crochet de (7.19) est négligeable devant le premier qui se réduit à $\int_0^\infty d\tau' \tau' P(\tau') = \langle \tau \rangle$, de sorte que

$$f(\theta) = f = \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (7.20)$$

Un calcul analogue donnerait $\hat{f}(\theta) = \hat{f} = \langle \hat{\tau} \rangle / (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)$

On démontre ainsi que, si $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis et si $\theta \gg \langle \tau \rangle, \langle \hat{\tau} \rangle$, moyennes d'ensemble et moyennes temporelles coïncident. Les proportions d'atomes piégés et non piégés sont proportionnelles aux temps moyens passés dans le piège et hors du piège, respectivement.

4.3 Cas où $\langle \hat{\tau} \rangle$ est fini et $\langle \tau \rangle$ infini ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

Calcul de f

- Bien qu'il soit plus compliqué, commençons par le calcul direct de f au moyen de l'équation (7.16), pour montrer que $f \rightarrow 1$ si $\theta \rightarrow \infty$.
- Reportons (7.12) dans (7.16). Il vient

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \tau_B^{-\mu} \int_0^\infty d\tau' P(\tau') \left[\gamma(\theta - \tau') \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{(\theta - \tau)^{1-\mu}} + \gamma(\tau' - \theta) \int_0^\theta \frac{d\tau}{(\theta - \tau)^{1-\mu}} \right] \quad (7.21)$$

Les 2 intégrales de (7.21) sont élémentaires et on obtient

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \tau_B^{-\mu} \left\{ \int_0^\theta d\tau' P(\tau') [\theta^\mu - (\theta - \tau')^\mu] + \int_\theta^\infty d\tau' P(\tau') \theta^\mu \right\} \quad (7.22)$$

Les termes en θ^μ de l'accolade de (7.22) se regroupent pour faire apparaître $\theta^\mu \int_0^\infty P(\tau') d\tau' = \theta^\mu$ et il vient (en remplaçant la variable muette d'intégration τ' par τ):

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \tau_B^{-\mu} \left[\theta^\mu - \int_0^\theta d\tau P(\tau) (\theta - \tau)^\mu \right] \quad (7.23)$$

- Pour calculer le crochet de (7.23), considérons pour fixer les idées le cas simple où $P(\tau)$ est partout donné par une loi de puissance

$$P(\tau) = \begin{cases} \mu \tau_B^\mu / \tau^{1+\mu} & \text{si } \tau > \tau_B \\ 0 & \text{si } \tau < \tau_B \end{cases} \quad (7.24)$$

On a alors, en désignant par $[]$ le crochet de (7.23)

$$[] = \theta^\mu - \mu \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\infty d\tau \tau^{-1-\mu} (\theta - \tau)^\mu \quad (7.25)$$

Une intégration par parties du 2^{ème} terme de (7.25) donne

$$-\mu \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\infty d\tau \tau^{-1-\mu} (\theta - \tau)^\mu = -(\theta - \tau_B)^\mu + \mu \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\theta \tau^{-\mu} (\theta - \tau)^{\mu-1} d\tau \quad (7.26)$$

- Comme $\theta \gg \tau_B$, on peut remplacer le 1^{er} terme du 2^{ème} membre de (7.26) par $-\theta^\mu$, ce qui revient à négliger un terme de l'ordre de $\mu \tau_B / \theta^{1-\mu}$, contenant une puissance positive de θ au dénominateur. Par ailleurs, comme $\mu < 1$, la dernière intégrale de (7.26) converge à ses extrémités. Si l'on remplace la borne inférieure τ_B par 0, on néglige un terme de l'ordre de $\frac{\mu}{1-\mu} \frac{\tau}{\theta^{1-\mu}}$, contenant lui aussi une puissance positive de θ au dénominateur. A la limite $\theta \rightarrow \infty$, on peut donc écrire

$$[] \simeq \theta^\mu - \theta^\mu + \mu \tau_B^\mu \int_0^\theta \tau^{-\mu} (\theta - \tau)^{\mu-1} d\tau$$

$$= \mu \tau_B^\mu \int_0^1 x^{-\mu} (1-x)^{\mu-1} dx \quad (7.27)$$

Pour passer de la 1^{ère} à la 2^{ème} ligne, on a posé $x = \tau / \theta$

- Utilisons alors la relation

$$p > 0, q > 0 \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (7.28)$$

On obtient, compte tenu de $\Gamma(1) = 1$

$$[] = \mu \tau_B^\mu B(1-\mu, \mu) = \mu \tau_B^\mu \Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \mu \tau_B^\mu \frac{\pi}{\sin \pi \mu} \quad (7.29)$$

On a utilisé

$$\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi \mu} \quad (7.30)$$

- Finalement, en reportant (7.30) dans (7.23) on trouve que

$$f(\theta) \rightarrow 1 \quad \text{si } \theta \rightarrow \infty \quad (7.31)$$

Pour obtenir les termes correctifs montrant comment $f(\theta)$ tend vers 1 quand $\theta \rightarrow \infty$, il faudrait revenir sur les approximations effectuées pour passer de (7.25) à (7.27). Il faudrait également tenir compte des termes correctifs à apporter à l'expression (7.12) de $E(t)$. En fait, il est beaucoup plus simple de passer par $\hat{f}(\theta)$

Calcul de $\hat{f}$

- L'équation (7.18) montre que $\hat{f}(\theta)$ est égal à l'intégrale de la 2^{ème} ligne (avec le signe + devant $\int_0^\infty d\hat{t}'$). Comme $\langle \hat{t} \rangle$ est fini, la contribution du 2^{ème} terme du crochet de (7.18) est négligeable si $\theta \gg \langle \hat{t} \rangle$ car $\hat{P}(\hat{t}')$ est nécessairement très petit si $\hat{t}' > \theta \gg \langle \hat{t} \rangle$. On en déduit que :

$$\hat{f}(\theta) \simeq \int_0^\infty d\hat{t}' \hat{P}(\hat{t}') \int_0^{\hat{t}'} d\tau E(\theta - \tau) \quad (7.32)$$

- Dans l'intégrale sur τ de (7.32), la borne supérieure $\hat{t}'$ ne peut pas être très grande devant $\langle \hat{t} \rangle$, à cause de la présence de $\hat{P}(\hat{t}')$ qui s'annule vite si $\hat{t}' \gg \langle \hat{t} \rangle$. Or $E(\theta - \tau)$ varie très lentement avec τ quand τ varie sur un intervalle de quelques $\langle \hat{t} \rangle$ si $\theta \gg \langle \hat{t} \rangle$. On peut donc, en première approximation remplacer $E(\theta - \tau)$ par $E(\theta)$ ce qui donne

$$\int_0^{\hat{t}'} d\tau E(\theta - \tau) \simeq E(\theta) \hat{t}' \quad (7.33)$$

- En reportant (7.33) dans (7.32), on obtient alors

VII-8

$$\begin{aligned}\hat{f}(\theta) &\simeq E(\theta) \int_0^\infty d\hat{\tau}' \hat{\tau}' \hat{P}(\hat{\tau}') = E(\theta) \langle \hat{\tau} \rangle \\ &= \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\tau_B} \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \left(\frac{\tau_B}{\theta} \right)^{1-\mu}\end{aligned}\quad (7.34)$$

et par suite

$$f(\theta) = 1 - \hat{f}(\theta) = 1 - \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\tau_B} \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \left(\frac{\tau_B}{\theta} \right)^{1-\mu} \quad (7.35)$$

Ce calcul de f est plus rapide et plus élégant que le précédent car $\hat{f}$ est calculé à l'ordre le plus bas où $\hat{f}$ est non nul. On trouve ainsi la loi de puissance en $1/\theta$ décrivant comment f tend vers 1 quand $\theta \rightarrow \infty$ et le préfacteur de cette loi de puissance.

4-4 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont infinis ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} < 1$)

$\hat{\mu} < \mu$

- Il faut alors utiliser (7.13) avec μ remplacé par $\hat{\mu}$ et $B = \mu \tau_B$ remplacé par $\hat{\mu} \hat{\tau}_B$. En ne gardant que le terme d'ordre le plus bas, on obtient

$$E(t) = \frac{\sin \pi \hat{\mu}}{\pi} \hat{\tau}^{-\hat{\mu}} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}} \quad (7.36)$$

Les formules (7.21) à (7.23) demeurent valables moyennant le remplacement $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ $\tau_B \rightarrow \hat{\tau}_B$ et on obtient

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \hat{\mu}}{\pi \hat{\mu}} \hat{\tau}_B^{-\hat{\mu}} \left[\theta^{\hat{\mu}} - \int_0^\theta P(\tau) (\theta - \tau)^{\hat{\mu}} \right] \quad (7.37)$$

- Comme plus haut, on peut utiliser l'expression (7.24) de $P(\tau)$, puis intégrer par parties la dernière intégrale du crochet de (7.37) pour transformer ce crochet en

$$[] = \theta^{\hat{\mu}} - (\theta - \tau_B)^{\hat{\mu}} + \hat{\mu} \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\theta \tau^{-\mu} (\theta - \tau)^{\hat{\mu}-1} d\tau \quad (7.38)$$

Comme plus haut, on peut enfin remplacer $(\theta - \tau_B)^{\hat{\mu}}$ par $\theta^{\hat{\mu}}$ et étendre à 0 la borne inférieure de l'intégrale de (7.38), ce qui revient à négliger des petites corrections. On obtient finalement, avec le changement de variables $x = \tau/\theta$

$$\begin{aligned}[] &\simeq \hat{\mu} \tau_B^\mu \theta^{\hat{\mu}-\mu} \int_0^1 x^{-\mu} (1-x)^{\hat{\mu}-1} dx \\ &= \hat{\mu} \tau_B^\mu \theta^{\hat{\mu}-\mu} B(1-\mu, \hat{\mu}) = \hat{\mu} \tau_B^\mu \frac{\Gamma(1-\mu) \Gamma(\hat{\mu})}{\Gamma(1-\mu+\hat{\mu})} \theta^{\hat{\mu}-\mu}\end{aligned}\quad (7.39)$$

- Le remplacement du crochet de (7.37) par (7.39) donne alors

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \hat{\mu}}{\pi} \frac{\Gamma(1-\mu) \Gamma(\hat{\mu})}{\Gamma(1-\mu+\hat{\mu})} \frac{\tau_B^\mu}{\hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}} \frac{1}{\theta^{\mu-\hat{\mu}}} \quad (7.40)$$

On trouve ainsi que, si $0 < \hat{\mu} < \mu < 1$, $f(\theta)$ tend vers 0 comme $1/\theta^{\mu-\hat{\mu}}$, avec un préfacteur donné par (7.40). En particulier si $\hat{\mu} = 1/4$ et $\mu = 1/2$, on trouve que $f(\theta)$ tend vers 0 comme $\theta^{-1/4}$ et non comme $\theta^{-1/2}$, ce qui est le cas de la moyenne temporelle (7.7).

- l'équation (7.40) donne le terme dominant de $f(\theta)$ à la limite $\theta \rightarrow \infty$. En tenant compte du terme correctif figurant dans le crochet de (7.13), on peut évaluer les premières corrections à (7.40) [ref [1], § 4.4.3]. On trouve que $1/f(\theta)$ est la somme d'un terme en $\theta^{\mu-\hat{\mu}}$ [inverse de (7.40)] et d'un terme plus petit, variant beaucoup plus lentement avec θ , et qui peut être assimilé à une constante.

- le cas $\mu < \hat{\mu}$ conduit à des calculs analogues. On trouve que $f(\theta)$ tend vers 1, $1-f(\theta)$ étant donné par une expression analogue à (7.40), où μ est remplacé par $\hat{\mu}$, τ_B par $\hat{\tau}_B$ et réciproquement.

$$\mu = \hat{\mu}$$

- $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ se comportent comme $B/\tau^{1+\mu}$ et $\hat{B}/\hat{\tau}^{1+\mu}$, respectivement, quand $\theta \rightarrow \infty$. Par ailleurs, $E(t)$ est donné par (7.14).

- On trouve alors, en utilisant (7.15), que $f(\theta)$ et $\hat{f}(\theta)$ sont donnés par des expressions identiques, à un coefficient de proportionnalité près, égal à B pour f et $\hat{B}$ pour $\hat{f}$. On en déduit que

$$f(\theta) \rightarrow \frac{B}{B + \hat{B}} = \frac{\tau_B^\mu}{\tau_B^\mu + \hat{\tau}_B^\mu} \quad \text{quand } \theta \rightarrow \infty \quad (7.41)$$

Quand $\mu = \hat{\mu}$, $f(\theta)$ tend donc vers une constante quand $\theta \rightarrow \infty$ déterminée par les préfacteurs B et $\hat{B}$ apparaissant dans les comportements asymptotiques de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$.

4.5 Comparaison de ces prédictions avec les résultats de simulations Monte Carlo du refroidissement VSCPT à 1 dimension

- Les prédictions précédentes peuvent être testées en les comparant aux prédictions de simulations Monte Carlo, du type de celles décrites dans le § 9.3 du cours V. Le cas du refroidissement VSCPT à 1 dimension en configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ est particulièrement simple. Les familles d'états couplés par l'hamiltonien d'interaction VAC sont alors finies et le calcul de la fonction délai se ramène à la diagonalisation d'une matrice non hermitique 3×3 . De plus, il est possible dans ce cas de relire de manière quantitative tous les paramètres des courbes donnant les variations avec p du taux d'absorption $\Gamma'(p)$ [courbes de la figure 1 du cours V] aux paramètres expérimentaux : fréquence de Rabi Ω , désaccord δ , longueur naturelle Γ . On peut ainsi calculer tous les préfacteurs $B, \hat{B}$ apparaissant dans les distributions $P(\tau), \hat{P}(\hat{\tau})$.

- Trois modèles I, II, III ont pu ainsi être testés. Le premier modèle I fait intervenir des nœuds à $\pm p_{\max}$ dans l'espace des p [Fig 1 b du cours V]. Dans les simulations Monte Carlo, dès que p dépasse $p_{\max}$ et vaut $p_{\max} + \epsilon t k$, on le remplace par $-p_{\max} + \epsilon t k$. Les ronds de la figure 3 représentent les résultats de telles simulations pour $f(\theta)$ (exprimé en %). Le refroidissement VSCPT à 1D implique ici $\mu = D/\alpha = 1/2$ ($D=1, \alpha=2$). Par ailleurs, à cause des

murs à $\pm p_{\max}$, $\langle \hat{E} \rangle$ est fini. Il faut donc utiliser ici la formule (7.35) avec $\mu = 1/2$, qui prédit que f doit tendre vers 1 quand $\Theta \rightarrow \infty$, comme $1 - \alpha \Theta^{-1/2}$. La courbe en traits pleins de la figure 3 représente le meilleur ajustement aux résultats des simulations par une loi en $1 - \alpha \Theta^{-1/2}$. L'accord est excellent

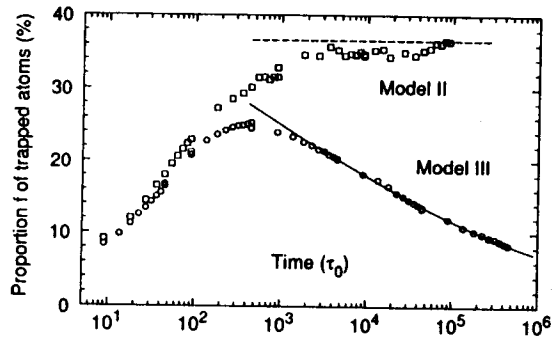
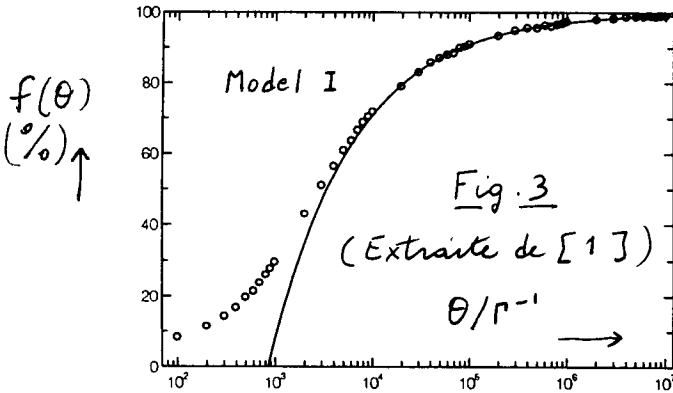


Fig. 4 (Extrait de [2])

- Le modèle II considère une diffusion en p non confinée, sans effet Doppler aux grands p [course de la Fig 1.a du cours V sans décroissance de $\Gamma'(p)$ aux grands p]. On a toujours $\mu = 1/2$, mais la diffusion hors du piège est celle d'un mouvement Brownien usuel sans effet Doppler. Il faut donc se reporter au § 5.1 du cours V qui montre que $\hat{\mu} = 1/2$ et à l'équation (5.34) qui donne le prefacteur $\hat{B}$. On est donc dans le cas $\mu = \hat{\mu} < 1$ et il faut par suite utiliser l'équation (7.41), qui montre que $f(\Theta)$ tend vers une constante ne dépendant que de $B/\hat{B}$. On peut calculer exactement cette constante à partir des équations (5.15) et (5.34) et montrer qu'elle ne dépend que du rapport $\hbar k/p_0$ où p_0 est la largeur du trou en $p = 0$ des courbes de la figure 1 du cours V. La droite horizontale en pointillés de la figure 4 représente cette constante (calculée sans aucun ajustement). Les carrés représentent les résultats de simulations Monte Carlo calculés en prenant une très grande valeur de Γ (de manière à pouvoir négliger la décroissance Doppler de $\Gamma'(p)$). On constate qu'ils tendent bien, quand $\Theta \rightarrow \infty$, vers la constante prévue à partir de 7.41.
- Enfin, le modèle III tient compte de la décroissance Doppler de $\Gamma'(p)$. D'après le § 5.2 du cours V, on a alors $\hat{\mu} = 1/4$ [voir équation (5.40)]. On est donc ici dans le cas $\mu = 1/2$, $\hat{\mu} = 1/4$ et il faut donc utiliser l'équation (7.40) qui prédit que $f(\Theta)$ doit décroître comme $\Theta^{-1/4}$. La courbe en traits pleins de la figure représente le meilleur ajustement aux résultats de simulations Monte Carlo (ronds) d'un courbe du type $f(\Theta) = [\alpha + \beta \Theta^{1/4}]^{-1}$. Là aussi, l'accord est excellent.
- Un tel accord entre prédictions analytiques et simulations Monte Carlo donne confiance dans l'approche "vols de Lévy" qui sera appliquée, dans le cours suivant au calcul de la forme de la distribution d'impulsions.

Références

- [1] F. Bardou, Thèse, Paris 1995
- [2] F. Bardou, J.P. Bouchand, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji
Phys. Rev. Lett. **72**, 203 (1994)
- [3] Voir aussi les prédictions sur le comportement asymptotique des solutions des équations de Bloch optiques pour le refroidissement VSCPT 1D en configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ dans V. Alekseev, D. Krylova, JETP Lett **55**, 321 (1992) et Laser Physics **2**, 781 (1992)