

① Introduction - Buts de ce chapitre.

- Dans le chapitre précédent, le refroidissement subrecul a été modélisé par une marche aléatoire dans l'espace des impulsions faisant apparaître l'évolution de l'atome comme une suite alternée de phases de piégeage et de phases de diffusion hors du piège. Les distributions $P(\tau)$ des temps de piégeage τ , et $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de diffusion hors du piège $\hat{\tau}$, ont été calculées dans un certain nombre de situations.
- Il est apparu alors que, dans de nombreux cas, les distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ avaient une décroissance très lente, décrite par une loi de puissance, en $\tau^{-(1+\mu)}$, quand $\tau \rightarrow \infty$, μ pouvant prendre des valeurs plus petites que 1 (par exemple, $\mu = 1/2$ ou $\mu = 1/4$). Tout en étant normalisables, de telles distributions sont larges, si larges que la valeur moyenne de τ , $\int_0^\infty d\tau \tau P(\tau)$, peut être infinie. Pour calculer le temps total passé dans le piège, $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$, et le temps total passé hors du piège, $\hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i$, après N entrées et sorties, il n'est plus alors possible d'appliquer le théorème de la limite centrale aux sommes de variables aléatoires indépendantes que sont T_N et $\hat{T}_N$. S'il était valable, un tel théorème prédirait par exemple que, à la limite $N \gg 1$, T_N est distribué suivant une gaussienne centrée en $N\bar{\tau}$ et de variance $N\sigma^2$, où $\bar{\tau}$ et σ^2 sont les valeur moyenne et variance de $P(\tau)$.
- Il se trouve en fait que les distributions de sommes de variable aléatoires indépendantes, décrites toutes par une même loi ayant un comportement asymptotique en $\tau^{-(1+\mu)}$, ont été étudiées en détail par Paul Lévy, et obéissent à un théorème de la limite centrale généralisé. Le but de ce chapitre est de rappeler les résultats essentiels de ces études, de manière à pouvoir les appliquer, dans les chapitres suivants, au problème de la limite asymptotique du refroidissement subrecul.
- Il n'est pas question ici de présenter une démonstration rigoureuse du théorème de la limite centrale généralisé. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats et de présenter des arguments simples permettant de les rendre plausibles. Nous insisterons sur la signification physique des résultats obtenus et sur les différences apparaissant avec le cas des distributions étroites pour lesquelles le théorème de la limite centrale habituel s'applique. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages ou des articles plus spécialisés [voir Refs [1] à [3]].

② Théorème de la limite centrale généralisé

2.1 - Hypothèses sur la distribution de probabilité $P(\tau)$

- Soit τ une variable aléatoire pouvant varier entre 0 et $+\infty$, décrite par une distribution de probabilité normalisée $P(\tau)$

$$\int_0^\infty d\tau P(\tau) = 1 \quad (6.1)$$

- Pour τ suffisamment grand, $P(\tau)$ varie en loi de puissance

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad (6.2)$$

où B et μ sont positifs ($B > 0$ car P est une pblé, $\mu > 0$ pour que 6.1 converge).

- Si $0 < \mu \leq 1$, la valeur moyenne de τ , $\int_0^\infty \tau P(\tau) d\tau$, diverge.
- Si $1 < \mu \leq 2$, la valeur moyenne de τ est finie, mais la valeur moyenne de τ^2 , $\int_0^\infty \tau^2 P(\tau) d\tau$, diverge, de même donc que la variance.
- Le théorème de la limite centrale généralisé s'applique à l'une des 2 situations précédentes, c'est à dire au cas où $0 < \mu \leq 2$. Le cas $\mu > 2$, pour lequel les valeurs moyennes de τ et τ^2 sont finies, relève du théorème de la limite centrale habituel.

2.2 - Sommes de Lévy - Problème posé

- Soit
$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (6.3)$$
 une somme de variables aléatoires indépendantes, décrites toutes par la même loi $P(\tau)$, de comportement asymptotique (6.2) avec $0 < \mu \leq 2$. T_N est appelée "somme de Lévy".
- Le problème qui se pose est le suivant : Peut-on, par un changement d'échelle sur T_N , et éventuellement après un recentrage, définir à partir de T_N une nouvelle variable u_N , telle que la distribution de probabilité de u_N soit décrite par une loi indépendante de N , quand $N \rightarrow \infty$?

2.3 - Changement de variables $T_N \rightarrow u_N$

- Nous distinguerons 2 cas, suivant que $0 < \mu \leq 1$ ou que $1 < \mu \leq 2$.

- $\boxed{0 < \mu \leq 1}$ $\langle \tau \rangle$ et $\langle \tau^2 \rangle$ sont infinis.

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N}{N^{1/\mu}} & \text{si } 0 < \mu < 1 \end{cases} \quad (6.4.a)$$

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N}{N \ln N} & \text{si } \mu = 1 \end{cases} \quad (6.4.b)$$

- $\boxed{1 < \mu \leq 2}$ $\langle \tau \rangle$ est fini, mais $\langle \tau^2 \rangle$ est infini

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} & \text{si } 1 < \mu < 2 \end{cases} \quad (6.5.a)$$

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N - N \langle \tau \rangle}{\sqrt{N \ln N}} & \text{si } \mu = 2 \end{cases} \quad (6.5.b)$$

2.4 - Distribution de probabilité de u_N à la limite $N \rightarrow \infty$ - Lois de Lévy

- La nouvelle variable u_N , définie par (6.4) ou (6.5), est distribuée, à la limite $N \rightarrow \infty$, suivant une loi $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ indépendante de N

$$\Pr\{u_a \leq u_N \leq u_b\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{u_a}^{u_b} du \mathcal{L}_\mu^B(u) \quad (6.6)$$

$\mathcal{L}_\mu^B(u)$ est une fonction de u , appelée loi de Lévy, ne dépendant que des paramètres μ et B caractérisant le comportement asymptotique (6.2) de $P(\tau)$.

- $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ peut être exprimée comme la transformée de Laplace inverse d'une fonction simple de s

$$\mathcal{L}_\mu^B(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} ds e^{su - B's^\mu} \quad (6.7)$$

où B' est une constante dépendant de μ et proportionnelle à B , qui sera discutée plus loin.

(i) Si $\mu > 2$, la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ et la variance σ^2 de $P(\tau)$ sont finies. On introduit :

$$u_N = \frac{T_N - N\langle \tau \rangle}{\sigma \sqrt{N}} \quad (6.8)$$

et le théorème de la limite centrale habituel exprime alors que :

$$\Pr \{u_a \leq u_N \leq u_b\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_a}^{u_b} e^{-u^2/2} du \quad (6.9)$$

(ii) Nous nous sommes limités ici au cas où la variable τ est positive (comme il se doit pour un temps de piégeage). Les lois de Lévy s'appliquent aussi à des distributions $P(\tau)$ définies pour $\tau > 0$ et $\tau < 0$. Le comportement asymptotique pour $|\tau| \rightarrow \infty$ est toujours en $1/|\tau|^{1+\mu}$:

$$P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} \frac{B_+}{\tau^{1+\mu}} \quad P(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \frac{B_-}{|\tau|^{1+\mu}} \quad (6.10)$$

La loi de Lévy dépend alors de l'asymétrie $\beta = \frac{B_+ - B_-}{B_+ + B_-}$. Si $\beta = 0$ (loi symétrique) c'est la transformée de Fourier de la loi de Lévy qui a une forme simple.

2.5 - Allure des lois de Lévy

- Considérons tout d'abord un cas particulier, le cas $\mu = 1/2$, où l'on peut donner une expression explicite de $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$

$$\mathcal{L}_{1/2}^B(u) = Y(u) \frac{B}{u^{3/2}} e^{-\frac{\pi B^2}{u}} \quad (6.11)$$

$Y(u)$ étant la fonction saut :

$$Y(u) = 1 \text{ pour } u > 0 \quad Y(u) = 0 \text{ pour } u < 0.$$

- L'allure des variations de $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ avec u est représentée sur la figure 1. Pour $u \gg 1$, $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ décroît lentement en $B/u^{3/2}$ car l'exponentielle tend alors vers $e^{-0} = 1$. Pour $u \rightarrow 0$, l'exponentielle domine et $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ tend vers 0. En fait, toutes les dérivées de $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ s'annulent en $u=0$.

- L'allure des variations de la figure 1 demeure valable pour toutes les lois $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ avec $0 < \mu < 1$.

On a toujours une décroissance très lente quand $u \rightarrow \infty$, en loi de puissance

$$\mathcal{L}_\mu^B(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{B}{u^{1+\mu}} \quad \text{si } 0 < \mu < 1 \quad (6.12)$$

Notons que cette décroissance est exactement la même que celle de la distribution élémentaire $P(\tau)$, donnée en (6.2).

Pour $u \rightarrow 0$, $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ tend très vite vers 0, toutes les dérivées s'annulant en $u=0$ [$\mathcal{L}_\mu^B(u)$ varie en $u^{\frac{\mu-2}{2(1-\mu)}} \exp\{-A_\mu/u^{\frac{\mu}{1-\mu}}\}$ où A_μ est une constante].

- Pour $1 < \mu < 2$, $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ est non nul, aussi bien pour $u > 0$ que pour $u < 0$, puisque le changement de variables (6.5.a) a centré u_N autour de la valeur moyenne de T_N .

$\mathcal{L}_\mu^B(u)$ a la forme d'une courbe en cloche, centrée en $u=0$, ayant une largeur à mi-hauteur de l'ordre de $B^{1/\mu}$, et des ailes tendant rapidement vers 0 quand $|u| \rightarrow \infty$.

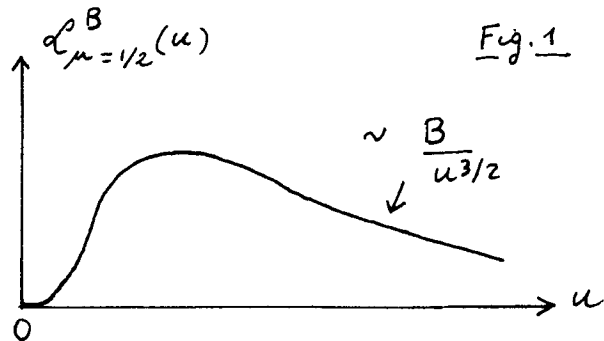


Fig. 1

③ Propriétés importantes des sommes de Lévy pour $0 < \mu < 1$

Nous insistons ici plus particulièrement sur le cas $0 < \mu < 1$, car c'est dans ce cas que les sommes de Lévy T_N croissent très vite avec N et présentent des propriétés tout à fait inhabituelles.

3-1 Dépendance en N d'une somme de Lévy T_N

- La forme (6.4.a) du changement de variables $T_N \rightarrow u_N$ et le fait que u_N soit distribuée suivant une loi indépendante de N quand $N \rightarrow \infty$ montrent que T_N varie en $N^{1/\mu}$ quand $N \rightarrow \infty$. Une telle variation est beaucoup plus rapide que celle qui apparaîtrait si τ avait une valeur moyenne finie $\langle \tau \rangle$, et qui serait en $N \langle \tau \rangle$. Par exemple, si $\mu = 1/2$, T_N varie en N^2 . Si $\mu = 1/4$, T_N varie en N^4 .
- On peut rendre le résultat précédent "plausible" (sans le démontrer rigoureusement) en utilisant la forme, établie dans l'appendice B page V-11, de la transformée de Laplace $\tilde{P}(s)$ d'une distribution normalisée $P(\tau)$ variant asymptotiquement en $\frac{B}{\tau^{1+\mu}}$

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad \longrightarrow \quad \tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu \quad (6.13)$$

On sait que, quand on compose 2 variables aléatoires indépendantes τ_1 et τ_2 , de même loi $P(\tau)$, la somme $\tau_1 + \tau_2$ est distribuée suivant une loi $P(\tau) \otimes P(\tau)$ qui est le produit de convolution de $P(\tau)$ par elle-même. Ce résultat se généralise de proche en proche : la somme de Lévy $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ est distribuée suivant une loi $P(\tau) \otimes P(\tau) \dots \otimes P(\tau) = P_N(T_N)$ égale au produit de convolution de $P(\tau)$ par elle-même N fois. La transformée de Laplace de $P_N(T_N)$ est donc tout simplement $[\tilde{P}(s)]^N$, et on déduit alors de (6.13) que :

$$\tilde{P}_N(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) N s^\mu \quad (6.14)$$

Changeons alors d'échelle sur T_N : $T_N \rightarrow T'_N = a_N T_N$. La nouvelle variable T'_N est distribuée suivant $P'_N(T'_N)$ telle que $P'_N(T'_N) dT'_N = P_N(T_N) dT_N$. En utilisant la définition de la transformation de Laplace, on montre aisément que si $\tilde{P}_N(s)$ est la transformée de Laplace de $P_N(T_N)$, la transformée de Laplace de $P'_N(T'_N)$ est $\tilde{P}'_N(s') = \tilde{P}_N(a_N s')$

$$P_N(T_N) \longleftrightarrow \tilde{P}_N(s) \quad \implies \quad P'_N(T'_N) \longleftrightarrow \tilde{P}'_N(s') = \tilde{P}_N(a_N s') \quad (6.15)$$

La comparaison de (6.14) et (6.15) montre alors que le comportement près de $s' = 0$ de la transformée de Laplace $\tilde{P}'_N(s')$ de $P'_N(T'_N)$ est

$$\tilde{P}'_N(s') \underset{s' \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) N a_N^\mu s'^\mu \quad (6.16)$$

Comment choisir alors a_N pour que ^(le) comportement pour $T'_N \gg 1$ de la distribution de la nouvelle variable T'_N soit indépendant de N ? Les termes dominants de la transformée de Laplace $\tilde{P}'_N(s')$ doivent être alors indépendants de N au voisinage de $s' = 0$, ce qui implique d'après (6.16) qu'il faut prendre $N a_N^\mu = 1$, c-à-d $a_N = 1/N^{1/\mu}$. C'est donc la variable $T'_N = a_N T_N = T_N / N^{1/\mu}$ qui a un comportement indépendant de N pour $T'_N \gg 1$.

- Le raisonnement précédent nous a permis de justifier le changement de variable (6.4.a), en montrant qu'il est nécessaire si l'on veut que la nouvelle variable $u_N = T'_N$ ait un comportement indépendant de N pour $u_N \gg 1$. Le théorème de la limite centrale généralisé (que nous ne démontrons pas ici) apporte plusieurs éléments supplémentaires. Tout d'abord, il indique que le comportement de la nouvelle variable définie en (6.4.a) est indépendant de N à la limite $N \rightarrow \infty$ aussi bien pour $u_N \gg 1$ que pour $u_N \ll 1$ ou quelconque. C'est donc toute la transformée de Laplace de $P'_N(T'_N)$, et non pas seulement les termes dominants au voisinage de $s'=0$, qui devient indépendante de N à la limite $N \rightarrow \infty$. De plus, un tel théorème donne l'expression explicite de cette transformée de Laplace. En explicitant le coefficient B' de (6.7) donné dans la référence [1], on obtient

$$\tilde{\mathcal{L}}_\mu^B(s') = \int_0^\infty \mathcal{L}_\mu^B(u) e^{-u s'} du = \exp \left\{ - \frac{\pi B}{\mu \Gamma(\mu) \sin \pi \mu} s'^\mu \right\} \quad (6.17)$$

Le développement de l'exponentielle (6.17) au voisinage de $s' = 0$ donne

$$\tilde{\mathcal{L}}_\mu^B(s') \underset{s' \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{\pi B}{\mu \Gamma(\mu) \sin \pi \mu} s'^\mu \quad (6.18)$$

que l'on peut réécrire

$$\tilde{\mathcal{L}}_\mu^B(s') \underset{s' \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s'^\mu \quad (6.19)$$

si l'on utilise la relation $\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi \mu}$ entre fonctions gamma. L'équation (6.19) n'est autre que (6.16) si l'on choisit $N a_N^\mu = 1$.

- Notons enfin que la comparaison de (6.13) et (6.19) montre que la décroissance de $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ pour $u \gg 1$ est identique à celle de $P(\tau)$ pour $\tau \gg 1$, résultat énoncé plus haut en (6.12).

3.2 - Ordre de grandeur du terme le plus grand dans une somme de Lévy

Terme le plus grand dans N tirages successifs d'une loi quelconque

- Soit $P(\tau)$ une distribution normalisée quelconque. Faisons N tirages successifs indépendants donnant les valeurs $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, et posons nous la question suivante : Quelle est la probabilité $P(\tau_M)$ d'obtenir lors d'un tirage une valeur $\tau > \tau_M$, tous les autres tirages fournissant des valeurs inférieures à τ_M ?

- Introduisons la probabilité

$$\pi_M = \int_{\tau_M}^\infty P(\tau) d\tau \quad (6.20)$$

d'obtenir une valeur supérieure à τ_M lors d'un tirage quelconque. La probabilité d'obtenir une valeur inférieure à τ_M est $1 - \pi_M$. Comme le tirage donnant $\tau > \tau_M$ peut être le premier, ou le second, ... ou le N ième, on obtient pour la probabilité $P(\tau_M)$

$$P(\tau_M) = N \pi_M (1 - \pi_M)^{N-1} \quad (6.21)$$

- L'équation (6.21) permet alors de calculer simplement la valeur de τ_M , et donc celle de π_M , qui maximise $P(\tau_M)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_M} P(\tau_M) &= \left\{ \frac{d}{d\pi_M} [N \pi_M (1 - \pi_M)^{N-1}] \right\} \times \frac{d\pi_M}{d\tau_M} \\ &= -N (1 - \pi_M)^{N-2} (1 - N \pi_M) P(\tau_M) \end{aligned} \quad (6.22)$$

qui montre que $P(\tau_M)$ est maximum pour $\pi_M = \frac{1}{N}$

$$P(\tau_M) \text{ maximal pour } \pi_M = \int_{\tau_M}^{\infty} P(\tau) d\tau = \frac{1}{N} \quad (6.23)$$

- La valeur de τ_M donnée par (6.23), c'est à dire par $\int_{\tau_M}^{\infty} P(\tau) d\tau = 1/N$, donne l'ordre de grandeur du terme le plus grand obtenu lors de N tirages successifs indépendants. Comme π_M vaut $1/N$, on a une chance appréciable d'obtenir une telle valeur, puisque $N \pi_M = 1$.

En d'autres termes, on peut dire que, si l'on fait N tirage successifs indépendants, on a une chance importante que le terme le plus grand obtenu soit de l'ordre de ou supérieur à τ_M où τ_M est défini par $\int_{\tau_M}^{\infty} P(\tau) d\tau = 1/N$

Comparaison des distributions larges et étroites

Comment varie τ_M avec N ?

- Commençons par prendre une distribution étroite, par exemple

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} \quad (6.24)$$

l'équation (6.23), donne alors immédiatement

$$\tau_M = \tau_0 \ln N \quad (6.25)$$

En augmentant le nombre de tirage, on n'augmente donc que très lentement la valeur maximale des résultats obtenus. La croissance serait encore beaucoup plus lente si l'on prenait une gaussienne $e^{-\tau^2/\tau_0^2}$.

- Prenons maintenant une distribution large en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$, par exemple

$$P(\tau) = Y(\tau - \tau_0) \cdot \frac{\mu \tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}} \quad (6.26)$$

où Y est la fonction sans. L'équation (6.23) donne alors

$$\tau_M = \tau_0 N^{1/\mu} \quad (6.27)$$

Au lieu d'avoir une croissance logarithmique, comme en (6.25), on a maintenant une croissance en $N^{1/\mu}$, plus rapide que N ! τ_M croît aussi vite avec N que la somme de Lévy elle-même.

- Le calcul précédent montre qu'au bout de N tirages, on explore peu la région $\tau \gg \tau_M$. On peut donc calculer une valeur moyenne de τ en trouvant la distribution $P(\tau)$ après τ_M .

(Nous trouvons, une telle distribution conduirait à $\langle \tau \rangle = \infty$). On peut ainsi estimer la somme de Lévy $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ par $N \langle \tau \rangle_{\text{trouvé}}$ où $\langle \tau \rangle_{\text{trouvé}}$ est calculé avec la distribution trouvée.

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \simeq N \int_0^{T_M} \tau P(\tau) d\tau \quad (6.28)$$

A partir de (6.26) et (6.27), un calcul simple donne alors

$$T_N \simeq \frac{\mu}{1-\mu} T_0 N^{1/\mu} \quad (6.29)$$

qui est du même ordre de grandeur que T_M donné en (6.27).

On obtient ainsi un résultat remarquable : Dans une somme de Lévy T_N de N termes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ obéissant à la même loi $P(\tau)$, de comportement asymptotique $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$, le terme le plus grand de la somme est de l'ordre de grandeur de la somme elle-même.

3.3 - Importance des événements rares - Vols de Lévy.

- Considérons une particule effectuant une marche au hasard dont les pas τ_i (avec $\tau_i > 0$) sont distribués suivant une loi large, d'exposant $0 < \mu < 1$, par exemple (6.26). D'après les résultats du § 3.2 précédent, le déplacement total de la particule après N pas est "dominé" par un très petit nombre de pas dont l'amplitude est de l'ordre de grandeur du déplacement total. Une telle marche au hasard, dominée par un petit nombre de pas, est appelée "vol de Lévy". Nous avons déjà rencontré de telles situations sur la figure 12 du cours IV (page IV-8) représentant une simulation Monte-Carlo du refroidissement VSCPT en configuration 5^+-5^- . C'est d'ailleurs le caractère "anormal" de la marche au hasard le long de l'axe des temps obtenue après de telles simulations Monte-Carlo qui a suggéré de faire un rapprochement entre le refroidissement subrecoil et les vols de Lévy [Ref [4]].

- La thèse de François Bardou [ref. [5]] contient des figures illustrant très clairement les propriétés essentielles des vols de Lévy. Pour rendre plus visible la marche, on suppose que la particule se déplace dans un plan (marche à 2 dimensions). Chaque pas, d'amplitude τ_i ($i=1, 2, \dots, N$), se fait dans une direction aléatoire, d'angle θ_i équipartie entre 0 et 2π . Les modules τ_i de chaque pas sont distribués suivant la loi (6.26). On compare les cas $\mu > 2$ (distributions étroites) et $0 < \mu < 1$ (distributions larges).

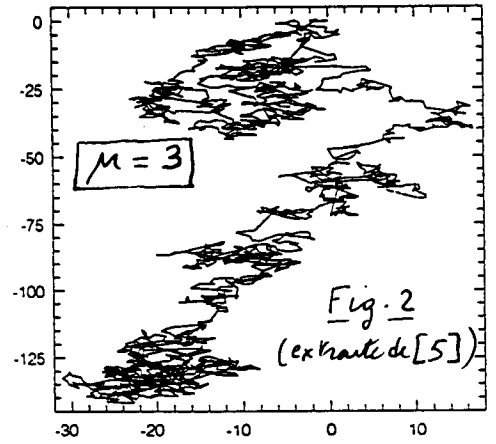
Pour tirer au sort N valeurs de τ_i ($N=2000$) distribuées suivant la loi (6.26), il est commode d'associer à τ une autre variable x , la relation $\tau(x)$ étant choisie de telle manière que, si x est équipartie entre 0 et 1, τ est distribué entre T_0 et $+\infty$ suivant (6.26). Il est en effet plus simple de tirer au hasard un nombre entre 0 et 1 qu'une variable aléatoire distribuée suivant une loi $P(\tau)$. On peut vérifier que si

$$\tau(x) = \frac{T_0}{(1-x)^{1/\mu}} \quad (6.30)$$

un tel objectif est atteint puisqu'on a bien $P(\tau) |d\tau| = 1 |dx|$.

Quelle que soit la valeur de μ choisie, on effectue donc un tirage au sort de $N=2000$ nombres θ_i et x_i équiparties entre 0 et 2π , et 0 et 1, respectivement.

La figure 2, extraite de [5], représente les résultats obtenus pour $\mu = 3$, c-à-d pour une distributions $P(\tau)$ étroite. On retrouve bien l'allure d'un mouvement Brownien habituel.



Pour la même valeur de τ_0 et la même procédure de tirage de $N = 2000$ couples de nombres aléatoires (θ_i, x_i) , la figure 3a (toujours extraite de [5]), représente les résultats obtenus pour $\mu = 1/2$. La différence est spectaculaire. Notez tout d'abord le changement d'échelle par rapport à la figure 2. Le déplacement total de la particule est beaucoup plus important, ce qui montre bien qu'une somme de Lévy croît plus vite que N . Par ailleurs, bien qu'on ait le même nombre total de pas ($N = 2000$), on n'en distingue clairement que 5 ou 6. La raison est que 5 ou 6 pas sont si grands (notamment l'un d'entre eux) que, pour les représenter, il faut choisir une échelle qui "écrase" complètement les 1994 autres! En fait, si l'on agrandit la zone représentée par un cercle sur la figure 3a, on obtient la figure 3b où l'on voit apparaître des pas plus petits. Mais là encore, la marche au hasard a la même allure, à savoir une domination par un petit nombre de pas. Et il en est de même encore quand on agrandit le cercle de la figure 3b pour obtenir la figure 3c, et ainsi de suite.

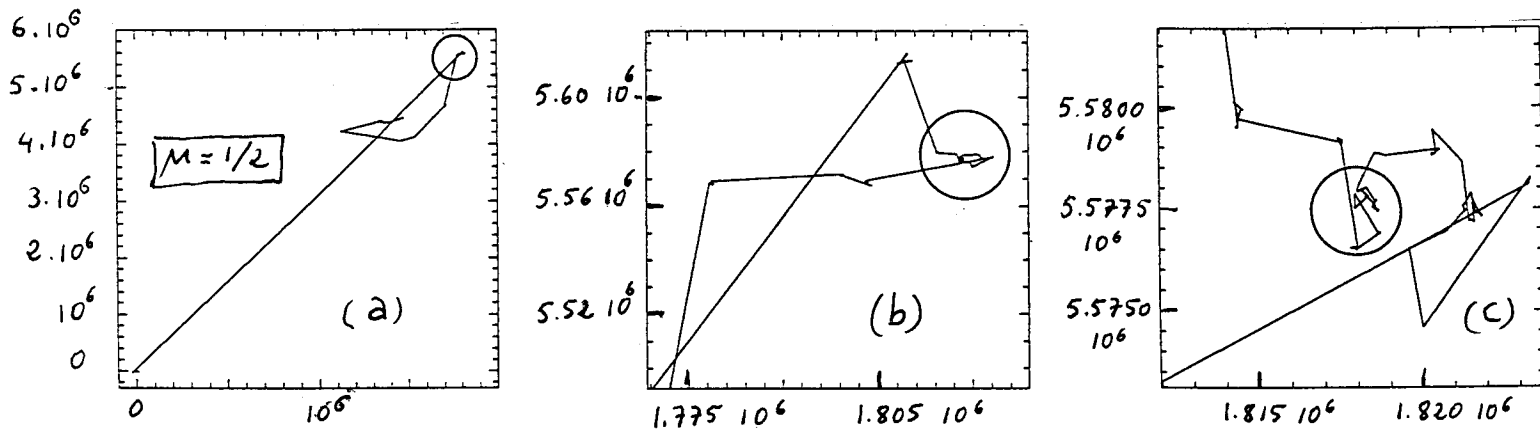


Fig. 3 (extraite de [5])

- En conclusion, on peut donc dire que les vols de Lévy sont des marches aléatoires "anormales", dominées par un petit nombre d'événements rares, présentant un aspect auto-similaire quelle que soit l'échelle utilisée.

3.4 Importance des fluctuations

- Il ressort clairement de la discussion précédente que les fluctuations d'une somme de Lévy T_N sont du même ordre de grandeur que la somme elle-même. On ne diminue pas les fluctuations en augmentant le nombre de termes de la somme. Le comportement d'ensemble fluctue autant que le comportement individuel.

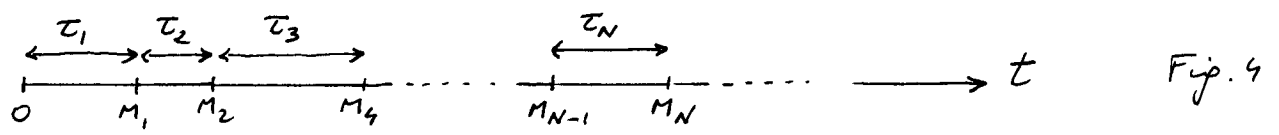
- Une telle situation diffère radicalement de celle rencontrée pour une loi étroite, où les fluctuations de la somme décroissent en valeur relative comme $1/\sqrt{N}$. Une telle différence est due au fait que la loi de Lévy $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ ne dépend que du comportement asymptotique de la loi élémentaire $P(\tau)$ pour $\tau \rightarrow \infty$, alors que la loi normale ne dépend que des 2 premiers moments de $P(\tau)$.

④ - Processus ponctuel associé à la distribution $P(\tau)$.

Loi d'arrosage

4-1 Position du problème

- Considérons une particule qui progresse le long d'un axe t , qui est ici un axe des temps, mais qui pourrait tout aussi bien être un axe des positions. Cette progression se fait par des sauts successifs $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ indépendants les uns des autres et distribués tous suivant la même loi $P(\tau)$. Soient $M_1, M_2, M_3, \dots, M_N, \dots$ les positions successives de la particule, d'abscisses $\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \dots, T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i, \dots$ (Fig. 4)



N varie de 1 à $+\infty$. On obtient ainsi à partir de $P(\tau)$ un ensemble aléatoire infini et discret de points sur l'axe t (processus ponctuel).

- On considère plusieurs réalisations différentes de cet ensemble aléatoire de points et on se pose la question suivante : quelle est la probabilité $A(t)dt$ de trouver un point dans un petit intervalle $[t, t+dt]$? En d'autres termes, quelle est la densité de points sur l'axe t ? On peut également considérer $A(t)$ comme une "loi d'arrosage" associée à la distribution $P(t)$.

- Notons que la probabilité $A(t)dt$ ainsi définie ne présume en rien du nombre de sauts que la particule a dû effectuer avant d'arriver dans l'intervalle $[t, t+dt]$. On s'intéresse à la probabilité de la trouver dans cet intervalle, quel que soit le nombre de sauts effectués auparavant. Il faut donc calculer la probabilité $A_N(t)$ pour que le point M_N de la figure 4 soit dans l'intervalle $[t, t+dt]$, puis sommer $A_N(t)$ sur N de 1 à $+\infty$.

4-2 Cas d'une distribution $P(\tau)$ étroite

- Commençons par étudier le cas d'une distribution $P(\tau)$ étroite ayant une valeur moyenne $\bar{\tau}$ et une variance σ^2 finies. D'après (6.8) et (6.9), la probabilité pour que le point M_N de la figure 10 soit dans l'intervalle $[t, t+dt]$ est $A_N(t)dt$, où

$$A_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{(t - N\bar{\tau})^2}{2N\sigma^2}} \quad (6.31)$$

Pour obtenir $A(t)$, il faut sommer (6.31) sur N . En remplaçant la somme par une intégrale, on obtient

$$A(t) = \int_1^{\infty} dN \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{(t - N\bar{\tau})^2}{2N\sigma^2}} \quad (6.32)$$

- Soit N_0 la valeur de N telle que la gaussienne de (6.32) soit centrée en t

$$t = N_0 \bar{\tau} \quad (6.33)$$

La gaussienne a alors une largeur $\sigma \sqrt{N_0}$. Posons

$$N = N_0 + n \quad (6.34)$$

On peut réécrire (6.32) sous la forme

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dn \frac{1}{\sqrt{2\pi(N_0+n)\sigma^2}} e^{-\frac{n^2 \bar{\tau}^2}{2(N_0+n)\sigma^2}} \quad (6.35)$$

- Soit δn la quantité dont n doit varier pour que le centre de la gaussienne se déplace d'une quantité de l'ordre de sa largeur $\sqrt{N_0} \sigma$ quand $n=0$. On a

$$\delta n \bar{\tau} \sim \sqrt{N_0} \sigma \quad (6.36)$$

De (6.33) et (6.36), on déduit alors

$$\frac{\delta n}{N_0} \sim \frac{1}{\sqrt{N_0}} \frac{\sigma}{\bar{\tau}} \sim \sqrt{\frac{\sigma^2}{t \bar{\tau}}} \quad (6.37)$$

ce qui montre que pour t suffisamment grand ($t \gg \sigma^2 / \bar{\tau}$), on a $\delta n \ll N_0$, ce qui permet alors de remplacer $N_0 + n$ par N_0 dans (6.35). L'intégrale donnant $A(t)$ est alors élémentaire

$$A(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 \sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dn e^{-\frac{n^2 \tau^2}{2 N_0 \sigma^2}} = \frac{1}{\bar{\tau}} \quad (6.38)$$

- Le résultat (6.38) est satisfaisant physiquement. Pour t suffisamment grand, on trouve que $A(t)$ tend vers une constante indépendante de t et égale à $1/\bar{\tau}$. Comme la distance moyenne entre 2 points successifs est égale à $\bar{\tau}$, il est normal de trouver une densité moyenne de points constante et égale à $1/\bar{\tau}$.

4.3 Cas d'une distribution large en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$

- Il faut maintenant utiliser (6.4) et (6.6) pour obtenir $A_N(t)$ qui vaut

$$A_N(t) = \frac{1}{N^{1/\mu}} \mathcal{L}_\mu^B \left(\frac{t}{N^{1/\mu}} \right) \quad (6.39)$$

La somme sur N de (6.39) et le remplacement de cette somme par une intégrale conduisent à :

$$A(t) = \int_1^\infty \frac{dN}{N^{1/\mu}} \mathcal{L}_\mu^B \left(\frac{t}{N^{1/\mu}} \right) \quad (6.40)$$

Le changement de variable $u = t/N^{1/\mu}$ permet de transformer (6.40) en

$$A(t) = \frac{\mu}{t^{1-\mu}} \int_0^t du u^{-\mu} \mathcal{L}_\mu^B(u) \quad (6.41)$$

- Si l'on pose
$$P(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{B}{t^{\mu+1}} = \frac{\mu \tau_B^\mu}{t^{\mu+1}} \quad (6.42)$$

on peut vérifier que le maximum de la courbe $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ est atteint pour une abscisse de l'ordre de τ_B [Par exemple, pour $\mu = 1/2$, on peut dériver l'expression 6.11 donnant $\mathcal{L}_{1/2}^B$ et utiliser $B = \frac{1}{2} \tau_B^{1/2}$]. Si $t \gg \tau_0$, on peut alors remplacer la borne supérieure de l'intégrale de (6.41) par $+\infty$. On voit ainsi apparaître le "moment" d'ordre $-\mu$ de la distribution $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ qui est connu [voir Ref [1], Equation (B.30)]

$$\langle u^{-\mu} \rangle = \int_0^\infty du u^{-\mu} \mathcal{L}_\mu^B(u) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi B} \quad (6.43)$$

On en déduit, compte tenu de $B = \mu \tau_B^\mu$

$$A(t) = \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} \frac{1}{t^{1-\mu}} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \frac{1}{\tau_B} \left(\frac{\tau_B}{t} \right)^{1-\mu}$$

On trouve que $A(t)$ est homogène à l'inverse d'un temps, comme en (6.38), et décroît, quand t augmente, comme $(\tau_B/t)^{1-\mu}$.

- La décroissance de $A(t)$ avec t est une autre manifestation du fait que, au fur et à mesure que t croît, des intervalles de temps τ de plus en plus grands peuvent apparaître. Il se produit donc moins d'événements aux temps longs qu'aux temps courts. La densité des points associés à ces événements décroît. L'arrosage est moins dense.
- On peut dire encore que le fait que $A(t)$ dépende de t montre qu'il n'y a plus d'invariance du processus par translation dans le temps. Le processus a une "histoire". On pourrait en étudiant $A(t)$ déterminer à quelle date il a commencé.

Remarque

Des calculs analogues peuvent être faits pour des distributions variant en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $1 < \mu < 2$, pour lesquelles $\bar{\tau}$ est fini mais σ est infini (voir Ref. [5]). On trouve dans ce cas que, comme pour les distributions étroites, $A(t)$ tend, pour t suffisamment grand, vers une constante égale à $1/\bar{\tau}$.

References

- [1] - J-P Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. 195, 127 (1990)
- [2] - B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison Wesley, 1954
- [3] - P. Lévy, Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires, Gauthier-Villars, 1954.
- [4] - F. Bardou, J.P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji Phys. Rev. Lett. 72, 203 (1994)
- [5] - F. Bardou, Thèse de doctorat, Paris 1995.