

① Introduction

1-1 Revue de quelques types d'effet Sisyphe déjà connus

Principe de l'effet Sisyphe

- Système atomique avec des niveaux d'énergie modulés spatialement.
- L'atome arrive dans un tel niveau, y reste un certain temps et en repart.
- Entre l'instant d'arrivée et l'instant de départ, l'atome gravit en moyenne plus de collines de potentiel qu'il n'en descend, ce qui le ralentit.
- L'énergie potentielle ainsi gagnée est ensuite dissipée sous forme de rayonnement.

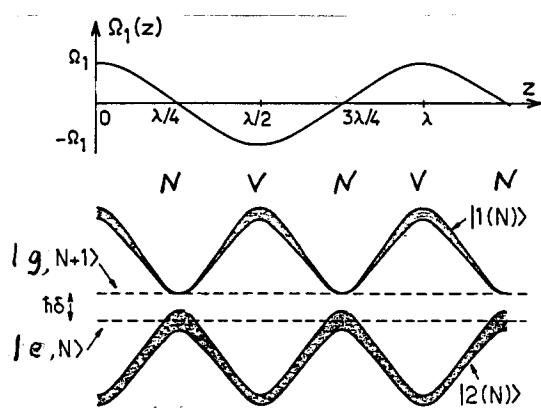
1^{er} exemple : effet Sisyphe à haute intensité (ou mélanges "bleues") [1-2]

Fig. 1

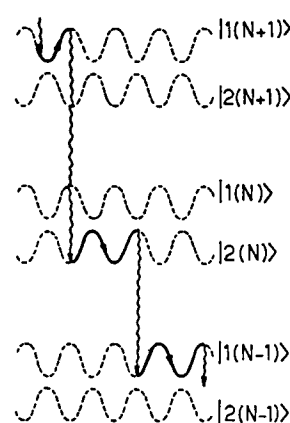


Fig. 2

- Atome à 2 niveaux e, g dans une onde stationnaire laser intense désaccordée vers le bleu ($\delta = \omega_L - \omega_A > 0$)
- Les énergies des niveaux habillés du système "atome + photons laser" sont modulées spatialement (Fig. 1). Aux nœuds N , la fréquence de Rabi $\Omega_1(z)$ est nulle et les états habillés $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ coïncident avec les états non couplés $|g, N+1\rangle$ et $|e, N\rangle$, séparés par $\hbar\delta$. $|g, N+1\rangle$ est au dessus de $|e, N\rangle$ puisque $\delta > 0$. Aux ventres V , la fréquence de Rabi est maximale en module, et la séparation entre $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ est maximale.
- Aux nœuds, $|1(N)\rangle = |g, N+1\rangle$ est stable radiativement et n'a pas de largeur, alors que $|2(N)\rangle = |e, N\rangle$ est instable et a la largeur naturelle Γ de e . Aux ventres V , si $|\Omega_1| \gg \delta$, les 2 niveaux habillés $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ contiennent la même proportion de l'état instable $|e, N\rangle$ et ont la même largeur $\Gamma/2$.
- Quel que soit le niveau habillé sur lequel on se déplace le long de Oz , la largeur radiative est la plus grande, et donc le temps de départ est le plus grand, au sommet des collines de potentiel.

↳ Dans la cascade radiative de l'atome habillé en mouvement le long de l'axe Oz , l'atome arrive dans un niveau habillé préférentiellement au fond d'une vallée et en repart au sommet d'une colline (Fig. 2)

2^{ème} exemple : effet Sisyphe à basse intensité - Refroidissement sub-Doppler [3]

- Pompage optique et déplacements lumineux dépendant de la polarisation lumineuse.
- En présence d'une modulation de polarisation (cas de la configuration

lin $\perp$ lin de la Fig. 3a), les déplacements lumineux des 2 sous-niveaux $g_{\pm 1/2}$ sont modulés spatialement de même que les temps de pompage optique d'un sous-niveau à l'autre.

- Les corrélations entre ces 2 modulations peuvent être telles que l'atome en mouvement gravite plus de collines de potentiel qu'il n'en descend.

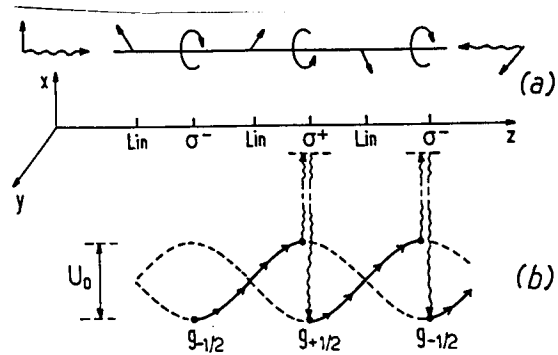


Fig. 3

3^{ème} exemple : effet Sisyphes assisté par champ magnétique [4-7]

Effet "MASE" ("Magnetically Assisted Sisyphus Cooling") ou "MILC" ("Magnetically Induced Laser Cooling").

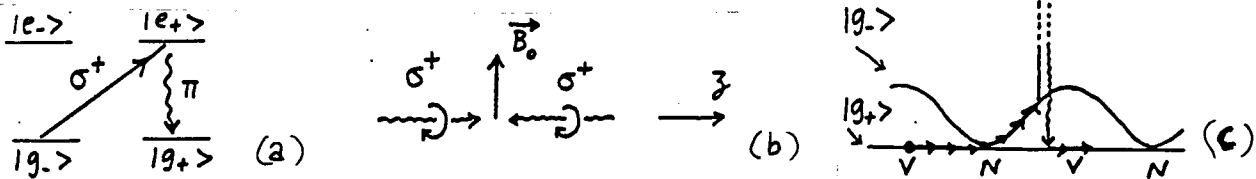


Fig. 4

- Atome avec une transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 1/2$ (Fig. 4a) dans une onde laser stationnaire σ^+ (Fig. 4b), sans gradient de polarisation. Les atomes sont pompés optiquement dans $|g_{+}\rangle$ (Fig. 4a). Le sous-niveau $|g_{+}\rangle$ n'est pas déplacé, alors que le déplacement de $|g_{-}\rangle$, positif si $\delta = \omega_L - \omega_A > 0$, est modulé spatialement.
- On ajoute un petit champ magnétique statique $\vec{B}_0$ perpendiculaire aux ondes laser (Fig. 4b).
- Le mélange entre les fonctions d'ondes produit par $\vec{B}_0$ est maximal au voisinage des noeuds N. Un atome en mouvement le long de Oz et initialement dans $|g_{+}\rangle$ peut donc passer dans $|g_{-}\rangle$ au voisinage d'un noeud. Il gravite alors la colline de potentiel en ayant une probabilité de plus en plus grande, quand il se rapproche d'un ventre V, d'être repompé dans $|g_{+}\rangle$.

Dans les 3 exemples précédents, la dissipation d'énergie est assurée par les photons émis spontanément qui ont, en moyenne, une énergie plus grande que les photons laser absorbés.

1.2 Buts de ce cours

- Montrer qu'un refroidissement Sisyphes peut coexister avec un refroidissement VSCPT subrecoil utilisant des états noirs sélectifs en vitesse. Un tel résultat est important car la friction associée à l'effet Sisyphes augmente considérablement l'efficacité du remplissage des états noirs. La proportion d'atomes refroidis dans le piège subrecoil peut être alors beaucoup plus importante, surtout à 2D et 3D.
- Identifier, sur un modèle semi-classique simple les mécanismes physiques permettant à l'atome d'effectuer des transitions de l'état non couplé vers l'état couplé dont l'énergie est modulée spatialement.
- Evaluer l'ordre de grandeur de la force de friction et étudier sa dépendance vis à vis des divers paramètres.
- Donner un aperçu de ^{quelques} approches quantiques, indispensables pour étudier la phase de refroidissement VSCPT.
- Références : [8-10]

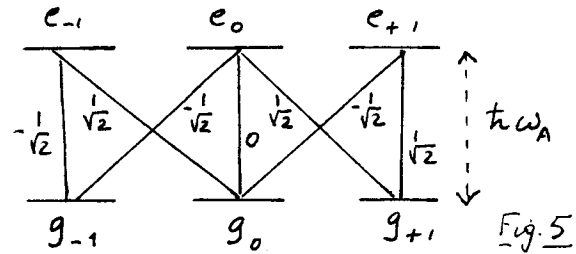
② Le modèle

2.1 Transition atomique et configuration laser

- Transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$

Intérêt d'un tel choix : on sait [voir § 8] qu'il y a toujours un état parfaitement noir quel que soit le nombre de dimensions.

Pour toute configuration laser, il y aura toujours un refroidissement VSCPT.



- de même amplitude E et fréquence ω_L

2 ondes laser se propageant en sens opposés le long de l'axe Oz avec des polarisations linéaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ faisant des angles $+\theta/2$ et $-\theta/2$, respectivement, avec l'axe $\hat{y}$.

Configuration "lin ∇ lin"

Quand $\theta \neq \pi/2$, l'intensité totale est modulée spatialement le long de $\hat{z}$.

Il en est de même des déplacements lumineux de certains niveaux et un effet Sisyphus peut apparaître.

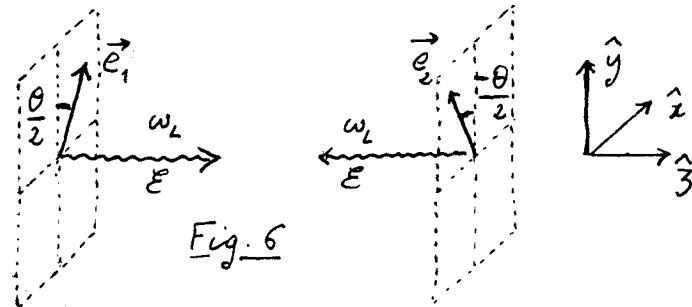


Fig. 6

- Expression du champ laser

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}^{(+)}(z) e^{-i\omega_L t} + c.c. \quad (2.1)$$

Si l'on prend

$$\vec{E}^{(+)}(z) = \frac{E}{\sqrt{2}} \left[\cos(kz + \frac{\theta}{2}) \vec{e}_{+1} + \cos(kz - \frac{\theta}{2}) \vec{e}_{-1} \right] \quad (2.2)$$

avec $\vec{e}_{\pm 1} = \mp (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) / \sqrt{2}$ (2.3)

on trouve $\vec{E}^{(+)}(z) = -i \frac{E}{2} \left[\vec{e}_1 e^{ikz} + \vec{e}_2 e^{-ikz} \right]$ (2.4)

avec $\vec{e}_1 = \vec{e}_x \sin \frac{\theta}{2} + \vec{e}_y \cos \frac{\theta}{2}$ $\vec{e}_2 = -\vec{e}_x \sin \frac{\theta}{2} + \vec{e}_y \cos \frac{\theta}{2}$ (2.5)

ce qui correspond bien à la configuration de la figure 6.

D'après (2.2), on peut encore considérer la configuration laser comme une superposition de 2 ondes laser stationnaires σ^+ et σ^- , déphasées l'une par rapport à l'autre.

2.2 Approximations

- On se limite ici à un problème à 1 dimension.
- Les variables externes du centre de masse sont traitées classiquement. Traitement valable si $\lambda_{\text{de Broglie}} \ll \lambda_{\text{laser}}$, c-à-d. tant que $Sp \gg \hbar k$. On désire étudier le pré-refroidissement Sisyphus précédant l'apparition du régime subrecoil.
- Vitesse v imposée. On "tire" l'atome à vitesse fixe v et on cherche à calculer la force moyenne qu'il peut exercer sur lui pour lui donner un tel mouvement. On néglige ainsi les changements de vitesse aléatoires communiqués à l'atome par les photons émis spontanément, phénomène qui joue un rôle très important dans le régime subrecoil (diffusion de l'atome vers l'état noir).
- On interprétera les phénomènes physiques à la limite des grands désaccords

$$\text{Désaccord } \delta = \omega_L - \omega_A \gg \text{largeur naturelle } \Gamma \quad (2.6)$$

- On se limite aux 3 sous-niveaux Zeeman g_{-1}, e_0, g_{+1} , car le sous-niveau g_0 est très rapidement vidé par pompage optique et les atomes ne peuvent ensuite y revenir à cause de la nullité du coefficient de Clebsch-Gordan $g_0 \leftrightarrow e_0$.

Intensité lumineuse totale

- Dans (2.2), les 2 vecteurs polarisation $\vec{e}_{\pm}$, sont orthogonaux. L'intensité lumineuse totale varie donc comme la somme des carrés des 2 coefficients de $\vec{e}_{\pm}$. On introduira donc le paramètre sans dimension :

$$D(z) = \cos^2(kz + \frac{\theta}{2}) + \cos^2(kz - \frac{\theta}{2}) = 1 + \cos\theta \cos 2kz \quad (2.7)$$

- Comme $D(z)$, l'intensité totale est modulée spatialement avec une période spatiale $2\pi/2k = \lambda/2$. $D(z)$ oscille entre une valeur minimale $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ atteinte pour $\cos 2kz = -1$ ($z = \lambda/4, 3\lambda/4 \dots$) et une valeur maximale $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ atteinte pour $\cos 2kz = 1$ ($z = 0, \lambda/2 \dots$)

Hamiltonien d'interaction $V_{AL}(z)$ entre atome et laser

En se limitant aux 3 sous-niveaux g_{-1} , e_0 et g_{+1} , et en utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 5, on obtient :

$$V_{AL}(z) = \frac{\hbar\Omega}{2} \left[|e_0\rangle\langle g_{-1}| \cos(kz + \frac{\theta}{2}) + |e_0\rangle\langle g_{+1}| \cos(kz - \frac{\theta}{2}) \right] e^{-i\omega_L t} \quad (2.8)$$

où $\Omega = -\frac{1}{\hbar} \mathcal{D} \mathcal{E}$ (2.9)

est la fréquence de Rabi associée à l'amplitude $\mathcal{E}$ du champ et $\mathcal{D}$ à l'élément de matrice réduit $\mathcal{D}$ du dipôle atomique.

Etat couplé $|\Psi_c(z)\rangle$ et état non couplé $|\Psi_{nc}(z)\rangle$

- La forme (2.8) de $V_{AL}(z)$ suggère d'introduire les 2 combinaisons linéaires orthogonales suivantes de $|g_{+1}\rangle$ et $|g_{-1}\rangle$:

$$\begin{cases} |\Psi_c(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{D(z)}} \left[\cos(kz - \frac{\theta}{2}) |g_{+1}\rangle - \cos(kz + \frac{\theta}{2}) |g_{-1}\rangle \right] \end{cases} \quad (2.10.a)$$

$$\begin{cases} |\Psi_{nc}(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{D(z)}} \left[\cos(kz + \frac{\theta}{2}) |g_{+1}\rangle + \cos(kz - \frac{\theta}{2}) |g_{-1}\rangle \right] \end{cases} \quad (2.10.b)$$

Avec ces nouveaux états, $V_{AL}(z)$ peut être réécrit sous la forme

$$V_{AL}(z) = \frac{\hbar\Omega(z)}{2} \left[|e_0\rangle\langle\Psi_c(z)| e^{-i\omega_L t} + |\Psi_c(z)\rangle\langle e_0| e^{i\omega_L t} \right] \quad (2.11)$$

où $\Omega(z) = \Omega \sqrt{D(z)}$ (2.12)

est une fréquence de Rabi dépendant de z et proportionnelle à la racine carrée de l'intensité lumineuse totale en z .

Il apparaît ainsi clairement que, dans l'état fondamental, seul l'état $|\Psi_c(z)\rangle$ est couplé au champ laser alors que $|\Psi_{nc}(z)\rangle$ ne l'est pas.

- Pour la suite des calculs de ce chapitre, il est utile de calculer les dérivées spatiales de $|\Psi_c(z)\rangle$ et $|\Psi_{nc}(z)\rangle$. Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} |\Psi_c(z)\rangle = \frac{k \sin\theta}{1 + \cos\theta \cos 2kz} |\Psi_{nc}(z)\rangle = \frac{k \sin\theta}{D(z)} |\Psi_{nc}(z)\rangle \end{cases} \quad (2.13.a)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} |\Psi_{nc}(z)\rangle = \frac{-k \sin\theta}{1 + \cos\theta \cos 2kz} |\Psi_c(z)\rangle = -\frac{k \sin\theta}{D(z)} |\Psi_c(z)\rangle \end{cases} \quad (2.13.b)$$

Remarque : $\langle\Psi_c(z)|\Psi_c(z)\rangle = 1 \quad \forall z$. On a de même $\langle\Psi_{nc}(z)|\Psi_{nc}(z)\rangle = 1 \quad \forall z$ et $\langle\Psi_{nc}(z)|\Psi_c(z)\rangle = 0 \quad \forall z$. En dérivant ces équations par rapport à z , on peut retrouver aisément que $\langle\Psi_c(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_c(z)\rangle) = 0 = \langle\Psi_{nc}(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_{nc}(z)\rangle)$ et que $\langle\Psi_{nc}(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_c(z)\rangle) = -\langle\Psi_c(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_{nc}(z)\rangle)^*$.

- Nous supposons l'intensité laser suffisamment faible pour que la transition atomique ne soit pas saturée

$$s(z) = \frac{\Omega^2(z)/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \ll 1 \quad (2.14)$$

$s(z)$ est le paramètre de saturation au point z .

- L'état couplé $|\psi_c(z)\rangle$ acquiert un déplacement lumineux $\hbar\delta'_c(z)$ et une largeur radiative $\hbar\Gamma'_c(z)$ où $\delta'_c(z)$ et $\Gamma'_c(z)$ sont donnés par :

$$\delta'_c(z) = \delta \frac{s(z)}{2} = \delta' D(z) \quad (2.15.a) \quad \Gamma'_c(z) = \Gamma \frac{s(z)}{2} = \Gamma' D(z) \quad (2.15.b)$$

$$\text{ou} \quad \delta' = \delta \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.16.a) \quad \Gamma' = \Gamma \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.16.b)$$

ne dépendent pas de z . La dépendance en z de $\delta'_c(z)$ et $\Gamma'_c(z)$ est la même que celle de l'intensité lumineuse totale (proportionnelle à $D(z)$).

- L'état non couplé $|\psi_{nc}(z)\rangle$ a un déplacement et une largeur nuls

$$\delta'_{nc}(z) = \Gamma'_{nc}(z) = 0 \quad (2.17)$$

2.4 Présentation qualitative du mécanisme de refroidissement

Le cycle Sisyphus

- L'état $|\psi_{nc}\rangle$ n'absorbant pas de lumière est le plus peuplé. Considérons un atome initialement dans l'état $|\psi_{nc}\rangle$ dont l'énergie est nulle et ne dépend pas de z . Supposons que cet atome est animé d'une vitesse v (Fig. 7)

- les fonctions d'onde $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ dépendant de z , il y a, pour un atome en mouvement ($z = vt$), des couplages

"non-adiabatiques" entre $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ proportionnels d'après (2.13) à :

$$\langle \psi_c(z) | \left(\frac{d}{dt} |\psi_{nc}(z)\rangle \right) = v \langle \psi_c(z) | \left(\frac{d}{dz} |\psi_{nc}(z)\rangle \right) = - \frac{\hbar v \sin \theta}{D(z)} \quad (2.18)$$

- Comme $D(z)$ figure au dénominateur de (2.18), le couplage non-adiabatique entre $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ est maximal aux minima d'intensité, où $|\psi_c(z)\rangle$ est le plus proche de $|\psi_{nc}(z)\rangle$. Il va se produire des transitions non-adiabatiques entre $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ préférentiellement aux minima d'intensité, par exemple au voisinage de $z = \lambda/4$ (double flèche verticale de la figure 7)

- Nous supposons ici $\delta > 0$ (désaccord laser bleu) de sorte que $\delta' > 0$ (voir (2.16.a)). Par suite, $|\psi_c\rangle$ est au dessus de $|\psi_{nc}\rangle$. Une fois ramené dans $|\psi_c\rangle$, l'atome gravit donc une colline de potentiel. Au fur et à mesure qu'il se rapproche du sommet, $\Gamma'_c(z)$ augmente comme $D(z)$. L'atome a alors une chance de plus en plus grande de subir un cycle de pompage optique qui le ramène dans $|\psi_{nc}\rangle$ (flèches ondulées verticales de la figure 7).

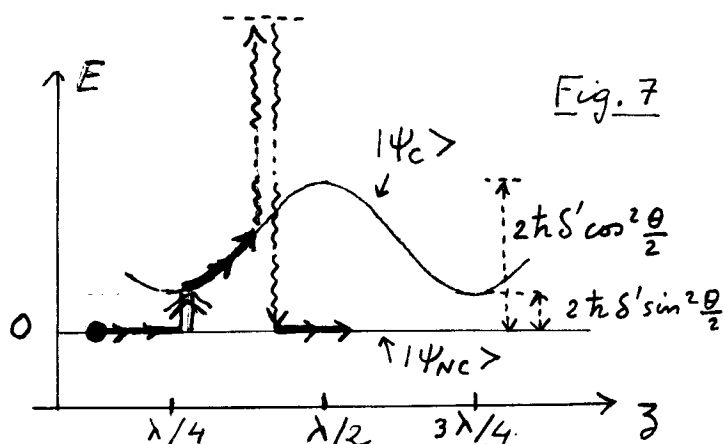


Fig. 7

- L'explication précédente, qui est celle donnée habituellement, laisse dans l'ombre un certain nombre de points. Quelle est la nature exacte de la transition non-adiabatique qui fait passer le système de $|\Psi_{nc}\rangle$ à $|\Psi_c\rangle$? Est-ce une transition du type Landau-Zener? Fait-elle intervenir une dissipation? D'où vient l'énergie qu'il faut fournir à l'atome pour le faire passer de $|\Psi_{nc}\rangle$ à $|\Psi_c\rangle$, énergie qui est au moins égale à $2\hbar\delta'\sin^2\frac{\theta}{2}$ d'après la figure 7?
- Ce problème des transitions non-adiabatiques étant très général, nous allons l'analyser en détail. Nous présentons tout d'abord les grandes lignes d'un calcul semi-classique de l'effet (§3). Puis, nous essaierons d'interpréter les résultats obtenus et d'en extraire des images physiques simples (§4).

③ Les grandes lignes du calcul semi-classique.

3.1 Evolution de la matrice densité d'un atome immobile.

Commençons par supposer l'atome immobile en 3.

Termes d'évolution liés à l'interaction avec le champ laser.

- Si ρ est l'opérateur densité atomique, on a :

$$i\hbar\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{laser}} = [V_{AL}(3), \rho] \quad (2.19)$$

- Dans (2.8) et (2.11), on a fait l'approximation du "champ tournant" (pas de termes en $|e\rangle\langle g|e^{i\omega_L t}$ ou $|g\rangle\langle e|e^{-i\omega_L t}$ qui sont "antirésonnants"). On peut alors éliminer la dépendance temporelle de $V_{AL}(3)$, ce qui est l'équivalent du "passage dans le référentiel tournant" de la RMN, au moyen d'un changement de variables. Dans les termes d'évolution propre (voir équations (2.21) plus loin), il faut alors remplacer la fréquence atomique ω_A par $\omega_A - \omega_L = -\delta$.

- On obtient ainsi, compte tenu de (2.11) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} P_{e,e}\right)_{\text{laser}} &= i\frac{\Omega(3)}{2} (P_{e,c} - P_{c,e}) = -\left(\frac{d}{dt} P_{c,c}\right)_{\text{laser}} \\ \left(\frac{d}{dt} P_{e,c}\right)_{\text{laser}} &= i\frac{\Omega(3)}{2} (P_{ee} - P_{cc}) = -\left(\frac{d}{dt} P_{c,e}\right)_{\text{laser}} \\ \left(\frac{d}{dt} P_{c,nc}\right)_{\text{laser}} &= -i\frac{\Omega(3)}{2} P_{e,nc} \\ \left(\frac{d}{dt} P_{e,nc}\right)_{\text{laser}} &= -i\frac{\Omega(3)}{2} P_{c,nc} \\ \left(\frac{d}{dt} P_{nc,nc}\right)_{\text{laser}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Termes d'évolution propre . Les seuls non nuls sont :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} P_{e,c}\right)_{\text{ev.pr.}} &= i\delta P_{ec} = \left(\frac{d}{dt} P_{c,e}\right)_{\text{ev.pr.}}^* \\ \left(\frac{d}{dt} P_{e,nc}\right)_{\text{ev.pr.}} &= i\delta P_{e,nc} = \left(\frac{d}{dt} P_{e,nc}\right)_{\text{ev.pr.}}^* \end{aligned} \quad (2.21)$$

Terme de relaxation radiative (dus à l'émission spontanée)

- Commençons par les écrire dans la base $\{|e_0\rangle, |g_+\rangle, |g_-\rangle\}$

$$\left(\frac{d}{dt} P_{ee}\right)_{\text{em.sp.}} = -\Gamma P_{ee} \quad (2.22.a)$$

$$\left(\frac{d}{dt} P_{e,g_+}\right)_{\text{em.sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} P_{e,g_+} \quad \left(\frac{d}{dt} P_{e,g_-}\right)_{\text{em.sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} P_{e,g_-} \quad (2.22.b)$$

$$\left(\frac{d}{dt} P_{g_+g_+}\right)_{\text{em.sp.}} = +\frac{\Gamma}{2} P_{ee} \quad \left(\frac{d}{dt} P_{g_+g_-}\right)_{\text{em.sp.}} = \frac{\Gamma}{2} P_{ee} \quad \left(\frac{d}{dt} P_{g_+g_-}\right)_{\text{em.sp.}} = 0 \quad (2.22.c)$$

- La 1^{ère} ligne décrit le départ des atomes de e avec un taux Γ . La 2^{ème} ligne décrit l'amortissement des cohérences optiques avec un taux $\Gamma/2$. La 3^{ème} ligne exprime que les atomes quittant e ont une chance sur deux d'arriver dans g_+ ou g_- . Il n'y a pas d'alimentation de la cohérence Zeeman ρ_{g_+, g_-} par émission spontanée à partir de la population ρ_{ee} , à cause de la symétrie sphérique de l'émission spontanée.

- En réécrivant les équations (2.22) dans la base $\{|e\rangle, |\psi_e\rangle, |\psi_{nc}\rangle\}$, on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ee}\right)_{em.sp.} = -\Gamma \rho_{ee} \quad (2.23.a)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{e,c}\right)_{em.sp.} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,c} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,nc}\right)_{em.sp.} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,nc} \quad (2.23.b)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{c,c}\right)_{em.sp.} = +\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,c} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{nc,nc}\right)_{em.sp.} = +\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,c} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{c,nc}\right)_{em.sp.} = 0 \quad (2.23.c)$$

3.2 Effet du mouvement - Hamiltonien motionnel

- On suppose maintenant l'atome en mouvement à la vitesse v : $z = vt$
- Considérons un élément de matrice $\rho_{ij} = \langle i | \rho | j \rangle$ de ρ avec $i, j = e, c, nc$. Comme $|j\rangle$ et $\langle i|$ dépendent de z , et donc de t puisque $z = vt$, il apparaît des termes supplémentaires dans la vitesse de variation $\frac{d}{dt}(\langle i | \rho | j \rangle)$. En plus du terme $\langle i | \frac{d\rho}{dt} | j \rangle$, correspondant à la somme des vitesses de variation calculés dans le § 3.1 précédent, apparaissent des termes supplémentaires liés au mouvement, qu'on peut appeler "termes motionnels".

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \rho_{ij}\right)_{mot} &= \left(\frac{d}{dt} \langle i | \right) \rho | j \rangle + \langle i | \rho \left(\frac{d}{dt} | j \rangle\right) \\ &= v \left[\left(\frac{d}{dz} \langle i | \right) \rho | j \rangle + \langle i | \rho \left(\frac{d}{dz} | j \rangle\right) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

- Introduisons la matrice

$$A_{kl} = \langle k | \left(\frac{d}{dz} | l \rangle\right) \quad (2.25)$$

D'après la remarque du bas de la page (II-4)

$$A_{kl}^* = \left(\frac{d}{dz} \langle l | \right) | k \rangle = -A_{lk} \quad (2.26)$$

- En utilisant la relation de fermeture $\sum_k |k\rangle \langle k| = 1$ dans la 2^{ème} ligne de (2.24), on obtient alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \rho_{ij}\right)_{mot} &= v \sum_k \left[\underbrace{\left(\frac{d}{dz} \langle i | \right) | k \rangle}_{= -A_{ik} \text{ d'après (2.26)}} \langle k | \rho | j \rangle + \langle i | \rho | k \rangle \underbrace{\langle k | \left(\frac{d}{dz} | j \rangle\right)}_{= A_{kj} \text{ d'après (2.25)}} \right] \\ &= -v [A, \rho]_{ij} \end{aligned} \quad (2.27)$$

- On peut enfin réécrire (2.27) sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ij}\right)_{mot} = \frac{i}{\hbar} [V_{mot}, \rho]_{ij} \quad (2.28)$$

$$\text{où} \quad (V_{mot})_{kl} = -i\hbar v A_{kl} = -i\hbar v \langle k | \left(\frac{d}{dz} | l \rangle\right) \quad (2.29)$$

V_{mot} apparaît comme un hamiltonien permettant de décrire les termes motionnels (2.24). L'équation (2.26) entraîne que :

$$(V_{mot})_{kl} = (V_{mot})_{lk}^* \quad (2.30)$$

ce qui montre que V_{mot} est hermitique.

- En utilisant (2.13) et le fait que $\frac{d}{dz}|e_0\rangle = 0$, on trouve que, dans la base $\{|e_0\rangle, |\psi_c(z)\rangle, |\psi_{nc}(z)\rangle\}$, les seuls éléments de matrice non nuls de V_{mot} sont les éléments non diagonaux entre $|\psi_c(z)\rangle$ et $|\psi_{nc}(z)\rangle$ (II-8)

$$\langle \psi_c(z) | V_{\text{mot}} | \psi_{nc}(z) \rangle = \frac{i\hbar k v \sin \theta}{D(z)} = \langle \psi_{nc}(z) | V_{\text{mot}} | \psi_c(z) \rangle^* \quad (2.31)$$

Pour simplifier les notations, il nous arrivera de poser :

$$\frac{k v \sin \theta}{D(z)} = \frac{k v \sin \theta}{1 + \cos \theta \cos 2kz} = w(z) \quad (2.32)$$

3.3 Equations de Bloch optiques

- les équations de Bloch optiques s'obtiennent en ajoutant, pour chaque élément de matrice ρ_{ij} , les vitesses de variations (2.20), (2.21), (2.23) et (2.28) calculées plus haut.

- Nous n'écrivons pas ici toutes ces équations. Donnons, à titre d'exemple, celle décrivant l'évolution de la cohérence optique ρ_{ec}

$$\frac{d}{dt} \rho_{ec} = i(\delta + i\frac{\Gamma}{2})\rho_{ec} + i\frac{\Omega(z)}{2}(\rho_{ee} - \rho_{cc}) + \frac{k v \sin \theta}{D(z)} \rho_{e,nc} \quad (2.33)$$

- Comme z et t sont reliés par $z = vt$, il n'y a qu'une seule variable dans le problème, z ou t . Si l'on choisit la variable z , le membre de gauche de (2.33) s'écrit $v \frac{d}{dz} \rho_{ec}$

3.4 Expression semi-classique de la force moyenne [voir Ref 11, § 2]

- A partir des équations de Heisenberg des opérateurs position $\hat{z}$ et impulsion $\hat{p}$ du centre de masse de l'atome, on obtient pour la force moyenne $\vec{F}$, l'expression

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = i\hbar \langle [\hat{p}, \hat{H}] \rangle \\ &= - \left\langle \frac{d}{dz} V_{AL}(\hat{z}) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.34)$$

- Dans (2.34), $\hat{z}$, $\hat{p}$ sont des opérateurs, de même que l'hamiltonien $\hat{H}$ du système global. L'expression semi-classique de $\vec{F}$ s'obtient en remplaçant dans (2.34) l'opérateur $\hat{z}$ par la position classique de l'atome z , ce qui revient à utiliser l'expression semi-classique (2.8) de $V_{AL}(z)$. En dérivant (2.8) par rapport à z et en prenant la valeur moyenne (qui ne peut plus porter alors que sur les degrés de liberté internes), on obtient :

$$\vec{F} = -\frac{\hbar k \Omega}{2} \left[\sin(kz - \frac{\theta}{2}) (\rho_{g_{+1},e_0} + \rho_{e_0,g_{+1}}) - \sin(kz + \frac{\theta}{2}) (\rho_{g_{-1},e_0} + \rho_{e_0,g_{-1}}) \right] \quad (2.35)$$

Les facteurs $e^{\pm i\omega_L t}$ ont disparu dans la transformation associée au passage dans le référentiel tournant. La force moyenne $\vec{F}$ peut donc être exprimée en fonction des cohérences optiques.

- En utilisant (2.10), on pourrait également exprimer $\vec{F}$ en fonction de ρ_{ec} , $\rho_{e,nc}$, ρ_{ce} , $\rho_{nc,e}$.

3.5 Elimination adiabatique de l'état excité

(II - 9)

Principe

- La condition (2.14) entraîne que les temps caractéristiques T_g d'évolution de l'état fondamental sont beaucoup plus longs que ceux relatifs à l'état excité, T_e (de l'ordre de Γ^{-1}).

Nous supposons aussi ici que, pendant le temps de vie de l'état excité, Γ^{-1} , l'atome se déplace très peu devant λ , ce qui revient à supposer :

$$k v \ll \Gamma \quad (2.36)$$

- Considérons alors l'équation (2.33). Après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de Γ^{-1} , $P_{e,c}$ va être "asservi" à l'évolution lente de l'état fondamental, de sorte que dans le membre de gauche $dP_{e,c}/dt$ est de l'ordre de $(T_g)^{-1} P_{e,c}$ et est donc négligeable devant le terme $i(\delta + i\frac{\Gamma}{2}) P_{e,c}$ du membre de droite (puisque $\Gamma \gg T_g^{-1}$). On peut, de même, compte tenu de (2.36), négliger le dernier terme de (2.33). On obtient ainsi une équation algébrique permettant d'exprimer $P_{e,c}$ en fonction de $P_{c,c}$ et $P_{e,e}$. En fait, on peut aussi négliger la contribution de $P_{e,e}$ à $P_{e,c}$, qui sera au moins d'ordre 3 en $\Omega(3)$ et obtenir finalement :

$$P_{e,c} = \frac{\Omega(3)/2}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} P_{c,c} \quad (2.37)$$

En procédant de même avec les équations donnant $\dot{P}_{e,nc}$ et $P_{e,e}$ on peut éliminer tous les éléments de matrice de P faisant intervenir au moins une fois l'état excité e .

- Notons enfin que, dans un tel calcul à l'ordre 0 en kv/Γ , on perd le refroidissement Doppler.

Nouvelles équations de Bloch réduites

- Les nouvelles équations auxquelles on parvient ainsi ne font plus intervenir que l'état fondamental. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{P}_{nc,c} = i \left[\delta'_c(3) + i\frac{\Gamma'_c(3)}{2} \right] P_{nc,c} + \frac{kv \sin \theta}{D(3)} (P_{nc,nc} - P_{cc}) & (2.38.a) \\ \dot{P}_{cc} = -\frac{\Gamma'_c(3)}{2} P_{cc} + \frac{kv \sin \theta}{D(3)} (P_{c,nc} + P_{nc,c}) & (2.38.b) \\ \dot{P}_{nc,nc} = +\frac{\Gamma'_c(3)}{2} P_{cc} - \frac{kv \sin \theta}{D(3)} (P_{c,nc} + P_{nc,c}) & (2.38.c) \end{cases}$$

- Les derniers termes des 3 équations, en $kv \sin \theta / D(3)$, décrivent les couplages motiomnels.
- Le 1^{er} terme de (2.38.a) exprime que la cohérence entre $|\psi_c\rangle$ et $|\psi_{nc}\rangle$ évolue à la fréquence $(E_c - E_{nc})/\hbar = \delta'_c$ et est amorti avec un temps $(\Gamma'_c + \Gamma'_{nc})/2 = \Gamma'_c/2$ (puisque $\Gamma'_{nc} = 0$).
- Les premiers termes de (2.38.b) et (2.38.c) expriment que les atomes quittent $|\psi_c\rangle$ par absorption avec un taux Γ'_c et reviennent, avec une chance sur 2 dans $|\psi_c\rangle$, une chance sur 2 dans $|\psi_{nc}\rangle$.

- L'élimination des cohérences optiques permet de réexprimer $\bar{F}$ en fonction de $P_{c,c}$, $P_{nc,nc}$ et $P_{c,nc}$. On trouve :

$$\bar{F} = -P_{cc} \frac{d}{dz} [\hbar \delta'_c(z)] - \left\{ \hbar [\delta'_c(z) + i \frac{\Gamma'_c(z)}{2}] \frac{k \sin \theta}{D(z)} P_{nc,c} + c.c. \right\} \quad (2.39)$$

- Le 1^{er} terme de (2.39) correspond à l'interprétation habituelle de la force dipolaire en termes de gradients spatiaux de niveaux habillés. Seul le niveau $|\psi_c\rangle$ a une énergie $E_c(z) = \hbar \delta'_c(z)$ variant avec z .
Le 1^{er} terme de (2.39) est la force correspondant à $-dE_c(z)/dz$, pondérée par la probabilité d'occupation P_{cc} de $|\psi_c\rangle$.

3.6 Méthodes de résolution des équations de Bloch optiques.

D'après (2.39), $\bar{F}$ dépend de P_{cc} , $P_{nc,c}$ et $P_{c,nc}$. Le calcul de $\bar{F}$ nécessite donc de résoudre les équations (2.38).

Méthode générale

- Prenons z comme variable et réécrivons par exemple (2.38.a) sous la forme

$$v \frac{d}{dz} P_{nc,c}(z) = i [\delta'_c(z) + i \frac{\Gamma'_c(z)}{2}] P_{nc,c}(z) + \frac{k v \sin \theta}{D(z)} [P_{nc,nc}(z) - P_{c,c}(z)] \quad (2.40)$$

- Comme $\delta'_c(z)$, $\Gamma'_c(z)$ et $D(z)$ sont des fonctions périodiques de z , de période $\lambda/2$, il en est de même de la solution des équations de Bloch optiques. On peut donc développer $P_{cc}(z)$, $P_{nc,nc}(z)$, $P_{c,nc}(z)$, $P_{nc,c}(z)$ en série de Fourier et reporter ces développements dans l'équation (2.40) et les équations analogues correspondant à (2.38.b) et (2.38.c). On obtient ainsi des relations de récurrence entre les coefficients des développements en séries de Fourier, équations qui peuvent être résolues par la méthode des fractions continues [ref. 12].

- Une telle méthode générale permet d'obtenir numériquement la courbe donnant les variations de $\bar{F}$ avec v , et de mettre en particulier en évidence des variations résonnantes autour de certaines valeurs de v ("Dopplérons") - Voir par exemple la figure 2 de la référence [10].

Méthode perturbative à la limite des très faibles vitesses

- Nous insisterons plus ici sur une méthode perturbative permettant d'obtenir des expressions analytiques pour les éléments de matrice de p et pour $\bar{F}$ à la limite des très faibles vitesses (développement en puissances de $k v / \Gamma'_c$). Nous pourrions en effet de ces équations extraire des interprétations physiques pour les mécanismes intervenant dans le cycle de Sisyphe de la figure 7, en particulier pour le "transfert non-adiabatique" entre $|\psi_{nc}\rangle$ et $|\psi_c\rangle$.

- Revenons à l'équation (2.40) et développons les éléments de matrice de p en puissances de $k v$

$$p_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (2.41)$$

où $p_{ij}^{(n)}$ est d'ordre n en $(k v)$. En reportant de tels développements dans (2.40) et en égalant les termes de même ordre de part et d'autre du signe = on obtient :

$$v \frac{d}{dz} p_{nc,c}^{(n)}(z) = i [\delta'_c(z) + i \frac{\Gamma'_c(z)}{2}] p_{nc,c}^{(n)}(z) + \frac{k v \sin \theta}{D(z)} [p_{nc,nc}^{(n-1)}(z) - p_{cc}^{(n-1)}(z)] \quad (2.42)$$

- La solution d'ordre 0 s'obtient aisément en faisant $v=0$ dans (2.38) II-17
On obtient

$$P_{C,C}^{(0)} = 0 \quad P_{NC,NC}^{(0)} = 1 \quad P_{C,NC}^{(1)} = P_{NC,C}^{(1)} = 0 \quad (2.43)$$

- Connaissant la solution d'ordre 0, l'équation (2.42) et les autres équations analogues associées à (2.38.b) et (2.38.c) donnent la solution d'ordre 1, et ainsi de suite. Nous nous contenterons ici de donner quelques termes d'ordre 1 et 2 qui nous serviront pour la discussion physique de §§ 4 et 5

$$P_{CC}^{(1)} = P_{NC,NC}^{(1)} = 0 \quad (2.44)$$

$$P_{NC,C}^{(1)} = (P_{C,NC}^{(1)})^* = \frac{i}{\delta'_C(3) + i \frac{\Gamma'_C(3)}{2}} \frac{k v \sin \theta}{D(3)} \quad (2.45)$$

$$P_{CC}^{(2)} = \frac{2}{\delta'_C(3)^2 + \frac{\Gamma'_C(3)^2}{4}} \left[\frac{k v \sin \theta}{D(3)} \right]^2 \quad (2.46)$$

- En ce qui concerne $\overline{F}$, on trouve que $\overline{F} = 0$ à l'ordre 1 et 2. A l'ordre 2, c'est la moyenne spatiale de $\overline{F}$ qui est nulle. Enfin à l'ordre 3, on trouve une moyenne spatiale non nulle égale à

$$\overline{F} = -\frac{16}{5\pi} \hbar k (k v)^3 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\delta' \Gamma'} \left| \int_0^{2\pi} \frac{du \cos u}{(1 + \cos \theta \cos u)^5} \right| \quad (2.47)$$

References

- [1] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B2, 1707 (1985)
- [2] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, P.R.L. 57, 48 (1986)
- [3] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B6, 2023 (1989)
- [4] B. Sheehy, S.Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatanian, H. Metcalf, P.R.L. 64, 858 (1990)
- [5] D. Weiss, E. Riis, Y. Sheny, J. Ungar, S. Chu, J.O.S.A. B6, 2072 (1989)
- [6] O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. II France 3, 1709 (1993)
- [7] C. Valentin, M.C. Gagne', J. Xu, P. Pillet, Europhys. Lett. 17, 133 (1991)
- [8] M. Shahriar, P. Hemmer, M. Prentiss, P. Marte, J. Meris, D. Katz, N. Bigelow, T. Cai, P.R.A 48, R4035 (1993)
- [9] P. Marte, R. Dum, R. Taieb, P. Zoller, M. Shahriar, M. Prentiss, P.R.A 49, 4826 (1994)
- [10] M. Weidemüller, T. Esslinger, M. Ol'shanii, A. Hemmerich, T. Hönisch, Europhys. Lett. 27, 109 (1994)
- [11] C. Cohen-Tannoudji, in Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches, Session LIII, ed. by J. Dalibard, J.M. Raimond, J. Zinn-Justin, Elsevier, 1992.
- [12] V. Minogin, O. Serimaa, Opt. Commun. 30, 373 (1990)