

Modèle simple permettant d'étudier la transition
entre le régime diffractif et le régime diffusif

① Introduction

- Modèle physique et hypothèses (Transparents T1-T2)
- Buts de ce cours (T3)

② Le cadre théorique

- Opérateur densité atomique - Diverses représentations (T4-T5)
- Champ laser (T5)
- Equations de Bloch optiques généralisées (T6-T8)
- Simplifications des équations (T9)
- Filtre linéaire reliant l'état entrant à l'état sortant (T10-T11)
- Différents états initiaux possibles (T12-T13)

③ Limite des temps courts ($T \ll T_R$)

- Structure du filtre linéaire et du propagateur pour une onde progressive et une onde stationnaire (T14-T16)
- Effet Kapitza-Dirac résonnant (T17)
- Effet Stern et Gerlach optique (T18)

④ Limite des temps longs ($T \gg T_R$)

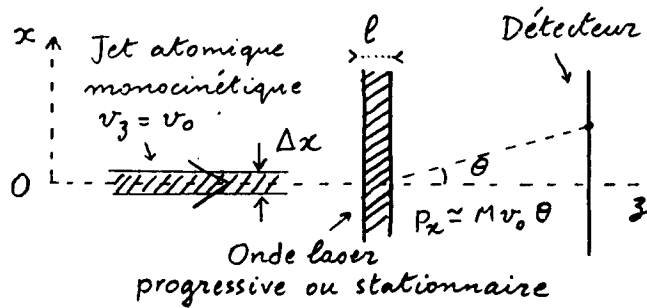
- Rappels sur les fonctions caractéristiques d'une loi de probabilité et sur les cumulants (T19-T20)
- Structure du filtre linéaire aux temps longs (T21)
- Limite gaussienne du propagateur de la fonction de Wigner (T22)
- Destruction des cohérences spatiales (T23)
- Profils de déflexion (T24)

⑤ Temps intermédiaires ($T \sim T_R$)

- Distribution d'impulsion après traversée d'une onde progressive (T25-T26).
- Lien avec la statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant un temps donné (T27).
- Distribution d'impulsion après traversée d'une onde stationnaire (T28-T29).

⑥ Conclusion (T30)

Déflexion d'un jet atomique (1) par une onde laser



Extension transverse Δx du faisceau atomique grande ou petite devant λ

Paramètres physiques importants

$T = \frac{\ell}{v_0}$ = Temps de traversée de l'onde

$\tau_R = \Gamma^{-1}$ Durée de vie radiative de e

Γ = Largeur naturelle de e

$E_{rec} = \hbar^2 k^2 / 2M$ Energie de recul

$P = P_x$ Impulsion typique atomique le long de l'onde laser

$kv = k \frac{P}{M}$ Effet Doppler correspondant

Hypothèses à la base des calculs (2)

(i) $kv \ll \Gamma$

Effet Doppler négligeable sur Ox

(ii) $kv \ll T^{-1} \longleftrightarrow vT \ll \lambda$

Distance parcourue le long de Ox pendant T $\ll$ Longueur d'onde du laser

Régime de Raman-Nath

Autre formulation équivalente

$P_x^2 / 2M$ négligé dans H

Par contre, aucune hypothèse restrictive sur T/τ_R

On veut étudier les 2 régimes

$T \ll \tau_R$: Pas d'émission spontanée pendant le temps de traversée T (cf cours III, IV, V)

$\tau_R \ll T \ll (kv)^{-1}$ Plusieurs émissions spontanées pendant T

Buts de ce cours

Essayer de présenter un traitement synthétique des divers effets physiques pouvant être observés dans le domaine $0 < T \ll kv^{-1}$, et qui sont en général décrits par des formalismes différents suivant que $T \ll \tau_R$ ou $T \gg \tau_R$ (Refs [1], [2])

En particulier, essayer de comprendre

- (i) La transition progressive entre
 - Le régime diffusif ($T \ll \tau_R$) (habituellement décrit par une équation de Schrödinger)
 - Le régime diffusif ($T \gg \tau_R$) (équation de Fokker-Planck)

- (ii) La destruction progressive des cohérences spatiales due à l'émission spontanée

Importance pour l'interférométrie atomique

Opérateur densité atomique σ_A (4)

Représentation position

$$\langle a, \vec{r}' | \sigma_A | b, \vec{r}'' \rangle \quad a, b = e \text{ ou } g$$

$$\begin{cases} \vec{r} = (\vec{r}' + \vec{r}'')/2 \\ \vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}'' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \frac{\vec{u}}{2} \\ \vec{r}'' = \vec{r} - \frac{\vec{u}}{2} \end{cases}$$

$$\langle a, \vec{r} + \frac{\vec{u}}{2} | \sigma_A | b, \vec{r} - \frac{\vec{u}}{2} \rangle = \sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u})$$

$\vec{u} \neq \vec{0} \rightarrow$ Cohérences spatiales

Représentation impulsion

$$\langle a, \vec{p}' | \sigma_A | b, \vec{p}'' \rangle$$

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{\vec{v}}{2} \quad \vec{p}'' = \vec{p} - \frac{\vec{v}}{2}$$

$$\langle a, \vec{p} + \frac{\vec{v}}{2} | \sigma_A | b, \vec{p} - \frac{\vec{v}}{2} \rangle = \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v})$$

$\vec{v} \neq \vec{0} \rightarrow$ Cohérences en impulsion

Lien entre les 2 représentations

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = h^{-3/2} e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}$$

$$\sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u}) = h^{-3} \int d^3 p d^3 v \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v}) \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{u} + \vec{r} \cdot \vec{v}) \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} \leftrightarrow \vec{u} \\ \vec{r} \leftrightarrow \vec{v} \end{array} \right\} \text{ Variables conjuguées}$$

Représentation de Wigner

$$W_{ab}(\vec{r}, \vec{p}) = \hbar^{-3} \int d^3u \sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{u} / \hbar}$$

$$= \hbar^{-3} \int d^3v \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v}) e^{i\vec{r} \cdot \vec{v} / \hbar}$$

$$W(\vec{r}, \vec{p}) = W_{aa}(\vec{r}, \vec{p}) + W_{bb}(\vec{r}, \vec{p})$$

Quasi-probabilité de trouver l'atome au point $\vec{r}$ avec une impulsion $\vec{p}$ (Réelle, normalisée, mais peut être < 0)

$$\mathcal{R}(\vec{r}) = \int d^3p W(\vec{r}, \vec{p}) \quad \mathcal{P}(\vec{p}) = \int d^3r W(\vec{r}, \vec{p})$$

Vraies densités de probabilité de $\vec{r}, \vec{p}$

Champ laser

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} E_0(\vec{r}) \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

$$= \vec{E} E^+(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \vec{E} E^-(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$E^\pm(\vec{r}) = \frac{1}{2} E_0(\vec{r}) e^{\mp i\phi(\vec{r})}$$

$$K(\vec{r}) = -d E_0(\vec{r}) / \hbar \quad d = \vec{E} \cdot \vec{d} \quad \text{Fréquence de Rabi}$$

Onde progressive

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Onde stationnaire

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} E_0 \cos \vec{k} \cdot \vec{r} \cos \omega t$$

Equations de Bloch optiques généralisées

Contribution de $\vec{p}^2/2m$ (E.B.O.G.)

Très simple en représentation $\vec{p}$

$$\langle a, \vec{p}' | \hat{H} | b, \vec{p}'' \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle a, \vec{p}' | \frac{\vec{p}^2}{2m} \sigma_a - \sigma_a \frac{\vec{p}^2}{2m} | b, \vec{p}'' \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \frac{\vec{p}'^2 - \vec{p}''^2}{2m} \sigma_{ap}(\vec{p}', \vec{p}'') = \frac{1}{i\hbar m} \vec{p} \cdot \vec{v} \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v})$$

Comme $\vec{p}$ et $\vec{v}$ sont conjugués de $\vec{u}$ et $\vec{r}$

$$\dot{\sigma}_{ab}(\vec{r}, \vec{u}) = + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u})$$

Contribution de l'interaction atome-laser

Approximation du champ tournant

$$V_{AL} = -d |e\rangle \langle g| E^+(\vec{r}) - d |g\rangle \langle e| E^-(\vec{r})$$

Dans V_{AL} , $\hat{r}$ est un opérateur

↳ Intérêt de la représentation $\vec{r}$

Exemple

$$\dot{\sigma}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{i\hbar} \langle e, \vec{r}' | V_{AL} \sigma - \sigma V_{AL} | e, \vec{r}'' \rangle$$

$$= - \frac{d}{i\hbar} [E^+(\vec{r}') \sigma_{ge}(\vec{r}', \vec{r}'') - E^-(\vec{r}'') \sigma_{eg}(\vec{r}', \vec{r}'')]$$

$$\dot{\sigma}_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})]$$

$\vec{u}$ apparaît dans $E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2})$ et $E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2})$

Contribution de l'émission spontanée

Γ = Largeur naturelle de $e = 1/\tau_R$

τ_R = Durée de vie radiative de e

$$\dot{\sigma}_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) = -\Gamma \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$\dot{\sigma}_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})$$

Pour le transfert de e à g , la représentation $\vec{p}$ est plus commode

$$\dot{\sigma}_{gg}(\vec{p}', \vec{p}'') = \Gamma \int d^3k \phi(\vec{k}) \sigma_{ee}(\vec{p}' + \frac{\omega_0}{c} \vec{k}, \vec{p}'' + \frac{\omega_0}{c} \vec{k})$$

$\phi(\vec{k})$: Diagramme angulaire de la pbté d'émission spontanée dans la direction $\vec{k} = \frac{\hbar}{\hbar} \vec{k}$

$$\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar = \text{Fréquence atomique}$$

$$\dot{\sigma}_{gg}(\vec{p}, \vec{v}) = \Gamma \int d^3k \phi(\vec{k}) \sigma_{ee}(\vec{p} + \frac{\omega_0}{c} \vec{k}, \vec{v})$$

$$\dot{\sigma}_{gg}(\vec{r}, \vec{u}) = \Gamma \chi(\vec{u}) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$\chi(\vec{u}) = \int d^3k \phi(\vec{k}) e^{-i \frac{\omega_0}{c} \vec{k} \cdot \vec{u}}$$

$$\int d^3k \phi(\vec{k}) = 1 \implies \chi(\vec{0}) = 1$$

$\vec{u}$ apparaît dans $\chi(\vec{u})$

Récapitulation : E.B.O.G.

dans la représentation $\vec{r}, \vec{u}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \right) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) = -\Gamma \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$+ \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \right) \sigma_{gg}(\vec{r}, \vec{u}) = +\Gamma \chi(\vec{u}) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$+ \frac{id}{\hbar} [E^-(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) - E^+(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u})]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \right) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) = [i(\omega - \omega_0) - \frac{\Gamma}{2}] \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$+ \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{gg}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})]$$

Equation analogue pour $\sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u})$

Origine des coefficients contenant $\vec{u}$

- Vol libre : $\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}}$

- Champ laser $E^\pm$ évalué en $\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}$ ou $\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}$
Dépendance périodique en $\vec{u}$

- Emission spontanée : $\chi(\vec{u})$
Non périodique en $\vec{u}$

Simplifications

(9)

- On néglige $P_x^2/2M$
Régime de Raman - Nath
- Mouvement $\perp$ à l'onde traité classiquement $\rightarrow z = v_0 t$
On ne garde pas $P_z^2/2M$ et $\vec{P}_y^2/2M$
 $\hookrightarrow$ Tous les termes en $-\frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}}$ négligés
- Variation en créneau du champ "vu" par l'atome traversant l'onde
 $\hookrightarrow$ Les E.B.O.G. deviennent des équations locales en $\vec{r}$ et $\vec{u}$
Pour chaque $\vec{r}$ et chaque $\vec{u}$, on a un système différentiel linéaire avec des coefficients constants pour $0 \leq t \leq T$ qui devient un système algébrique linéaire par transformation de Laplace
- Pour $\vec{u} = \vec{0}$, $E^\pm(\vec{r} \pm \frac{\vec{u}}{2}) \rightarrow E^\pm(\vec{r})$ et $\chi(\vec{u}) \rightarrow \chi(\vec{0}) = 1$. Les E.B.O.G. se réduisent aux E.B.O. ordinaires pour un atome localisé en $\vec{r}$

Etat externe après la traversée (10) en représentation x, u

Caractérisation de l'état externe

$$F(x, u) = \sigma_{ee}(x, u) + \sigma_{gg}(x, u)$$

Etat avant traversée : $F_{in}(x, u)$

Seul $\sigma_{gg}(x, u) \neq 0$ pour $t < 0$

Etat après traversée : $F_{out}(x, u)$

E.B.O.G. linéaires et locales en x, u

$$F_{out}(x, u) = L(x, u, T) F_{in}(x, u)$$

$L(x, u, T)$: "Filtre" linéaire

Transformation de Laplace des E.B.O.G.

Si l'on pose

$$\tilde{L}(x, u, s) = \int_0^\infty dt e^{-st} L(x, u, t)$$

on obtient

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3(x, u, s)}{P_4(x, u, s)}$$

P_3 (P_4) : Polynômes de degré 3 (4)

en s - Rapport de 2 déterminants

Voir expression de P_3 et P_4 dans [1]

$\chi(u)$ n'apparaît que dans P_4

Etat externe après la traversée en représentation de Wigner (11)

$$W_{out}^{in}(x, p) = \frac{1}{\hbar} \int du F_{out}^{in}(x, u) e^{-ipu/\hbar}$$

Par transformée de Fourier / u

$$F_{out}(x, u) = L(x, u, T) F_{in}(x, u)$$

devient un produit de convolution

$$W_{out}(x, p) = \int dq G(x, q, T) W_{in}(x, p-q)$$

où $G(x, q, T) = \frac{1}{\hbar} \int du L(x, u, T) e^{-iqu/\hbar}$

A partir des E.B.O.G., on peut montrer que $G(x, q, T)$ est réel, que $\int dq G(x, q, T) = 1$

Par contre $G(x, q, T)$ peut être < 0 .

Interprétation physique de $G(x, q, T)$

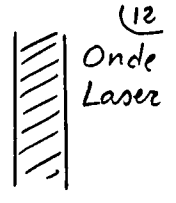
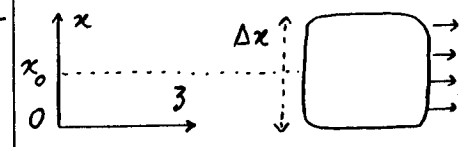
Densité de "quasi-probabilité" de transfert d'une impulsion $\hbar q$ à l'atome au point x après un temps T

$G(x, q, T)$: Propagateur de $W(x, p)$

Problème central étudié dans ce cours

Comment $G(x, q, T)$ évolue-t-il quand T croît de $T \ll \tau_R$ à $T \gg \tau_R$?

Etat initial



Paquet d'ondes gaussien en x

$$\hookrightarrow W_{in}(x, p) = R_{in}(x) P_{in}(p)$$

Paquet minimal : $\Delta x \Delta p \sim \hbar$

$$W_{out}(x, p) = R_{in}(x) \int dq G(x, q, T) P_{in}(p-q)$$

1^{er} Type d'état initial

Quasi-onde plane

$$\Delta x \gg \lambda$$

$$\Delta p \ll \hbar k$$

$P_{in}(p-q)$ très étroit autour de $p-q=0$

$\hookrightarrow$ On peut remplacer $G(x, q, T)$ par $G(x, p, T)$

$$\hookrightarrow W_{out}(x, p) = R_{in}(x) G(x, p, T) \underbrace{\int dq P_{in}(p-q)}_{=1}$$

Distribution finale d'impulsion

$$P_{out}(p) = \int dx W_{out}(x, p)$$

$$= \int dx R_{in}(x) G(x, p, T)$$

2ème type d'état initial

$$\Delta x \ll \lambda \quad \Delta p \gg \hbar k$$

Petit paquet d'ondes centré en x_0

$R_{in}(x)$ est très étroit autour de $x = x_0$

On peut remplacer $G(x, q, T)$ par $G(x_0, q, T)$

$$W_{out}(x, p) = R_{in}(x) \int dq G(x_0, q, T) P_{in}(p-q)$$

Distribution finale d'impulsion

$$\text{Comme } \int dx R_{in}(x) = 1$$

$$P_{out}(p) = \int dx W_{out}(x, p) = \int dq G(x_0, q, T) P_{in}(p-q)$$

Simplification En représentation x, u

$$F_{out}(x, u) = L(x, u, T) F_{in}(x, u)$$

Comme $\Delta p \gg \hbar k$, la largeur en u de $F_{in}(x, u)$ est très petite devant $1/\hbar$

Pour ce type d'état initial, on peut utiliser $ku \ll 1$ pour simplifier l'expression de $L(x, u, T)$

Limite des temps courts ($T \ll \tau_R$) (13)Expression de $\tilde{L}(x, u, s)$

On peut prendre $\Gamma = 0$ ($\Gamma T \ll 1$)
Pas d'émission spontanée pendant $T \ll \tau_R$

$\chi(u)$ qui est multiplié par Γ disparaît. La dépendance en u de $\tilde{L}$ ne peut provenir que de $E^\pm(x \pm \frac{u}{2})$

Etude de 2 cas simples pour $\delta = \omega_L - \omega_0 = 0$

(i) Onde progressive résonnante

$$E^\pm(x) = \frac{E_0}{2} e^{\pm i k x} \quad \text{On trouve [1]}$$

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s^3 + s \omega_1^2 (1 + e^{i k u})/2}{s^2 (s^2 + \omega_1^2)}$$

Fonction harmonique de u

$\omega_1 = -d E_0 / \hbar$: Fréquence de Rabi

(ii) Onde stationnaire résonnante

$$E^\pm(x) = \frac{E_0}{2} \cos k x \quad \text{On trouve [1]}$$

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 \sin^2 k x \sin^2 \frac{k u}{2}}$$

Fonction périodique de u

$$\omega_1 = -d E_0 / \hbar$$

Structure de $G(x, q, T)$ pour une onde progressive résonnante (15)

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s^3 + s \omega_1^2 (1 + e^{i k u})/2}{s^2 (s^2 + \omega_1^2)} = \frac{1 + e^{i k u}}{2s} + \frac{1 - e^{i k u}}{4(s + i \omega_1)} + \frac{1 - e^{i k u}}{4(s - i \omega_1)}$$

Par transformée de Laplace inverse

$$L(x, u, T) = \frac{1 + e^{i k u}}{2} + \frac{1 - e^{i k u}}{2} \cos \omega_1 T$$

Par transformée de Fourier sur u

$$G(x, q, T) = \cos^2 \frac{\omega_1 T}{2} \delta(q) + \sin^2 \frac{\omega_1 T}{2} \delta(q - \hbar k)$$

Interprétation

L'atome, dans l'état g , traversant l'onde a une probabilité $\cos^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ de rester dans g , auquel cas il ne gagne aucune impulsion, et une probabilité $\sin^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ de passer dans e en absorbant un photon laser qui lui cède une impulsion $\hbar k$

Structure de $G(x, q, T)$ pour une onde stationnaire résonnante (16)

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 \sin^2 k x \sin^2 \frac{k u}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s + i \omega_1 \sin k x \sin \frac{k u}{2}} + \frac{1}{s - i \omega_1 \sin k x \sin \frac{k u}{2}} \right]$$

Par transformée de Laplace inverse

$$L(x, u, T) = \cos \left[\omega_1 T \sin k x \sin \frac{k u}{2} \right]$$

Par transformée de Fourier sur u

$$G(x, q, T) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{2m}(\omega_1 T \sin k x) \delta(q - m \hbar k)$$

J_{2m} : Fonction de Bessel d'ordre $2m$

Interprétation

Le caractère périodique de $L(x, u, T)$ donne, par transformation de Fourier, un "peigne" de fonctions δ

Transfert d'impulsion $m \hbar k$ à l'atome dû à une redistribution de photons entre les 2 ondes

Effet Kapitza-Dirac résonnant (17)

Etat initial : onde plane

D'après T12, la distribution finale d'impulsion est donnée par

$$P_{out}(p) = \int dx R_{in}(x) G(x, p, T)$$

Comme $R_{in}(x)$ varie très peu sur une longueur d'onde, on a

$$P_{out}(p) = \sum_m \delta(p - m\hbar k) \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx J_m(\omega_1 T \sin kx)$$

En utilisant

$$\int_0^\pi \cos 2\mu x J_{2\nu}(2a \sin x) dx = \pi \cos(\mu\pi) J_{\nu-\mu}(a) J_{\nu+\mu}(a) \quad (\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2})$$

(voir Gradshteyn, Ryzhik, Table of integrals, formule 6.681.9), on obtient

$$P_{out}(p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) \delta(p - m\hbar k)$$

En accord avec les résultats du cours III (où $\Omega_1 = \frac{\omega_1}{2}$ est la fréquence de Rabi associée à chaque onde progressive)Effet Stern et Gerlach optique (18)Petit paquet d'ondes $\Delta x \ll \lambda$ localisé en x_0 . D'après T13, on a

$$P_{out}(p) = \int dq G(x_0, q, T) P_{in}(p-q)$$

et on peut utiliser $ku \ll 1$ dans l'expression de $L(x_0, u, T)$ qui devient

$$L(x_0, u, T) \sim \cos[\omega_1 T \sin kx_0 \frac{\hbar u}{2}] = \cos(u \delta k)$$

avec $\delta k = \frac{1}{2} \omega_1 \hbar k \sin kx_0 T$

On en déduit, par TF/u

$$G(x_0, q, T) = \frac{1}{2} [\delta(q - \hbar \delta k) - \delta(q + \hbar \delta k)]$$

et par suite

$$P_{out}(p) = \frac{1}{2} P_{in}(p - \hbar \delta k) + \frac{1}{2} P_{in}(p + \hbar \delta k)$$

Interprétation : Séparation du paquet d'ondes incident en 2 paquets ayant reçu un transfert d'impulsion $\pm \hbar \delta k$ correspondant à l'action, pendant T , d'une force $\pm \frac{d}{dx} \frac{\hbar \omega_1 \cos kx}{2} \big|_{x=x_0}$ égale aux gradients des niveaux habillés en x_0 .

Fonctions caractéristiques d'une loi de probabilité (19) (rappels) X : variable aléatoire $p(x) = \Pr(X=x)$: Loi de probabilité1^{ère} Fonction caractéristique : $\varphi(u)$

$$\varphi(u) = \overline{e^{iuX}} = \int dx e^{iuX} p(x)$$

$$e^{iuX} = 1 + iuX + \frac{i^2}{2} u^2 X^2 + \dots$$

$$\varphi(u) = 1 + iu \bar{x} + \frac{i^2}{2} u^2 \overline{x^2} + \dots$$

Moments $\overline{x^n} = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{du^n} \varphi(u) \big|_{u=0}$

2^{ème} Fonction caractéristique : $\psi(u)$

$$\psi(u) = \operatorname{Log} \varphi(u) \quad (\operatorname{Log} \text{ népérien})$$

$$\psi(u) = \operatorname{Log} \left[1 + iu \bar{x} + \frac{i^2}{2} u^2 \overline{x^2} + \dots \right] =$$

$$= iu \bar{x} + \frac{i^2}{2} u^2 (\overline{x^2} - \bar{x}^2) + \dots$$

$$= iu \kappa_1 + \frac{i^2}{2} u^2 \kappa_2 + \dots$$

Cumulants $\kappa_n = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{du^n} \psi(u) \big|_{u=0}$

$$\kappa_1 = \bar{x} \quad \text{Valeur moyenne}$$

$$\kappa_2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad \text{Ecart quadratique}$$

Variables aléatoires indépendantes X_i (20)

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{Somme des } X_i$$

1^{ère} Fonction caractéristique de Y

$$\Phi(u) = \overline{e^{iuY}} = \overline{e^{iuX_1} e^{iuX_2} \dots e^{iuX_n}} = \overline{e^{iuX_1}} \overline{e^{iuX_2}} \dots \overline{e^{iuX_n}} \quad (\text{indépendance des } X_i)$$

$$\hookrightarrow \Phi(u) = \varphi_1(u) \varphi_2(u) \dots \varphi_n(u)$$

$$\Phi = \text{Produit des } \varphi_i$$

2^{ème} Fonction caractéristique de Y

$$\Psi(u) = \operatorname{Log} \Phi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u) + \dots + \psi_n(u)$$

$$\Psi = \text{Somme des } \psi_i$$

$$\kappa_1(Y) = \sum_i \kappa_1(X_i) \quad \kappa_2(Y) = \sum_i \kappa_2(X_i) \quad \dots$$

Les cumulants de variables aléatoires indépendantes s'ajoutent

Théorème de la limite centrale

Si $n \rightarrow \infty$, la loi de probabilité de Y tend vers une gaussienne définie entièrement par $\kappa_1(Y)$ et $\kappa_2(Y)$

Limite des temps longs ($T \gg \tau_R$) (21)

Expression asymptotique de $L(x, u, T)$

Décomposition en fractions rationnelles

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3(s)}{P_4(s)} = \sum_{i=1}^4 \frac{a_i(x, u)}{s - s_i(x, u)}$$

$$\hookrightarrow L(x, u, T) = - \sum_{i=1}^4 a_i(x, u) e^{s_i(x, u) T}$$

Les parties réelles des $s_i(x, u)$ sont < 0
(Amortissement dû à $\Gamma \neq 0$)

Soit $s_1(x, u)$ la racine donnant le plus faible amortissement

$$L(x, u, T) \underset{T \gg \tau_R}{\sim} - a_1(x, u) e^{s_1(x, u) T}$$

$L(x, u, T)$ = Transformée de Fourier de la quasi-probabilité $G(x, q, T)$

= 1^{ère} Fonction caractéristique de $G(x, q, T)$

2^{ème} Fonction caractéristique de $G(x, q, T)$

$$\psi(x, u, T) = \text{Log } L(x, u, T) \underset{T \gg \tau_R}{\simeq} T s_1(x, u)$$

$\hookrightarrow$ Tous les cumulants de q sont proportionnels à T pour $T \gg \tau_R$

Limite gaussienne de $G(x, q, T)$ (22)

Partageons T en n intervalles T/n avec $T/n \sim \tau_R \sim$ Temps de corrélation des forces radiatives

- Le fait que les cumulants de q croissent linéairement avec T indique que les impulsions transférées pendant ces divers intervalles sont des variables aléatoires indépendantes

$\hookrightarrow G(x, q, T)$ doit donc tendre pour $T \gg \tau_R$ vers une gaussienne entièrement caractérisée par κ_1 et κ_2

$$G(x, q, T) \simeq \frac{1}{(2\pi\kappa_2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(q - \kappa_1)^2}{2\kappa_2}\right\}$$

$$\kappa_1(x) = F(x) T \quad \kappa_2(x) = 2D(x) T$$

$F(x)$ = Force moyenne en x

$D(x)$ = Coeff. de diffusion de l'impulsion

Les résultats obtenus pour $F(x)$ et $D(x)$

à partir de $L(x, u, T)$ sont en accord avec ceux fournis par les théories habituelles des forces radiatives

Destruction des cohérences spatiales (23)

$G(x, q, T)$ = gaussienne dont le carré de la largeur en q croît comme T

$\hookrightarrow L(x, u, T)$ = gaussienne dont le carré de la largeur en u décroît comme $1/T$

$$\text{Or, } F_{\text{out}}(x, u) = L(x, u, T) F_{\text{in}}(x, u)$$

Les cohérences spatiales de l'état entrant sont filtrées par $L(x, u, T)$ et ont une portée qui décroît de plus en plus (en $1/\sqrt{T}$) quand T croît

Une onde plane entrante devient un mélange statistique de paquets d'ondes de plus en plus localisés

Différence importante avec la limite $T \ll \tau_R$ où $L(x, u, T)$ est périodique en u et a une portée infinie en u

Une onde plane entrante devient alors une superposition linéaire d'ondes planes de vecteurs d'onde différents (diffraction)

Profil de déflexion (24)

(pour une onde plane entrante : $\Delta x \gg \lambda$)
D'après T12

$$P_{\text{out}}(p) = \int dx G(x, p, T) R_{\text{in}}(x)$$

Pour une onde stationnaire, $G(x, p, T)$ a une périodicité $\lambda/2$ (comme $F(x)$, $D(x)$)
Comme $R_{\text{in}}(x)$ dépend très peu de x

$$P_{\text{out}}(p) = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} dx G(x, p, T)$$

Superposition de gaussiennes correspondant aux diverses abscisses x d'entrée

- centrées en $\bar{p}(x) = F(x) T$

- de largeur $\sqrt{2D(x) T}$

Somme incohérentes de contributions d'atomes croisant l'onde laser en tous les points x possibles

Prédiction de nouvelles structures

et d'effets "arc en ciel" dans les profils de déflexion pour $\delta \neq 0$

Voir Ref. [3]

Temps intermédiaires ($T \sim \tau_R$) (25)Onde plane progressiveStructure de $\tilde{L}(x, u, s)$

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3}{P_4} = \frac{a + a' e^{ikx}}{b[1 - c\chi(u)e^{ikx}]}$$

a, a', b, c Fonctions de s (voir [1])

$e^{ikx} \leftrightarrow$ Laser $\chi(u) \leftrightarrow$ ém. spontanée

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{a + a' e^{ikx}}{b} \sum_{m=0}^{\infty} c^m [\chi(u)]^m e^{imkx}$$

Structure de $\tilde{G}(x, u, s)$ TF/u

$$\tilde{G}(x, q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ac^m}{b} \delta(q - m\hbar k) \otimes \phi^{(m)}(q)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a'c^m}{b} \delta[q - (m+1)\hbar k] \otimes \phi^{(m)}(q)$$

$\otimes$ = Produit de convolution

$$\phi^{(m)}(q) = \underbrace{\phi(q) \otimes \phi(q) \otimes \dots \otimes \phi(q)}_{m \text{ fois}}$$

Autoconvolution de $\phi(q)$ m fois avec lui-même

$\phi(q)$ = Transformée de Fourier de $\chi(u)$

Interprétation physique (26)

$\phi^{(m)}(q)$ = Distribution de l'impulsion de recul due à m photons spontanés

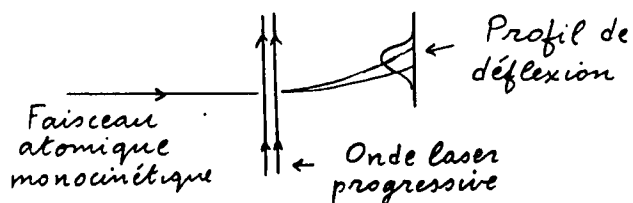
ac^m/b = Transformée de Laplace de $\pi(q, N-m, T/q, N)$ = Pbté pour que l'atome, partant de g avec N photons laser, arrive après un temps T dans g avec $N-m$ photons laser et m photons émis spontanément.

Il a alors gagné une impulsion $m\hbar k$ et les m photons spontanés lui ont communiqué un recul $\phi^{(m)}(q)$

$$\hookrightarrow \delta(q - m\hbar k) \otimes \phi^{(m)}(q)$$

De même, $a'c^m/b$ = Transformée de Laplace de la pbté $\pi(e, N-m-1, T/q, N)$ d'avoir, après un temps T , $m+1$ photons laser absorbés et m photons spontanés, l'atome arrivant dans e

$$\hookrightarrow \delta[q - (m+1)\hbar k] \otimes \phi^{(m)}(q)$$

Statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant T (27)

Après déconvolution de la contribution au profil des photons émis spontanément [$\phi^{(m)}(q)$], l'étude du profil de déflexion permet de mesurer la distribution statistique ac^m/b de m (effets sub-poissonniens... Refs [7-10])

Intérêt d'une telle méthode

Chaque photon absorbé ou émis laisse une trace sur la trajectoire alors qu'un P.M. ne détecte pas tous les photons émis

L'étude de la fonction $L(x, u, T)$ donne accès à ac^m/b

Onde laser stationnaire (28)Structure de $\tilde{L}(x, u, s)$

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3}{P_4} = \frac{a}{b[1 - c\chi(u)]}$$

a, b, c Fonctions de x, u, s , périodiques en u (voir Ref. [1])

$$\tilde{L}(x, u, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ac^m}{b} [\chi(u)]^m$$

Structure de $\tilde{G}(x, q, s)$ TF/u

$$\tilde{G}(x, q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{R}_m(x, q, s) \otimes \phi^{(m)}(q)$$

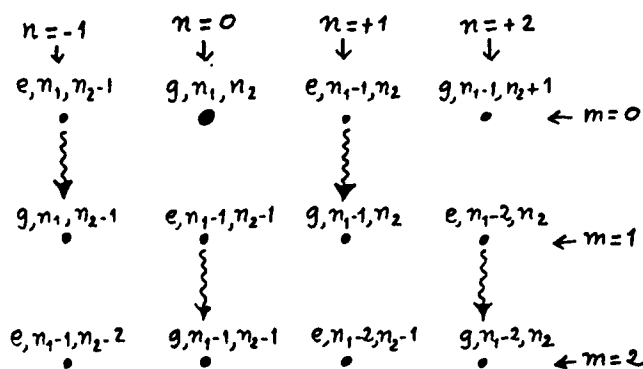
$\tilde{R}_m(x, q, s)$ = T.F. d'une fonction périodique $\rightarrow$ "Peigne" de fonctions δ

$$\tilde{R}_m(x, q, s) = \sum_n \tilde{\pi}_m^n(x, s) \delta(q - n\hbar k)$$

La transformée de Laplace inverse de $\tilde{\pi}_m^n(x, s)$ décrit la redistribution de photons entre les 2 ondes progressives formant l'onde stationnaire (après m émissions spontanées), conduisant à un transfert d'impulsion $n\hbar k$ à l'atome

Atome habillé avec 2 types de photons

Etat initial : g, n_1, n_2 = Atome dans g (29)
avec n_1 photons + k , n_2 photons - k



Chaque état est repéré par n, m

$\tilde{\pi}_m^n(x, s)$ = Transformée de Laplace de la p.bte' de transition $m=0, n=0 \rightarrow m, n$
Redistribution $\rightarrow$ Gain d'impulsion $n\hbar k$

Recul dû à l'émission spontanée $\Phi^{(m)}(q)$

$\hookrightarrow$ Transfert d'impulsion dans une telle transition $m=0, n=0 \rightarrow m, n$

$$\delta(q - n\hbar k) \otimes \Phi^{(m)}(q)$$

Conclusion

(30)

La fonction filtre $L(x, u, T)$, introduite dans ce cours permet, moyennant certaines approximations (Raman-Nath) d'obtenir une description synthétique de plusieurs effets physiques

- Effet Kapitza-Dirac résonnant (diffraction d'une onde de de Broglie)
- Effet Stern et Gerlach optique
- Transition du régime diffractif au régime diffusif et destruction progressive des cohérences spatiales
- Force moyenne et coefficient de diffusion de l'impulsion dans le régime diffusif
- Statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant un temps donné T

Références

- [1] C. Tanguy, S. Reynaud, C. Cohen-Tannoudji J. Phys. B 17, 4623 (1984)
- [2] C. Tanguy, Thèse de 3^{ème} cycle, Paris 1983
- [3] C. Tanguy, S. Reynaud, M. Matsuoka, C. Cohen-Tannoudji Opt. Commun. 44, 249 (1983)

Une résolution numérique plus approfondie des équations de la référence [1] est présentée dans [4] et comparée aux résultats expérimentaux de [5]. Pour une étude numérique des effets de l'émission spontanée sur la diffraction de Bragg et le Dopplerons, voir [6]

- [4] S.M. Tan, D.F. Walls, Appl. Phys. B 54, 434 (1992)
- [5] P.L. Gould, P.J. Martin, G.A. Ruff, R.E. Stoner, J.L. Picqué, D.E. Pritchard Phys. Rev. A 43, 585 (1991)
- [6] E. Schumaker, M. Wilkens, P. Meystre, S. Glasgow Appl. Phys. B 54, 451 (1992)

Statistique des photons de fluorescence

- [7] L. Mandel, J. Opt. 10, 51 (1979)
- [8] R.J. Cook, Opt. Commun. 35, 347 (1980) et Phys. Rev. A 23, 1243 (1981)
- [9] J. Stenholm, Phys. Rev. A 27, 2513 (1983)
- [10] S. Reynaud, Ann. Phys. Paris, 8, 315 (1983)