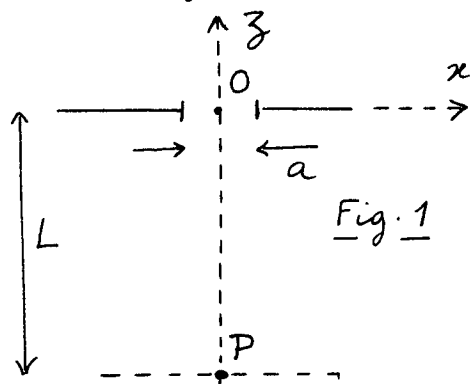


Buts de ce cours

- Mettre en place les éléments nécessaires à la compréhension des expériences d'interférométrie atomique utilisant le passage des atomes à travers des microstructures, comme des fentes d'Young ou des réseaux de fentes.
- Justifier à partir de l'équation de Schrödinger et des propagateurs de Feynman l'analogie avec l'optique.

① Problème de base à résoudre

a) - Hypothèses - Notations



- Commençons par étudier le passage des atomes à travers une fente de largeur a , parallèle à Oy dans le plan xOy , centrée à l'origine O (Fig. 1)
- On considère un paquet d'ondes quasimonochromatique, d'extension très grande devant toutes les dimensions du problème, arrivant de $z = +\infty$, avec une vitesse moyenne $\vec{V}$, de direction proche de Oz et dirigée vers le bas :

$$V_z < 0 \quad |V_x| \ll |V_z| \quad (9.1)$$

Pour simplifier, on suppose

$$V_y = 0 \quad (9.2)$$

- On s'intéresse à la fonction d'onde de l'atome dans un plan perpendiculaire à Oz , passant par le point P de coordonnées $x=y=0$, $z=-L$.
- 2 cas seront envisagés (correspondant à des expériences effectivement réalisées)
 - (i) Pas de champ de pesanteur (ou plus précisément, champ de pesanteur d'effet négligeable)
 - (ii) Champ de pesanteur vertical, dirigé vers le bas, produisant une accélération $\vec{g}$, de coordonnées $0, 0, -g$.
- En général, l'état initial de l'atome n'est pas un état pur, mais un mélange statistique de paquets d'ondes. A la fin du calcul, il faudra donc moyenner sur V_z et V_x les probabilités de présence et les cohérences spatiales.
- Nous poserons

$$mV_z = \hbar k_z \quad mV_x = \hbar k_x \quad (9.3)$$

$$k_z^2 + k_x^2 = k_0^2 \quad (9.4)$$

b) - Formulation mathématique

IX-2

- Comme la perturbation introduite par la fente est indépendante du temps, l'atome possède des états stationnaires, d'énergie

$$E_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2M \quad (9.5)$$

Solutions de l'équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(x, y, z) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \psi(x, y, z) \quad \text{pour } g=0 \quad (9.6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(x, y, z) + Mgz \psi(x, y, z) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \psi(x, y, z) \quad \text{pour } g \neq 0 \quad (9.7)$$

- Il faut résoudre cette équation aux dérivées partielles dans le $1/2$ espace $z < 0$, avec des conditions aux limites appropriées sur les parois de la fente et à l'infini (pour $z \rightarrow +\infty$, on a un état entrant, de la forme $e^{i(k_x x + k_z z)}$).

c) - Approximation de Kirchhoff

- Le problème précédent est difficile à traiter en toute rigueur, notamment quand il faut tenir compte en plus de perturbations, comme le potentiel de gravitation Mgz de (9.7), ou d'autres perturbations éventuelles, produites par des champs extérieurs, comme des champs électriques. C'est pourquoi nous utiliserons des approximations, justifiées par la petitesse de la longueur d'onde de de Broglie $\lambda_z = 1/k_z$ suivant Oz : une approximation du type de celle de Kirchhoff en optique(*) pour les conditions aux limites, et l'approximation paraxiale (voir § 2).
- L'approximation analogue à celle de Kirchhoff en optique consiste à prendre, dans le plan $z=0$, $\psi=0$ sur les parois de la fente et à garder pour ψ et $\partial\psi/\partial z$ à l'intérieur de la fente les mêmes valeurs que s'il n'y avait pas de fente.

$$\begin{cases} \psi(x, y, z=0) = 0 & \text{pour } |x| > a/2 \\ \psi(x, y, z=0) = e^{ik_x x} & \text{pour } -a/2 \leq x \leq +a/2 \\ \partial\psi(x, y, z)/\partial z|_{z=0} = ik_z e^{ik_x x} & \text{pour } -a/2 \leq x \leq +a/2, 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (9.8)$$

② Approximation paraxiale

a) Définition

- Comme $\lambda_z = 1/k_z$ est très petit devant toutes des dimensions transversales caractéristiques ($a, \lambda_x = 1/k_x \dots$), on peut essayer de séparer la partie rapidement variable de $\psi(x, y, z)$ en posant, pour $g=0$ (Pour $g \neq 0$, voir § 2 c plus loin)

$$\psi(x, y, z) = e^{-ik_0 z} u(x, y, z) \quad (9.9)$$

On s'attend alors à ce que $u(x, y, z)$ varie lentement et qu'il soit légitime de négliger certains termes (comme $\partial^2 u / \partial z^2$) dans l'équation obtenue en reportant (9.9) dans (9.6). Nous verrons alors plus loin que l'équation ainsi obtenue est tout à fait analogue à celle d'une équation de Schrödinger dépendant du temps dans un espace à 2 dimensions x, y , très facile à résoudre avec les méthodes du cours IV.

(*) J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley (1962) p. 282
M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon (1980), 6^e édition, p 379

b) Transformation de l'équation aux valeurs propres pour $g=0$ - Calculons $\partial^2 \psi / \partial z^2$

$$\partial \psi / \partial z = (-ik_0 u + \partial u / \partial z) e^{-ik_0 z} \quad (9.10.a)$$

$$\partial^2 \psi / \partial z^2 = (-k_0^2 u - 2ik_0 \partial u / \partial z + \partial^2 u / \partial z^2) e^{-ik_0 z} \quad (9.10.b)$$

- Nous négligerons le terme en $\partial^2 u / \partial z^2$ qui est très petit devant les 2 autres (qui contiennent k_0), et également devant $\partial^2 u / \partial x^2$ et $\partial^2 u / \partial y^2$.

L'équation (9.6) devient alors

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (9.11)$$

qui ressemble à une équation de Schrödinger dépendant du temps si l'on considère z comme un temps.

- En fait, on peut associer un temps τ à z , celui que mettrait une particule classique, partant de $z=0$ à $\tau=0$ avec une vitesse $-V_0 = -\hbar k_0 / M$ pour arriver en z à l'instant τ

$$z = -V_0 \tau = -\frac{\hbar k_0}{M} \tau \quad (9.12)$$

Si l'on passe de la variable z à la variable τ , et qu'on utilise $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dz} = -\frac{M}{\hbar k_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$, l'équation (9.11) devient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, y, \tau) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, \tau) \quad (9.13)$$

qui est bien une équation de Schrödinger

- Finalement, l'approximation paraxiale faite plus haut revient à traiter classiquement le mouvement suivant Oz (mouvement uniforme à la vitesse V_0), tout en traitant quantiquement le mouvement transversal ;

- Donnons enfin la condition aux limites équivalente à (9.8) pour $u(x, y, z)$ (et qui demeure valable également pour $g \neq 0$).

$$u(x, y, z=0) = u(x, y, \tau=0) = \begin{cases} e^{ik_x x} & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2} \\ 0 & \text{pour } |x| > \frac{a}{2} \end{cases} \quad (9.14)$$

c) Transformation de l'équation aux valeurs propres pour $g \neq 0$

- Essayons tout d'abord de généraliser (9.9). Introduisons le vecteur d'onde $k(z)$ dépendant de z , suivant

$$\frac{\hbar^2 k^2(z)}{2M} + Mgz = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \quad (9.15)$$

et posons

$$\psi(x, y, z) = u(x, y, z) e^{i \int_0^z k(z') dz'} \quad (9.16)$$

- Calculons $\partial^2 \psi / \partial z^2$

$$\partial \psi / \partial z = [i k(z) u + \partial u / \partial z] e^{i \int_0^z k(z') dz'} \quad (9.17.a)$$

$$\partial^2 \psi / \partial z^2 = \left[-k^2(z) u + 2i k(z) \partial u / \partial z + i \frac{dk}{dz} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] e^{i \int_0^z k(z') dz'} \quad (9.17.b)$$

- Comme plus haut, nous négligeons $\partial^2 u / \partial z^2$. Nous négligeons également $i (dk/dz) u$ devant $-k^2 u$, puisque

$$\frac{dk/dz}{k^2} = \left(\frac{1}{k} \frac{dk}{dz} \right) \times \lambda \ll 1 \quad (9.18)$$

La variation relative de $k(z)$ sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie suivant Oz étant très faible.

Enfin, nous utilisons l'équation (9.15) nous transformons le 1^{er} terme du crochet de (9.17.b)

L'équation (9.7) devient alors

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{2k(z)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (9.19)$$

qui ressemble beaucoup à (9.11), à part que k_z est remplacé par $k(z)$.

- Effectuons le changement de variable

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{M}{\hbar k(z')} dz' \quad (9.20)$$

$\tau(z)$ est le temps que met une particule, tombant dans le champ de pesanteur et partant de $z=0$ à $\tau=0$ avec la vitesse $-V_0 = -\hbar k_0 / M$, pour arriver en z . En utilisant

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dz} = \frac{M}{\hbar k(z)} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (9.21)$$

on obtient, à partir de (9.19)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, y, \tau) = - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, \tau) \quad (9.22)$$

Comme plus haut, on est ramené au problème d'une particule quantique libre à 2 dimensions, l'approximation paraxiale revenant à traiter classiquement le mouvement de chute libre le long de Oz.

- Pour la suite, nous aurons besoin de l'expression du temps $\tau(z)$ défini en (9.20). Il est plus simple de le calculer à partir de l'équation du mouvement classique

$$z(\tau) = -V_0 \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 \quad (9.23)$$

Prenons par exemple $z = -L$ (voir Fig. 1) et appelons

T la valeur correspondante de τ , valeur du temps auquel

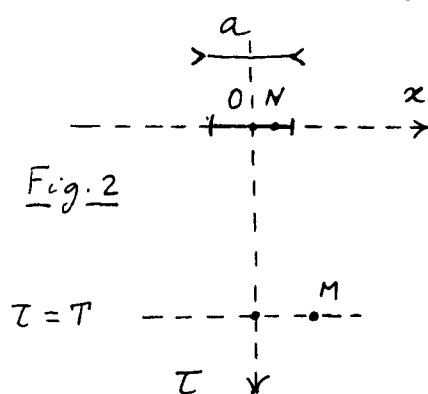
la particule arrive dans le plan passant par Oz et perpendiculaire à P . L'équation (9.23) n'a alors qu'une seule valeur positive

$$T = -\frac{V_0}{g} + \frac{V}{g} \sqrt{1 + \frac{2Lg}{V_0^2}} = \frac{V_0}{g} (\sqrt{1 + \alpha} - 1) \quad (9.24)$$

où $\alpha = 2Lg/V_0^2$ (9.25)

③ Diffraction par une fente

a) - Nouvelle formulation du problème



- Le problème posé dans le § 1a plus haut peut être maintenant reformulé en termes de propagation temporelle d'une particule dans un espace à 2 dimensions x, y (voir Fig. 2, où l'axe Oy est perpendiculaire au plan de la figure)

- A l'instant $t=0$, cette particule est décrite par la fonction d'onde (9.14) dont le support correspond à la fente (bande de largeur a centrée sur Oy dans xOy)

- Cette particule se propage librement, que g soit nul ou non (voir Eqs 9.13 et 9.22). On veut calculer la fonction d'onde $u(x, y, \tau=T)$ à un instant ultérieur $\tau=T$, T correspondant au temps d'arrivée au point P de la figure 1 d'une particule classique partant de O à $t=0$ avec la vitesse $-V_0$. C'est là que le fait que g soit nul ou non intervient : T dépend de g et est donné par (9.24) qui se réduit à

$$T = \frac{L}{V_0} \quad (9.26)$$

si $g=0$ (Il suffit pour le voir de faire un développement limité de $\sqrt{1+\alpha}$ quand $g \rightarrow 0$, ou plus simplement de revenir à (9.12)).

- Pour étudier la propagation libre de $u(x, y, \tau)$ avec la condition initiale (9.14), on peut alors utiliser les résultats du cours IV.

Soit M un point du plan $\tau=T$ dans l'espace-temps de la figure 2, de coordonnées $x, y, \tau=T$. Comme le problème est invariant par translation le long de Oy à cause du choix $V_y=0$ (voir Eq. (9.2)), nous prendrons $y=0$

$$M : x, y=0, \tau=T \quad (9.27.a)$$

Soit N un point situé dans la fente à l'instant $\tau=0$, de coordonnées ξ, η

$$N : \xi, \eta, \tau=0 \quad (9.27.b)$$

D'après la formule (4.27) du cours IV, on a :

$$u(x, 0, \tau = T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} d\xi K(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0) u(\xi, \eta, \tau = 0) \quad (9.28)$$

où K est le propagateur de Feynman donné par

$$K(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0) = F(T) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0)\right\} \quad (9.29)$$

S_{cl} étant l'action classique le long du chemin réel passant par les points $\xi, \eta, \tau = 0$ et $x, 0, \tau = T$. Comme la particule est libre, on a (voir, par exemple, Eq. (5.10) avec $g = 0$).

$$S_{cl}(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0) = \frac{M}{2T} [(x - \xi)^2 + \eta^2] \quad (9.30)$$

Tout le problème consiste à effectuer l'intégrale (9.28) et à étudier comment $u(x, 0, T)$ varie avec x pour diverses valeurs de T .

Remarques.

- (i) Il importe de bien voir la différence avec les cours précédents où l'état initial était en général une onde plane d'extension infinie (ce qui revient à prendre $a = \infty$ dans (9.28)). L'intégrale spatiale à $\tau = 0$, privilégie alors un seul point, celui par lequel passe la trajectoire classique ayant l'impulsion de l'onde plane initiale et arrivant au point auquel on s'intéresse à l'instant final. Ici, l'intégrale sur ξ de (9.28) est bornée et la simplification précédente ne se produit plus. C'est ce qui permet à $u(x, 0, \tau = T)$ d'être non nul même s'il n'existe aucune trajectoire classique arrivant en $x, 0, T$ et passant à travers la fente avec une impulsion MV_x, MV_y . Ce sont précisément les effets de diffraction que nous désirons étudier ici.
- (ii) Une fois les approximations ^(de Kirchhoff et) paraxiales faites et l'équation (9.13) (ou (9.22)) obtenue, la résolution de cette équation ne nécessite aucune autre approximation car les équations (9.28), (9.29) et (9.30) sont exactes.
- (iii) Nous avons supposé ici que le champ de gravitation était vertical (jet atomique arrivant sur la fente, verticalement). On pourrait supposer aussi $\vec{g}$ parallèle à Ox (cas d'un jet atomique horizontal arrivant sur une fente horizontale dans un plan perpendiculaire au jet). Dans un tel cas, l'axe Ox de la figure 1 est vertical et l'axe Oz horizontal. On peut toujours faire l'approximation paraxiale pour le mouvement suivant la direction d'arrivée Oz des atomes. On obtient alors des équations analogues à (9.13) (ou (9.22)), la seule différence étant l'apparition d'un terme supplémentaire Mgx décrivant l'effet du potentiel de gravitation le long de Ox . Les formules (9.28) et (9.29) demeurent alors valables à condition de remplacer l'action (9.30) par l'action en présence d'un champ de gravitation (voir cours V). Les mêmes idées peuvent se généraliser à d'autres champs extérieurs (par exemple électriques) perturbant le mouvement transversal des atomes.

b) - Transformation de l'intégrale dans le plan de la fente

- Réécrivons l'action (9.30) sous la forme

$$S_{cl}(x, 0, \tau=T; \xi, \eta, \tau=0) = \frac{M}{2T} x^2 - \frac{Mx}{T} \xi + \frac{M}{2T} (\xi^2 + \eta^2) \quad (9.31)$$

qu'on peut considérer comme un développement en fonction des coordonnées ξ et η du point de départ autour du point 0, développement qui s'arrête à l'ordre 2 car l'action est quadratique.

- Le terme d'ordre 0 en ξ, η est l'action de la trajectoire classique reliant 0 à M. Nous la noterons $S_0(x)$

$$S_{cl}(x, 0, \tau=T; 0, 0, \tau=0) = \frac{M}{2T} x^2 = S_0(x) \quad (9.32)$$

D'après l'équation (4.12) du cours IV, le coefficient du terme linéaire en ξ est égal, au signe - près, à la composante x de l'impulsion en 0 de la trajectoire classique reliant les points 0 et M. Effectivement, comme le mouvement est libre, la vitesse v_x de la trajectoire classique reliant 0 à M est $(x_M - x_0)/(t_M - t_0) = x/T$, de sorte que

$$- \frac{Mx}{T} = -Mv_x \quad (9.33)$$

Il ne faut bien sûr pas confondre l'impulsion Mv_x de la trajectoire classique reliant 0 à M avec l'impulsion $MV_x = \hbar k_x$ du paquet d'ondes initial, qui apparaît dans la condition initiale (9.14). Enfin, on reconnaît dans le coefficient $M/2T$ des termes quadratiques, le terme $C(T) = \frac{1}{2} \partial^2 S / \partial x_a^2$ utilisé à plusieurs reprises dans les cours antérieurs (voir Eq. (5.12)).

Finalement, nous réécrivons S_{cl} sous la forme

$$S_{cl}(x, 0, \tau=T; \xi, \eta, \tau=0) = S_0(x) - Mv_x \xi + \frac{M}{2T} (\xi^2 + \eta^2) \quad (9.34)$$

- Une fois (9.34) reporté dans (9.29), puis (9.30), l'intégrale sur η peut être faite, et donne, compte tenu de (4.54), $\sqrt{2i\pi\hbar T/M}$. Utilisant (9.14), et remplaçant k_x par $MV_x/\hbar$, on obtient alors

$$u(x, 0, \tau=T) = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi\hbar T}{M}} e^{i \frac{S_0(x)}{\hbar}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} d\xi e^{i \frac{M}{\hbar} (V_x - v_x) \xi} e^{i \frac{M \xi^2}{2T\hbar}} \quad (9.35)$$

c) - Diffraction proche et lointaine - Nombre de Fresnel

- La fonction $e^{iM\xi^2/2T\hbar}$ qui apparaît dans (9.35) est une fonction de ξ qui oscille de plus en vite avec ξ quand ξ devient plus grand que

$$\Delta \xi = \sqrt{\frac{2\hbar T}{M}} \quad (9.36)$$

C'est cette fonction qui permet d'introduire les zones de Fresnel.

- Si $\Delta \xi$ est grand devant la largeur de la fente, on pourra ignorer les oscillations de $e^{iM\xi^2/2T\hbar}$ et remplacer cette fonction par 1. Si au contraire $\Delta \xi \ll a$, il faudra, bien sûr, tenir compte de ces oscillations. Comme $\Delta \xi$ augmente avec T , et donc avec la distance L du plan d'observation à la fente, la condition $\Delta \xi \gg a$ définit la zone de diffraction lointaine, la condition $\Delta \xi \ll a$ la zone de diffraction proche.

- Calculons le rapport $a^2/\Delta \xi^2$ dans le cas où la particule est libre le long de Oz ($g=0$), auquel cas T est donné par (9.15)

$$\frac{a^2}{\Delta \xi^2} \sim \frac{a^2 M}{\hbar T} \sim \frac{a^2}{L} \frac{M V_0}{\hbar} \sim \frac{a^2}{\lambda_0 L} \quad (9.37)$$

où $\lambda_0 = \hbar/MV_0$ est la longueur d'onde de de Broglie des atomes incidents. On reconnaît en (9.37) le nombre de Fresnel associé à la fente de largeur a observée à partir d'une distance L . Ce nombre représente physiquement le nombre de zones de Fresnel transversales à considérer dans la fente lorsqu'on l'observe à une distance L .

- Nous nous supposons placés dans ce qui suit dans la zone de diffraction lointaine

$$\Delta \xi \gg a \quad (9.38)$$

auquel cas on peut remplacer $e^{iM\xi^2/2T\hbar}$ par 1 dans (9.35). L'intégrale sur ξ est alors élémentaire et l'on obtient

$$u(x, 0, t=T) = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi\hbar T}{M}} e^{iS_0(x)/\hbar} F(v_x - V_x) \quad (9.39)$$

où $F(v_x - V_x)$ est une fonction de diffraction

$$F(v_x - V_x) = \frac{\sin \frac{M(v_x - V_x)a}{2\hbar}}{\frac{M(v_x - V_x)a}{2\hbar}} \quad (9.40)$$

dont la largeur en $M(v_x - V_x)$ est de l'ordre de $2\pi\hbar/a$.

d) - Discussion physique - Les 2 causes de variation transversale de la fonction d'onde

- Comme v_x est relié à x par (9.33), $u(x, 0, t=T)$ dépend de x par l'intermédiaire des 2 fonctions $e^{iS_0(x)/\hbar}$ et $F(v_x - V_x)$ apparaissant dans (9.39).

- La 1^{ère} fonction, $e^{iS_0(x)/\hbar}$, introduit un déphasage lié à la propagation entre le point O et le point M de la figure 2. Rappelons que $S_0(x)$ est l'action le long de la trajectoire classique reliant O à M , v_x étant la composante le long de Ox de la vitesse au point O de cette trajectoire.

- En fait, la particule incidente n'a pas la vitesse v_x le long de Ox , mais la vitesse V_x . Cependant, le passage de

l'atome à travers la fente tronque la fonction d'onde sur un intervalle de largeur a et communique à l'atome une dispersion de vitesses le long de Ox , de l'ordre de $\hbar/Ma$. La 2^{ème} fonction, $F(v_x - V_x)$, apparaissant dans (9.39), représente l'amplitude de probabilité pour que la particule incidente, de vitesse V_x , acquière après le passage par la fente une vitesse v_x lui permettant de s'adapter à la trajectoire classique partant de O et arrivant à M . Si $|v_x - V_x| \lesssim \hbar/Ma$, cette amplitude est importante. Par contre, si $|v_x - V_x| \gg \hbar/Ma$, elle est négligeable.

- L'équation (9.39) sépare donc clairement l'effet de la diffraction et le déphasage lié à la propagation.

Remarque

- L'action $S_0(x)$ donnée en (9.32) peut encore s'écrire

$$S_0(x) = \int_0^x P_x(x') dx' \quad (9.41)$$

où $P_x(x') = Mx'/T$ est l'impulsion au point x' de la trajectoire classique reliant O à M (voir Eq. (9.33)).

- Par ailleurs, si l'on revient de la fonction d'onde u à la fonction d'onde Ψ grâce à l'équation (9.9), ou plus généralement (9.16), on voit que $\Psi(x, y=0, z)$ contient un facteur de phase

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^x P_x(x') dx'} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^3 P_z(z') dz'} \quad (9.42)$$

où $P_z(z') = \hbar k(z')$, facteur de phase que l'on peut encore écrire

$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^M \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (9.43)$$

On voit apparaître la partie spatiale $\int_0^M \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ de l'action calculée le long de la trajectoire à 3 dimensions.

e) - Cohérence spatiale transverse

- Considérons 2 points M_1 et M_2 dans le plan $z=T$ de la figure 2, d'abscisses x_1 et x_2 . La cohérence spatiale entre les 2 points peut être caractérisée par $u(x_1)u(x_2)^*$ qui contient, en plus du terme $\exp\{i[S_0(x_1) - S_0(x_2)]/\hbar\}$ lié à la propagation, le produit $F(v_{x_1} - V_x)F^*(v_{x_2} - V_x)$ des 2 amplitudes liées à la diffraction.

- Si les 2 points M_1 et M_2 sont suffisamment éloignés, plus précisément si

$$|v_{x_1} - v_{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{T} \gg \frac{\hbar}{Ma} \quad (9.44)$$

les 2 fonctions $F(v_{x_1} - V_x)$ et $F(v_{x_2} - V_x)$ ne pourront être jamais simultanément importantes, même si l'on moyenne sur les vitesses V_x associés à un mélange statistique décrivant l'état initial. Si l'on prend V_x voisin de v_{x_1} , $F(v_{x_1} - V_x)$ sera important, mais $F(v_{x_2} - V_x)$ sera alors négligeable et vice versa. Dans un tel cas, $u(x_1)u(x_2)^*$

sera très faible, alors que $|u(x_1)|^2$ et $|u(x_2)|^2$ auront des valeurs appréciables, obtenues respectivement à partir des états du mélange tels que $v_x \approx v_{x_1}$ et $v_x \approx v_{x_2}$.

On en déduit que la longueur de cohérence transverse ξ_{tr} , dans le plan $z = -L$, est donnée par :

$$\xi_{tr} \sim \frac{\hbar T}{m a} \quad (9.45)$$

Exprimons T en fonction de L au moyen de (9.24) et (9.25). Il vient

$$\xi_{tr} \sim \frac{\hbar v_0}{m g a} (\sqrt{1+\alpha} - 1) \sim \frac{\hbar}{m v_0} \frac{L}{a} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha} \sim L \frac{\lambda_0}{a} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\sqrt{\alpha}} \quad (9.46)$$

Pour $g \rightarrow 0$, c'est à dire pour $\alpha \rightarrow 0$, on retrouve le résultat bien connu

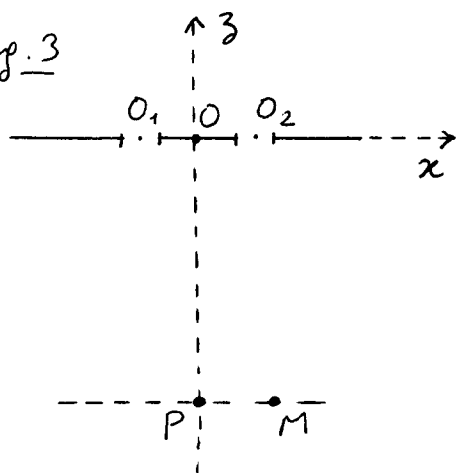
$$\xi_{tr} \sim L \frac{\lambda_0}{a} \quad (9.47)$$

correspondant à la longueur du segment du plan $z = -L$ "vu" à partir de 0 sous un angle λ/a (angle de diffraction). Dans ce cas, ξ_{tr} croît linéairement avec L . Par contre si $\alpha = 2Lg/v_0^2 \gg 1$ (cas possible avec des atomes lents), ξ_{tr} croît comme $L/\sqrt{\alpha}$, c'est à dire seulement comme $\sqrt{L}$.

④ Passage à travers 2 fentes - Interférences.

a) Problème physique

Fig. 3



- 2 fentes de largeur a , parallèles à Oy dans le plan xOy , et centrées en O_1 et O_2 tels que

$$OO_1 = -d/2 = -OO_2 \quad (9.48)$$

- On se place dans le plan de côté $z = -L$, correspondant au temps de transit $t = T$, et on observe la superposition des 2 ondes venant des fentes F_1 et F_2 . On s'intéresse en particulier au déphasage entre ces 2 ondes au point M d'abscisse x (Fig. 3)

b) Calcul du déphasage et de l'interfrange.

- Il faut superposer 2 fonctions d'ondes analogues à (9.39), x étant remplacé par $x + \frac{d}{2}$ (abscisse de M par rapport à O_1) dans la 1^{ère}, par $x - \frac{d}{2}$ dans la 2^{ème}.
- Considérons les 2 trajectoires reliant O_1 à M et O_2 à M . Soit v_{x_1} la vitesse le long de Ox de la 1^{ère} trajectoire en O_1 , v_{x_2} la quantité analogue pour la 2^{ème} en O_2 . Nous supposons que L est suffisamment grand, et a et d suffisamment

petits pour que $|v_{x_1} - v_{x_2}| \ll \hbar / M a$. On peut alors ignorer les variations des amplitudes de diffraction F d'une trajectoire à l'autre et calculer le déphasage entre les 2 ondes arrivant en M en ne tenant compte que des termes de propagation $\exp\{i S_0(x + \frac{d}{2}) / \hbar\}$ et $\exp\{i S_0(x - \frac{d}{2}) / \hbar\}$.

On obtient alors pour le déphasage $\delta\phi$, compte tenu de (9.32) :

$$\delta\phi = \frac{S_0(x + \frac{d}{2}) - S_0(x - \frac{d}{2})}{\hbar} = \frac{M}{2\hbar T} \left[(x + \frac{d}{2})^2 - (x - \frac{d}{2})^2 \right] = \frac{M x d}{\hbar T} \quad (9.49)$$

- L'interfrange δx est la quantité dont il faut se déplacer le long de Ox pour faire varier $\delta\phi$ de 2π . On déduit de (9.49)

$$\delta x = \frac{2\pi \hbar T}{M d} = \frac{\hbar T}{M d} \quad (9.50)$$

Utilisons (9.24) et (9.25) pour repasser de T à L . Il vient

$$\delta x = \frac{2\lambda_0 L}{d} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha} \quad (9.51)$$

Pour $g \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$), on retrouve le résultat bien connu

$$\delta x = \frac{\lambda_0 L}{d} \quad (9.52)$$

montrant que l'interfrange croît linéairement avec L .

Par contre pour $\alpha \gg 1$, il faut diviser (9.52) par $\sqrt{\alpha}$ et δx ne croît que comme $\sqrt{L}$.

Remarque

Dans le cas où des perturbations transverses sont appliquées aux atomes, l'étude précédente montre qu'on peut calculer le déphasage entre les 2 ondes arrivant au point M de la figure 3 de la façon suivante.

On considère les 2 trajectoires classiques, tenant compte des perturbations transverses, et reliant O_1 à M d'une part, O_2 à M de l'autre. On calcule ensuite

$$\delta\phi = \int_{O_1}^M \frac{\vec{p}_1 \cdot d\vec{r}_1}{\hbar} - \int_{O_2}^M \frac{\vec{p}_2 \cdot d\vec{r}_2}{\hbar} \quad (9.53)$$

le long de ces 2 trajectoires (voir remarque à la fin du § 3 d plus haut). Il faut également calculer les corrections dues à la diffraction, $F(v_{x_1} - v_x)$ et $F(v_{x_2} - v_x)$ et s'assurer qu'elles ne varient pas trop d'une trajectoire à l'autre.

Références

Les références aux expériences d'interférence atomique utilisant des microstructures (expériences réalisées à Constance, Tokyo, MIT) seront données dans le cours suivant.