

4 Situation limite envisagée dans ce cours

La méthode générale de calcul exposée dans le § 3 précédent et permettant d'évaluer de manière quantitative l'importance des processus d'amplification et d'absorption du champ ω_1 , est appliquée dans ce cours à une situation limite intéressante qui conduit à des expressions analytiques, dont l'interprétation physique peut être discutée simplement. Nous commençons dans le § 4, par préciser les hypothèses faites sur les champs ω_1 et ω_2 .

a - Hypothèses sur le champ ω_2 excitant la transition $g_2 - e$

(i) Le champ ω_2 est résonnant

$$\omega_{L2} = \omega_{e2} \quad (9.1)$$

Sur la figure 3, les niveaux $|e, N_1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$ sont dégénérés

(ii) Le champ ω_2 a une intensité faible

$$\Omega_2 \ll \Gamma \quad (9.2)$$

Compte tenu de (9.1), on déduit de (9.2) que la probabilité par unité de temps d'absorption d'un photon ω_2 par l'atome dans l'état g_2 est égale à Γ'_2 où

$$\Gamma'_2 = \frac{\Omega_2^2}{\Gamma} \quad (9.3)$$

De (9.2) et (9.3) on déduit que

$$\Gamma'_2 = \Gamma \frac{\Omega_2^2}{\Gamma^2} \ll \Gamma \quad (9.4)$$

(iii) Tout en étant très petit devant Γ , Γ'_2 est supposé très grand devant R_1 et R_2 , ce qui implique que $R_2 \ll \Gamma$ et $R_1 \ll \Gamma$

$$R_1, R_2 \ll \Gamma'_2 \ll \Gamma \quad (9.5)$$

Pourquoi ces hypothèses ?

- La condition (9.1) n'est pas essentielle. Il suffirait que le niveau excité e soit beaucoup plus proche de résonance que tous les autres niveaux excités. La condition (9.1) simplifie les calculs.
- Les conditions (9.4) et (9.5) (jointes à la condition (9.6) plus loin) entraînent que les résonances liées à l'effet Raman stimulé entre g_1 et g_2 sont étroites (les résonances étant étudiées en fonction du désaccord $\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{e1}$ du champ ω_{L1}). De même, les effets d'interférence entre les amplitudes d'absorption à partir de g_1 et g_2 apparaîtront sur une plage étroite de valeurs de δ_1 .
- La condition $\Gamma'_2 \gg R_2$ entraîne que le niveau g_2 peut être plus rapidement vidé par absorption de rayonnement cohérent à ω_{L2} (temps Γ'_2) que par absorption de rayonnement incohérent (temps R_2). C'est cette condition qui permettra d'avoir plus loin un niveau g_2 moins rempli que le niveau g_1 (pas d'inversion de population en l'absence de champ ω_{L1}).

b - Hypothèses sur le champ ω_{L1} excitant la transition $g_1 - e$

(i) le champ ω_{L1} a une intensité très faible

Il est en effet considéré comme un champ "sonde". L'atome étant "pompé" par les rayonnements cohérent (ω_{L2}) et incohérent, on applique un champ ω_{L1} très faible, le problème étant de voir s'il va être amplifié ou atténué. La fréquence de Raman Ω_1 , associée au champ ω_{L1} est donc très petite devant tous les autres taux ou fréquences.

$$\Omega_1 \ll \Omega_2, R_1, R_2, \Gamma \tag{9.6}$$

(ii) Le champ ω_{L1} peut être non résonnant, de manière à pouvoir étudier la variation des divers processus avec l'écart à la condition de résonance Raman. Posons

$$\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{e1} \tag{9.7}$$

On suppose cependant que $|\delta_1|$ reste très petit devant Γ , tout en pouvant être grand devant Γ'_2 , ce qui est possible, compte tenu de (9.5)

$$\Gamma'_2 \lesssim |\delta_1| \ll \Gamma \tag{9.8}$$

En d'autres termes, on peut balayer la résonance Raman, tout en restant toujours résonnant sur la transition $g_1 - e$

Remarque Les conditions de faible intensité (9.1) et (9.6), jointes à (9.8), entraînent que les niveaux habillés ne sont pas séparés d'une quantité supérieure à leur largeur dans la multiplicité $E(N_1, N_2)$. Il est alors impossible d'effectuer l'approximation séculaire sur l'équation pilote écrite dans la base des états habillés. La situation limite étudiée dans ce cours ne se prête donc pas bien à des interprétations en termes de populations de niveaux habillés. Nous allons voir par contre que la méthode des sauts quantiques et des fonctions delay est bien adaptée à une telle limite.

c - Approximations possibles sur les équations d'évolution à l'intérieur d'une multiplicité $E(N_1, N_2)$

- L'équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien effectif (8.5) décrivant l'évolution cohérente à l'intérieur de $E(N_1, N_2)$ s'écrit pour les amplitudes $c_e(t), c_1(t), c_2(t)$ apparaissant dans la restriction du vecteur d'état à l'intérieur de $E(N_1, N_2)$

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t) |e, N_1, N_2\rangle + c_1(t) |g_1, N_1+1, N_2\rangle + c_2(t) |g_2, N_1, N_2+1\rangle \tag{9.9}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_e = -\frac{\tilde{\Gamma}}{2} c_e - i\frac{\Omega_1}{2} c_1 - i\frac{\Omega_2}{2} c_2 \end{cases} \tag{9.10.a}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -(\frac{R_1}{2} + i\delta_1) c_1 - i\frac{\Omega_1}{2} c_e \end{cases} \tag{9.10.b}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_2 = -\frac{R_2}{2} c_2 - i\frac{\Omega_2}{2} c_e \end{cases} \tag{9.10.c}$$

Nous avons pris $S_2 = 0$, compte tenu de (9.1)

- Les conditions (9.4), (9.5), (9.6) et (9.8) entraînent que c_e varie beaucoup plus vite que c_1 et c_2 . Après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de $1/\Gamma$, c_e est "asservi" par les variables lentes c_1 et c_2 . On peut alors négliger $\dot{c}_e$ devant $\frac{\tilde{\Gamma}}{2} c_e$

dans l'équation (9.10.3) qui devient alors une équation algébrique donnant c_2 en fonction de c_1 et c_2

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad c_2(t) \approx -i \frac{\Omega_1}{\tilde{\Gamma}} c_1(t) - i \frac{\Omega_2}{\tilde{\Gamma}} c_2(t) \quad (9.11)$$

Il apparaît ainsi clairement que l'amplitude d'arrivée dans l'état excité est une somme de 2 amplitudes partant de g_1 et g_2 et pouvant interférer.

- Reportons 9.11 dans (9.10.b) et (9.10.c). Il vient

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad \begin{cases} \dot{c}_1(t) = -\left(\frac{R_1}{2} + \frac{\Omega_1^2}{2\Gamma} + i\delta_1\right) c_1(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_2(t) \\ \dot{c}_2(t) = -\left(\frac{R_2}{2} + \frac{\Omega_2^2}{2\Gamma}\right) c_2(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_1(t) \end{cases} \quad (9.12.a)$$

$$(9.12.b)$$

La condition (9.6) permet de négliger $\Omega_i^2/\tilde{\Gamma}$ devant R_i dans (9.12.a) alors que la condition (9.5) permet de négliger R_2 devant $\Omega_2^2/\Gamma = \Gamma'_2$. On obtient ainsi

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad \begin{cases} \dot{c}_1(t) = -\left(\frac{R_1}{2} + i\delta_1\right) c_1(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_2(t) \\ \dot{c}_2(t) = -\frac{\Gamma'_2}{2} c_2(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_1(t) \end{cases} \quad (9.13.a)$$

$$(9.13.b)$$

- Pour étudier ce qui se passe aux temps courts ($t \leq 1/\Gamma$), il faut revenir aux équations (9.10).

5) Evolution du système en l'absence de champ ω_{L1} ($\Omega_1 = 0$)

a. Pourquoi une telle étude ?

- Dans le § 6 suivant, nous étudierons les 4 périodes $[1,2]$, $[1,c]$, $[2,1]$ et $[c,1]$ au cours desquelles N_2 varie de $+1$ ou -1 (voir (8.19)). Nous verrons que les 4 probabilités conditionnelles $P(j|i)$ associées à ces 4 périodes sont proportionnelles à Ω_2^2 . Pour calculer les 4 probabilités $P([j,i]) = P(j|i)P(i)$ à l'ordre le plus bas en Ω_1 , il suffit donc de calculer les probabilités $P(i)$ de commencer une période dans l'état i à l'ordre 0 en Ω_1 . C'est ce que nous faisons dans le § b ci-dessous.

- Les populations stationnaires des divers niveaux, et leur inversion ou non inversion, doivent être déterminées avant que le champ sonde ω_{L1} ne soit appliqué, et en présence du champ pompe ω_{L2} . C'est ce que nous faisons dans le § c ci-dessous.

b. Calcul des probabilités $P(i)$ de commencer une période dans l'état i

- Il apparaît clairement sur la figure 3 du cours VIII que le système ne peut entrer dans g_1 ou g_2 que par un saut quantique à partir de c (correspondant à une émission spontanée ou induite inversement), les probabilités relatives d'aller dans g_1 et g_2 étant respectivement proportionnelles à $\tilde{\Gamma}_1/\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{\Gamma}_2/\tilde{\Gamma}$. On en déduit donc sans approximation

$$\frac{P(1)}{P(2)} = \frac{\tilde{\Gamma}_1}{\tilde{\Gamma}_2} \quad (9.14)$$

Comme nous supposons ici $R_1, R_2 \ll \Gamma$ nous pouvons remplacer dans (9.14) et dans toute la suite de ce cours, $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 + R_1$ par Γ_1 et $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + R_2$ par Γ_2 , ce qui donne

$$\frac{P(1)}{P(2)} \approx \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (9.15)$$

- Evaluons maintenant, de manière aussi simple que possible les probabilités conditionnelles $P(in: j / in: i)$ de commencer une période dans l'état j sachant que la période précédente a commencé dans l'état i

- la figure 3 du cours VIII montre que, comme on suppose ici $\Omega_1 = 0$, le système partant de g_1 , ne peut que "sauter" vers e . On a donc sans approximation

$$P(in: j / in: 1) = \delta_{e1} \quad (9.16)$$

- Par ailleurs, si une période commence dans e et comme on suppose ici $\Gamma \gg \Omega_2$, le système aura une probabilité plus élevée de sauter vers les états g_1 et g_2 de multiplicités inférieures, que de passer vers l'état g_2 de la même multiplicité puis de sauter vers l'état e de la multiplicité supérieure. On en déduit

$$P(in: j / in: e) \approx \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \delta_{j1} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma} \delta_{j2} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{\Gamma_2'}{\Gamma} \quad (9.17)$$

- Considérons enfin une période commençant dans g_2 . Comme on suppose ici $\Gamma_2' \gg R_2$, le système aura une probabilité moins élevée de sauter dans l'état e de la multiplicité supérieure, que de passer dans l'état e de la même multiplicité, puis de sauter dans l'état g_1 ou g_2 de multiplicités inférieures. On en déduit

$$P(in: j / in: 2) \approx \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \delta_{j1} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma} \delta_{j2} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{R_2}{\Gamma_2'} \quad (9.18)$$

- L'équation (8.27) appliquée à $j=e$ donne

$$P(e) = \sum P(in: e / in: i) P(i) \quad (9.19)$$

D'après (9.16), (9.17), (9.18), on a

$$P(in: e / in: i) \approx \delta_{e1} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{\Gamma_2'}{\Gamma}, \frac{R_2}{\Gamma_2'} \quad (9.20)$$

On en déduit, compte tenu de (9.19)

$$P(e) \approx P(1) \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{\Gamma_2'}{\Gamma}, \frac{R_2}{\Gamma_2'} \quad (9.21)$$

- En utilisant (9.15), (9.21) et la condition de normalisation (8.35) sur les $P(i)$, on obtient

$$\frac{P(1)}{\Gamma_1} = \frac{P(2)}{\Gamma_2} \approx \frac{P(e)}{\Gamma_1} \approx \frac{1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (9.22)$$

ce qui donne finalement (à l'ordre le plus bas en $\frac{\Gamma_2'}{\Gamma}, \frac{R_2}{\Gamma_2'}$)

$$P(1) \approx \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad P(e) \approx \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad P(2) = \frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (9.23)$$

c - Populations stationnaires des états g_1, g_2, e

- Ces populations sont proportionnelles aux temps moyens passés dans ces états par le système au cours de son évolution.

- Considérons tout d'abord une période commençant dans l'état g_1 . Comme on suppose ici $\Omega_1 = 0$, le système restera dans g_1 , et ceci pendant un temps moyen $1/R_1$, puisque la solution $C_1(t)$ de (9.10.6) avec $\Omega_1 = 0$ et $C_1(0) = 1$ donne $|C_1(t)|^2 = e^{-R_1 t}$

- Les modes propres de désintégration des équations (9.10) avec $\Omega_1 = 0$, sont des états $|\bar{g}_2\rangle$ et $|\bar{e}\rangle$, très voisins de $|g_2\rangle$ et $|e\rangle$ (nous sous-entendons les nombres quantiques N_1, N_2 des photons) puisque $\Omega_2 \ll \Gamma$, les temps de désintégration étant $1/\Gamma'_2$ pour $|\bar{g}_2\rangle$ et $1/\Gamma$ pour $|\bar{e}\rangle$.

Lorsqu'une période commence dans l'état g_2 , la proportion de $\bar{g}_2$ va être prépondérante. Le système va donc rester essentiellement dans l'état g_2 et il va y rester un temps moyen $1/\Gamma'_2$.

De même, lorsqu'une période commence dans l'état e , la proportion d'état $\bar{e}$ va être prépondérante. Le système va donc rester essentiellement dans l'état e et il va y rester un temps moyen $1/\Gamma$.

- On déduit de ce qui précède que les temps moyens passés par le système dans les états g_1, g_2, e sont respectivement proportionnels à $P(1)/R_1$, $P(2)/\Gamma'_2$ et $P(e)/\Gamma$, ce qui donne pour les populations stationnaires π_1, π_2 et π_e de ces états, compte tenu de (9.23) et de la condition de normalisation des π_i :

$$\frac{\pi_1}{\frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{R_1}} = \frac{\pi_2}{\frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\Gamma'_2}} = \frac{\pi_e}{\frac{\Gamma_e}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{\frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\Gamma}\right) + \frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\Gamma'_2}} \quad (9.24)$$

Comme $\Gamma \gg R_1, \Gamma'_2$, il apparaît sur (9.24) que π_e est négligeable devant π_1 et π_2 , de sorte que

$$\frac{\pi_1}{\Gamma_1/R_1} \approx \frac{\pi_2}{\Gamma_2/\Gamma'_2} \quad (9.25)$$

- La condition de non-inversion de populations, en l'absence de champ ω_{L1} , mais en présence de champ ω_{L2} , s'écrit donc

$$\pi_2 < \pi_1 \rightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma'_2} < \frac{\Gamma_1}{R_1} \rightarrow \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} < \frac{\Gamma'_2}{R_1} \quad (9.26)$$

Remarque

Un calcul analogue fait avec $\Omega_2 = 0$ (en plus de $\Omega_1 = 0$) donnerait $\pi_1/(\Gamma_1/R_1) = \pi_2/(\Gamma_2/R_2)$, π_e restant négligeable si $\Gamma \gg R_1, R_2$. La condition de non inversion serait donc $\Gamma_2/\Gamma_1 < R_2/R_1$.

En général, dans la théorie des lasers à effet Raman stimulé, on calcule les populations stationnaires avec $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$. La raison est que les 2 champs ω_{L1} et ω_{L2} sont très loin de résonance et que les pertes par émission spontanée dues au champ ω_{L2} sont négligeables, de sorte que, pour $\Omega_1 = 0$, les populations des niveaux sont les mêmes que Ω_2 soit nul ou non. Dans le schéma de Imamoglu, Field et Harris étudié ici, il faut tenir compte de l'effet du champ ω_{L2} puisqu'on s'est placé volontairement à résonance pour introduire des pertes radiatives. En présence du champ ω_{L1} , et comme $\Omega_2 \gg \Omega_1$, l'état $|g_1\rangle$ sera très voisin de l'état non couplé alors que l'état $|g_2\rangle$ sera très voisin de l'état couplé. On peut donc espérer que les pertes radiatives n'affecteront pas trop le champ ω_{L1} à cause des

interférences quantiques bloquant l'absorption à partir de g_1 , alors qu'elles seront efficaces pour vider l'état g_2 et obtenir ainsi un milieu non inverse.

⑥ Processus augmentant ou diminuant le nombre N_1 de photons ω_{L1}

a - Gain par effet Raman stimulé $g_2 \rightarrow g_1$

- D'après (8.19.a), un tel processus se produit pendant les périodes $[1, 2]$ de probabilité $P([1, 2]) = P(2)P(1/2)$

- Pour calculer

$$P(1/2) = R_1 \int_0^\infty |C_{12}(t)|^2 dt \quad (9.27)$$

(voir (8.24) et (8.7)), il faut résoudre l'équation de Schrödinger (9.10) et trouver la valeur de $C_1(t)$ correspondant à la condition initiale $C_j(0) = \delta_{j1}$, valeur notée $C_{12}(t)$ d'après (8.6)

- Comme $C_{22}(0) = 0$, le régime transitoire de durée $1/\Gamma$ au voisinage de $t=0$ a une influence négligeable sur $C_{12}(t)$ et $C_{22}(t)$ et on peut utiliser les équations (9.13)

A l'ordre le plus bas en $\frac{\Omega_1}{\Gamma}$ et $\frac{\Omega_2}{\Gamma}$, on peut utiliser la solution

$$C_{22}(t) = e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t} \quad (9.28)$$

correspondant à $C_{22}(0) = 1$, et reporter cette solution dans le second membre de (9.13.a) où elle est multipliée par $-\Omega_1\Omega_2/2\Gamma$. On obtient alors

$$\dot{C}_{12}(t) + \left(\frac{R_1}{2} + i\delta_1\right)C_{12}(t) = -\frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma} e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t/2} \quad (9.29)$$

qui est une équation différentielle linéaire pour $C_{12}(t)$ avec terme source. Une solution particulière de l'équation avec 2^e membre s'obtient en posant $C_{12}(t) = \alpha e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t/2}$ dans (9.2), ce qui donne α . On ajoute à cette solution une solution générale $\mu e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t}$ de l'équation sans second membre, μ étant déterminé ensuite par la condition initiale $C_{12}(0) = 0$. On obtient ainsi (compte tenu de $R_1 \ll \Gamma'_2$)

$$C_{12}(t) \approx \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'_2}{2} - i\delta_1)} \left[e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t/2} - e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t} \right] \quad (9.30)$$

- Le crochet de (9.30) passe de 0 à -1 en un temps court $2/\Gamma'_2$, puis s'amortit exponentiellement de -1 à 0 en un temps plus long $2/R_1$. Comme $1/R_1 \gg 1/\Gamma'_2$, la contribution de la 1^{re} phase à $\int_0^\infty |C_{12}(t)|^2 dt$ est négligeable, et on obtient, compte tenu de (9.27)

$$P(1/2) = R_1 \int_0^\infty |C_{12}(t)|^2 dt \approx R_1 \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{\Gamma^2 (\frac{\Gamma'_2}{2} + 4\delta_1^2)} \int_0^\infty e^{-R_1 t} dt = \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{\Gamma^2 (\frac{\Gamma'_2}{2} + 4\delta_1^2)} \quad (9.31)$$

qu'on peut encore écrire, compte tenu de (9.3)

$$P(1/2) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma'^2_2}} \quad (9.32)$$

$P(1/2)$ passe donc de $(\Omega_1/\Omega_2)^2$ à 0 sur un intervalle de valeurs de δ_1 de largeur Γ'_2 (voir Fig. 5)

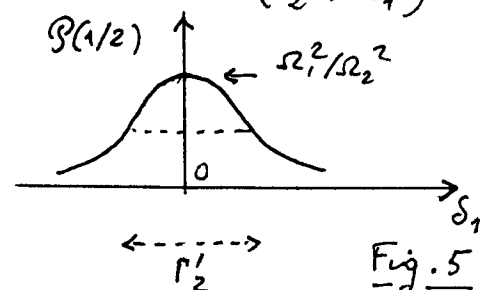


Fig. 5

- On peut encore considérer que Γ'_2 est la largeur de la résonance Raman entre g_2 et g_1 , puisque g_2 est plus large que g_1 et a pour largeur Γ'_2 .

Il est donc normal de trouver que l'amplification par effet Raman stimulé $g_2 \rightarrow g_1$, maximale pour $S_1 = 0$, n'existe que sur une plage de valeurs de S_1 correspondant à la largeur de la résonance Raman.

- En utilisant (9.23) et (9.32), on obtient finalement

$$P([1,2]) = P(1/2) P(2) = \frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma_2^2}} \quad (9.33)$$

b. Gain par émission induite $e \rightarrow g_1$

- D'après (8.19.b), il faut étudier maintenant les périodes $[1,e]$ et calculer

$$P(1/e) = R_1 \int_0^\infty |C_{1e}(t)|^2 dt \quad (9.34)$$

- Comme la condition initiale correspond maintenant à l'atome dans e à $t=0$, il faut revenir aux équations (9.10). On peut à partir de ces équations calculer $C_{1e}(t)$.

Nous ne ferons pas ici un tel calcul, car nous calculons plus loin (§d) $C_{e1}(t)$, et on peut montrer de manière générale (par exemple sur la transformée de Laplace des équations (9.10)) que

$$C_{1e}(t) = C_{e1}(t) \quad (9.35)$$

- Considérons alors la probabilité conditionnelle

$$P(e/1) = \Gamma \int_0^\infty |C_{e1}(t)|^2 dt \quad (9.36)$$

relative aux périodes $[e,1]$ associées au processus d'absorption $g_1 \rightarrow e$. En utilisant (9.35) et en comparant (9.34) et (9.36), on obtient

$$P(1/e) = \frac{R_1}{\Gamma} P(e/1) \ll P(e/1) \quad (9.37)$$

puisque nous supposons ici $R_1 \ll \Gamma$ (voir 9.5).

- Considérons enfin $P([1,e])$. En utilisant le fait que $P(e) \simeq P(1)$ (voir 9.21), on obtient, compte tenu de (9.37)

$$\begin{aligned} P([1,e]) &= P(1/e) P(e) = \frac{R_1}{\Gamma} P(e/1) P(e) \\ &\simeq \frac{R_1}{\Gamma} P(e/1) P(1) = \frac{R_1}{\Gamma} P([e,1]) \ll P([e,1]) \end{aligned} \quad (9.38)$$

On en conclut que la probabilité des périodes produisant un gain par émission stimulée $e_1 \rightarrow g$ est négligeable devant celle des périodes produisant une perte par absorption $g_1 \rightarrow e$.

c. Pertes par effet Raman stimulée $g_1 \rightarrow g_2$

- D'après (8.19.c), il faut étudier les périodes $[2,1]$ et calculer

$$P(2/1) = R_2 \int_0^\infty |C_{21}(t)|^2 dt \quad (9.39)$$

- Comme dans le § a précédent, on part de la solution d'ordre 0 en Ω_1/Γ pour $C_{11}(t)$ qui vaut 1 pour $t=0$

$$C_{11}(t) = e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t} \quad (9.40)$$

et on reporte cette solution dans le dernier terme de l'équation (9.31.b)

relative à $\dot{c}_{21}(t)$, où elle se retrouve multipliée par $\Omega_1 \Omega_2 / 2\Gamma$

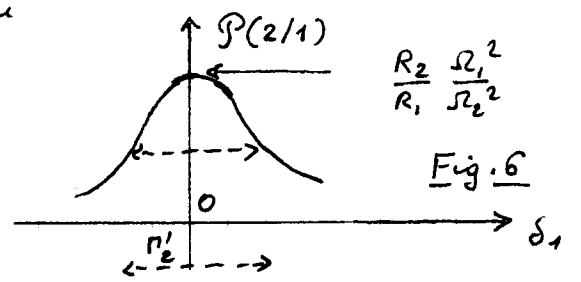
$$\dot{c}_{21}(t) + \frac{\Gamma'_2}{2} c_{21}(t) = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Gamma} e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t} \quad (9.41)$$

La même méthode que celle suivie pour intégrer l'équation (9.29) conduit à la solution

$$c_{21}(t) \approx \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'_2}{2} - i\delta_1)} \left[e^{-\Gamma'_2 t/2} - e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t} \right] \quad (9.42)$$

On constate, en comparant (9.30) et (9.42) que $c_{21}(t) = c_{12}(t)$, ce qui montre bien le caractère symétrique de l'effet Raman stimulé, la dissymétrie ne peut provenir que des temps d'entrée dans g_1 et g_2 et des temps de départ de ces états. Nous discuterons ce point plus loin. L'intégrale (9.39) donnant $P(2/1)$ est donc la même que l'intégrale (9.31) donnant $P(1/2)$, au remplacement près de R_1 par R_2 . On déduit alors immédiatement de (9.32) que

$$P(2/1) = \frac{R_2}{R_1} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma_2'^2}} \quad (9.43)$$



$P(2/1)$ passe donc de $\frac{R_2}{R_1} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2}$ à 0 sur un intervalle de valeurs de δ_1 de largeur Γ'_2 autour de 0, ce qui correspond bien à la largeur de la résonance Raman (Fig. 6).

- En utilisant (9.43) et (9.23), on obtient

$$P([2,1]) = P(2/1) P(1) = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{R_2}{R_1} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma_2'^2}} \quad (9.44)$$

- La comparaison de (9.44) et (9.33) montre alors que

$$\frac{P([2,1])}{R_2 \Gamma_1} = \frac{P([1,2])}{R_1 \Gamma_2} \quad (9.45)$$

La dissymétrie entre les 2 processus Raman stimulés inverses différences $g_1 \rightarrow g_2$ et $g_2 \rightarrow g_1$, apparaît bien sur (9.45) comme étant due aux différences entre les temps d'entrée et de sortie dans les niveaux concernés. Le passage $g_1 \rightarrow g_2$ a une probabilité proportionnelle au temps d'entrée Γ_1 dans g_1 et au temps de sortie R_2 à partir de g_2 (voir Fig. 3 du cours VIII) alors que le passage $g_2 \rightarrow g_1$ a une probabilité proportionnelle au temps d'entrée Γ_2 dans g_2 et au temps de sortie R_1 de g_1 . Les gains Raman ne sont donc supérieurs aux pertes que si $R_1 \Gamma_2 > R_2 \Gamma_1$.

$$\text{Gains Raman} > \text{Perte Raman} \quad \text{si} \quad R_1 \Gamma_2 > R_2 \Gamma_1 \quad (9.46)$$

Notons bien que le temps de départ Γ'_2 à partir de g_2 n'apparaît pas dans une telle condition (alors qu'il apparaît dans l'expression (9.25) des populations stationnaires). Ceci est dû au fait que Γ'_2 décrit des transitions à l'intérieur de $E(N_1, N_2)$. Une fois le système passé de g_1, N_1+1, N_2 à g_2, N_1, N_2+1 , s'il revient à e, N_1, N_2 avec un temps Γ'_2 et qu'il quille ensuite $E(N_1, N_2)$ à partir de e , la perte du photon ω_1 n'est plus due à l'effet Raman stimulé $g_1 \rightarrow g_2$, mais à l'absorption $g_1 \rightarrow e$.

d - Pertes dues à l'absorption $g_1 \rightarrow e$

(IX-9)

- D'après (8.19.d), il faut étudier les périodes $[e, 1]$ et calculer

$$\mathcal{P}(e/1) = \Gamma \int_0^\infty |c_{e1}(t)|^2 dt \quad (9.47)$$

- Revenons à l'équation (9.10.a)

$$\dot{c}_{e1}(t) = -\frac{\Gamma}{2} c_{e1}(t) - i\frac{\Omega_1}{2} c_{11}(t) - i\frac{\Omega_2}{2} c_{21}(t) \quad (9.48)$$

Après un régime transitoire, durant un temps très court de l'ordre de $2/\Gamma$, $c_{e1}(t)$ est passé de 0 à sa valeur adiabatique (9.11)

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad c_{e1}(t) \simeq -i\frac{\Omega_1}{\Gamma} c_{11}(t) - i\frac{\Omega_2}{2} c_{21}(t) \quad (9.49)$$

En reportant dans (9.49) les valeurs (9.40) et (9.42) de $c_{11}(t)$ et $c_{21}(t)$ données plus haut, on obtient

$$c_{e1}(t) = \left[-\frac{i\Omega_1}{\Gamma} + i\frac{\Omega_2}{\Gamma} \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'_2}{2} - i\delta_1)} \right] e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t} - i\frac{\Omega_2}{\Gamma} \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'_2}{2} - i\delta_1)} e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t} \quad (9.50)$$

- Supposons tout d'abord $\delta_1 = 0$. On constate alors, en utilisant (9.3), que le 1^{er} crochet du 2^{em} membre de (9.50) (coefficient de l'exponentielle à constante de temps longue, en $2/R_1$) s'annule. On a alors

$$\delta_1 = 0 \rightarrow c_{e1}(t) = -i\frac{\Omega_1}{\Gamma} e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t} \quad (9.51)$$

de sorte que

$$\mathcal{P}(e/1) = \Gamma \frac{\Omega_1^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t} dt = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma} \frac{1}{\Gamma'_2} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \quad \text{pour } \delta_1 = 0 \quad (9.52)$$

L'interprétation d'un tel résultat est simple. Quand $\delta_1 = 0$, il y a un état non-couplé $|\Psi_{NC}\rangle$, qui ne peut absorber de lumière, très proche de $|g_1\rangle$ (puisque $\Omega_1 \ll \Omega_2$), et un état couplé $|\Psi_C\rangle$ qui est couplé à e et qui est très proche de $|g_2\rangle$. De manière plus précise

$$|g_1, N_1+1, N_2\rangle = \frac{\Omega_2}{\Omega} |\Psi_{NC}\rangle + \frac{\Omega_1}{\Omega} |\Psi_C\rangle \quad (9.53)$$

où $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \simeq \Omega_2$. A $t=0$, on part de (9.53). Puis les 2 parties de (9.53) décroissent avec des constantes de temps, $2/R_1$ pour $|\Psi_{NC}\rangle$, $2/\Gamma'_2$ pour $|\Psi_C\rangle$. L'état $|e, N_1, N_2\rangle$ est alimenté à partir de ces 2 composantes, avec une efficacité nulle pour $|\Psi_{NC}\rangle$ qui est en un piège parfait vis à vis de e pour $\delta_1 = 0$. Après un temps $1/\Gamma'_2$, la composante $|\Psi_C\rangle$, de poids $\Omega_1^2/\Omega^2 \simeq \Omega_1^2/\Omega_2^2$ se sera désintégrée via e , ce qui explique le résultat (9.52). Puis, la partie en $|\Psi_{NC}\rangle$ décroîtra plus lentement par absorption de rayonnement incohérent vers l'état $|e, N_1+1, N_2\rangle$ sans variation de N_1 .

- Supposons maintenant $\delta_1 \neq 0$. Le coefficient de $e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t}$ peut être réécrit, compte tenu de (9.3)

$$-i\frac{\Omega_1}{\Gamma} \frac{\delta_1}{\delta_1 + i\frac{\Gamma'_2}{2}} \quad (9.54)$$

qui est bien nul pour $\delta_1 = 0$ et qui a un module tendant vers $\frac{\Omega_1}{\Gamma}$ quand $|\delta_1| \gg \Gamma'_2/2$, c'est à dire quand on sort de la résonance Raman. Dans cette limite, la contribution de la 1^{re} exponentielle de (9.50), $-i\frac{\Omega_1}{\Gamma} e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t}$, à l'intégrale (9.47) devient prépondérante devant celle de la seconde (en $e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t/2}$), et l'on a

$$|\delta_1| \gg \Gamma'_2 \rightarrow \mathcal{P}(e/1) = \Gamma \frac{\Omega_1^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty e^{-R_1 t} dt = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma R_1} \quad (9.55)$$

Là aussi, l'interprétation physique est claire. En dehors de la résonance Raman, les effets d'interférence destructive entre $c_{11}(t)$ et $c_{21}(t)$ dans l'état $|V_{NC}\rangle$ n'existent plus. On peut calculer la désintégration de g_1 par absorption de rayonnement cohérent, indépendamment de la présence ^(de g_2). On peut alors définir un taux d'absorption

$$\Gamma'_1 = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma} \quad (9.56)$$

à partir de g_1 analogue au taux Γ'_2 introduit en (9.3) pour g_2 . Comme on suppose $\Omega_1 \ll \Gamma$ et $\Omega_1 \ll R_1$, $\Gamma'_1 \ll R_1$ et la décroissance de g_1 est essentiellement contrôlée par l'absorption de rayonnement incohérent avec un taux R_1 . On obtient donc la probabilité d'absorber un photon ω_{L1} du rayonnement cohérent en multipliant le taux d'absorption (9.56) par la durée de séjour $1/R_1$ de l'atome dans g_1 , ce qui redonne bien (9.55)

- Comparons les valeurs (9.52) et (9.55) de $\mathcal{P}(e/1)$

$$\frac{\mathcal{P}(e/1) \text{ pour } \delta_1 = 0}{\mathcal{P}(e/1) \text{ pour } |\delta_1| \gg \Gamma'_2} = \frac{\Omega_1^2 / \Omega_2^2}{\Omega_1^2 / \Gamma R_1} = \frac{\Gamma R_1}{\Omega_2^2} = \frac{R_1}{\Gamma'_2} \ll 1 \quad (9.57)$$

compte tenu de (9.5).

Un tel résultat montre bien l'importance des interférences quantiques entre amplitudes d'absorption qui réduisent les pertes par absorption de photons ω_{L1} par un facteur considérable $\Gamma'_2 / R_1 \gg 1$ quand la condition de résonance Raman $\delta_1 = 0$ est vérifiée

- les pertes minimales par absorption sont donc obtenues pour $\delta_1 = 0$. Calculons alors $\mathcal{P}([e, 1])$. En utilisant (9.52) et (9.23), on obtient

$$\delta_1 = 0 \rightarrow \mathcal{P}([e, 1]) = \mathcal{P}(e/1) \mathcal{P}(1) = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \quad (9.58)$$

7 Récapitulation

a - Condition d'amplification

- La variation moyenne du nombre N_1 de photons ω_{L1} par période est donné en (8.38). Nous avons vu plus haut que $\mathcal{P}([1, e])$, qui représente le gain par émission induite, est négligeable. On a donc

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \mathcal{P}([1, 2]) - \mathcal{P}([2, 1]) - \mathcal{P}([e, 1]) \quad (9.59)$$

- Calculons $\langle \Delta N_1 \rangle$ pour $\delta_1 = 0$, puisque c'est pour cette valeur de δ_1 que le gain $\mathcal{P}([1, 2])$ est maximal et les pertes par absorption $\mathcal{P}([e, 1])$ minimales. En utilisant (9.33), (9.44) et (9.58), on obtient

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \frac{1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{R_1} [\Gamma_2 R_1 - \Gamma_1 R_2 - \Gamma_1 R_1] \text{ pour } \delta_1 = 0 \quad (9.60)$$

La condition d'amplification, $\langle \Delta N_1 \rangle > 0$, s'écrit donc $\Gamma_2 R_1 > \Gamma_1 R_2 + \Gamma_1 R_1$, soit encore

$$\frac{R_2 + R_1}{R_1} < \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \quad (9.61)$$

b - Compatibilité avec la condition de non-inversion

En regroupant (9.61) et la condition (9.26) de non-inversion, on obtient la double inégalité

$$\frac{R_2 + R_1}{R_1} < \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} < \frac{\Gamma_2'}{R_1} \quad (9.62)$$

Ces 2 inégalités ne sont compatibles que si $\Gamma_2' > R_2 + R_1$, ce qui est bien le cas, compte tenu de (9.5)

c - Conclusions

- La méthode des sauts quantiques et des fonctions délais suivie dans ces 2 cours VIII et IX permet d'analyser en détail un modèle simple d'amplificateur sans inversion de population. Elle conduit à des résultats identiques à ceux donnés par les équations de Bloch optiques (voir Ref 1 page VIII-11), dans la limite considérée ici (voir § 4)
- Les calculs présentés ici peuvent sembler plus longs que ceux effectués dans une résolution analytique ou numérique des équations de Bloch optiques. Ils ont cependant le grand avantage de pouvoir isoler la contribution de chaque processus physique et de comprendre les paramètres qui contrôlent chaque processus.
- Ainsi, nous avons vu que le gain était dû à un processus Raman stimulé, la symétrie avec le processus inverse étant rompue par l'inégalité entre les temps d'entrée dans g_1 et g_2 et on de sortie de g_1 et g_2 .
- A la limite $\Omega_1 \ll \Omega_2$, les pertes par absorption de rayonnement cohérent à partir de g_1 sont considérablement réduites par un effet d'interférence quantique destructive. C'est cette réduction des pertes par absorption qui permet l'amplification du champ ω_1 .
- Cette interférence destructive n'existe pas pour l'absorption de rayonnement cohérent à partir de g_2 . Le temps moyen passé dans g_2 est considérablement réduit par l'absorption de rayonnement cohérent ω_2 et c'est ce qui permet d'avoir un niveau g_2 beaucoup moins peuplé que g_1 (non-inversion).
- Les effets d'interférence quantique à la base de l'amplification sans inversion n'existent que lorsque la condition de résonance Raman est satisfaite, à la largeur Γ_2' du niveau g_2 près.