

Modèle simple de système amplificateur sans inversion de population

① Introduction

a - Lasers basés sur l'effet Raman stimulé

- Milieu atomique soumis à 2 champs de fréquences ω_{L1} et ω_{L2} satisfaisant une condition de résonance Raman

$$\omega_{L1} - \omega_{L2} = (E_{g_2} - E_{g_1})/\hbar \quad (8.1)$$

entre 2 niveaux g_1 et g_2 , d'énergies E_{g_2} et E_{g_1} .

- Effet Raman stimulé. N_1, N_2 : nombres de photons ω_{L1}, ω_{L2}

$$|g_1, N_1, N_2\rangle \rightleftharpoons |g_2, N_1-1, N_2+1\rangle \quad (8.2)$$

Absorption d'un photon dans une onde et émission stimulée d'un photon dans l'autre onde, l'atome passant de g_1 à g_2 ou de g_2 à g_1 .

En l'absence de tout processus dissipatif (émission spontanée, collisions, excitation par un rayonnement incohérent...), oscillation de Rabi entre les 2 états avec une fréquence de Rabi proportionnelle au couplage effectif entre les 2 états (proportionnel au produit des champs E_{L1}, E_{L2})

- Pour briser la symétrie entre les 2 sens de (8.2), on peut utiliser des processus de pompage et de relaxation pour peupler davantage un niveau que l'autre ou le vider moins vite que l'autre, et obtenir ainsi des niveaux g_1 et g_2 inégalement peuplés. Suivant que g_1 est plus peuplé (Fig. 1a) ou moins peuplé (Fig. 1b) que g_2 , ce sont les processus Stokes (Fig. 1a) ou anti-Stokes (Fig. 1b) qui prédominent, conduisant à une amplification de ω_{L2} (Fig. 1a) ou ω_{L1} (Fig. 1b).

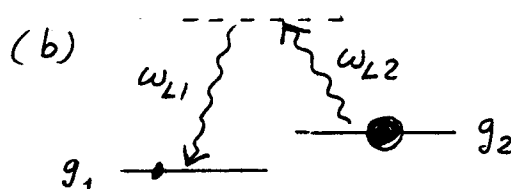


Fig. 1

b - Le modèle de Imamoglu, Field, Harris (Ref. 1)

Le modèle

- On suppose ω_{L1} et ω_{L2} résonnants ou quasirésonnants avec un niveau excité e de l'atome. Des processus de perte importants apparaissent alors : absorption d'un photon ω_{L1} ou ω_{L2} suivie d'une émission spontanée.

Γ_1 et Γ_2 sont les taux d'émission spontanée $e \rightarrow g_1$ et $e \rightarrow g_2$.

- Le milieu est pompe par un rayonnement incohérent à large bande spectrale. Son effet peut donc être décrit par des taux de transition R_1 entre e et g_1 et g_1 et e , R_2 entre e et g_2 et g_2 et e (voir Ref. 2, § IV-E-1).
- Nous poserons $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 + R_1$ $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + R_2$ $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2$ (8.3)
- Système fermé (pas d'autres niveaux que e, g_1, g_2) et purement radiatif (relaxation et pompage purement radiatifs).

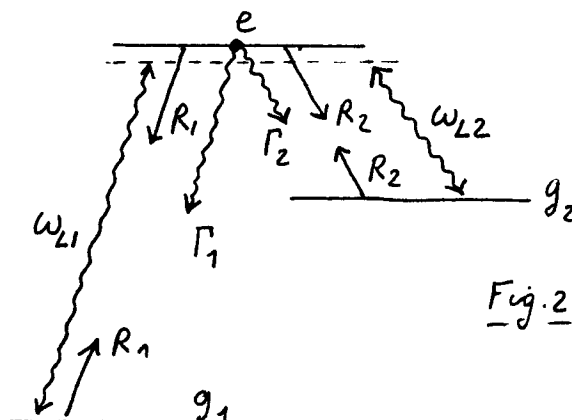


Fig. 2

Idee sous-jacente Comme un seul niveau excité e intervient ici (alors que plus haut, on avait plusieurs niveaux très loins et jouant donc des rôles équivalents), possibilité d'interférences quantiques destructives entre 2 amplitudes d'absorption, qui pourraient réduire de manière spectaculaire les pertes sur $g_1 \rightarrow e$, et permettre une amplification sur le processus anti-Stokes (Fig. 1b) même si g_1 contient plus de la moitié de la population globale $\rightarrow$ Laser sans inversion de population.

Intérêt pour réaliser éventuellement un laser UV ou X mou.

Méthode suivie dans la référence 1

- Ecriture des équations de Bloch optiques et solution stationnaire de ces équations.
- Calcul du dipôle moyen sur $e - g_1$ et détermination des conditions dans lesquelles E_{L1} est amplifié : Condition d'amplification
- Calcul des populations $\sigma_{ee}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ de e, g_1, g_2 et conditions pour lesquelles $\sigma_{11} > \sigma_{22} + \sigma_{ee}$: Condition de non inversion de population.
- Démonstration de l'existence de plages des valeurs des paramètres pour lesquelles les 2 conditions peuvent être simultanément satisfaites
 $\hookrightarrow$ Possibilité d'amplification sans inversion de population.

② Principe de la méthode suivie dans ce cours (Ref. 3)

Pour essayer d'identifier les divers processus physiques et leur importance relative, nous suivons ici une méthode différente, consistant à suivre l'évolution au cours du temps d'un seul atome (méthode des sauts quantiques et de la fonction délai du § 4 du cours VI)

a - Multiplicités $E(N_1, N_2)$

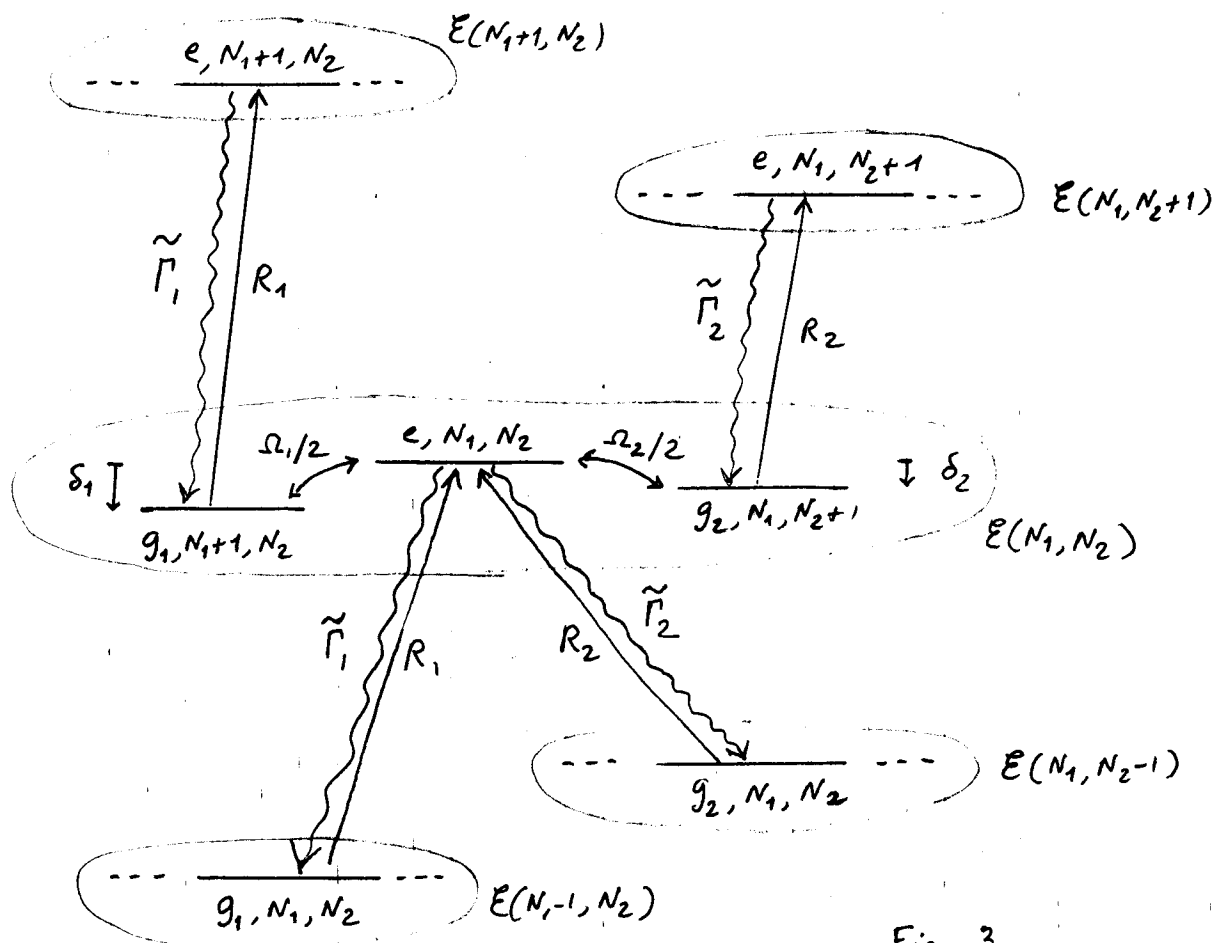


Fig. 3

- Comme dans le cas IV, nous avons des multiplicités contenant chacune 3 niveaux, proches les uns des autres, du système global "atome + photons ω_{L1} + photons ω_{L2} ".

Par exemple, la multiplicité $E(N_1, N_2)$ contient l'état $|e, N_1, N_2\rangle$ et les 2 états $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$, situés respectivement à une distance δ_1 et δ_2 de $|e, N_1, N_2\rangle$ (en unités de pulsation), avec

$$\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{e1} \quad \delta_2 = \omega_{L2} - \omega_{e2} \quad (8.4)$$

les couplages de ces 2 états avec $|e, N_1, N_2\rangle$ étant respectivement caractérisés par les fréquences de Rabi Ω_1 et Ω_2 . (Voir Fig. 3)

- Les différentes multiplicités sont espacées de ω_{L1} ou ω_{L2} .

Par exemple $E(N_1+1, N_2)$ est à une distance ω_{L1} au dessus de $E(N_1, N_2)$, alors que $E(N_1-1, N_2)$ est à une distance ω_{L1} au dessous.

b - Différentes manières de quitter une multiplicité ou d'entrer dans une multiplicité

- Les processus dissipatifs (émission spontanée, absorption et émission induite de rayonnement incohérent) sont effectués à l'atome des sauts quantiques d'une multiplicité à l'autre, durant un temps très court (de l'ordre du temps de corrélation des processus dissipatifs). Au cours d'un saut quantique, les photons laser restent "spectateurs" et N_1 et N_2 ne changent pas.

- Départs de $E(N_1, N_2)$: 4 processus sont possibles (Figure 3)

(i) Absorption d'un photon du rayonnement incohérent et passage de $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$ à $|e, N_1+1, N_2\rangle$ qui appartient à $E(N_1+1, N_2)$: Taux R_1

(ii) Absorption d'un photon du rayonnement incohérent et passage de $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$ à $|e, N_1, N_2+1\rangle$ qui appartient à $E(N_1, N_2+1)$: Taux R_2

(iii) Emission spontanée ou émission induite par le rayonnement incohérent : $|e, N_1, N_2\rangle \rightarrow |g_1, N_1, N_2\rangle \in E(N_1-1, N_2)$: Taux $\Gamma_1 = \Gamma_1 + R_1$

(iv) Emission spontanée ou émission induite par le rayonnement incohérent : $|e, N_1, N_2\rangle \rightarrow |g_2, N_1, N_2\rangle \in E(N_1, N_2-1)$: Taux $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + R_2$

- Arrivées dans $E(N_1, N_2)$: 4 processus possibles (Figure 3)

(i) Arrivée dans $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$ par émission spontanée ou induite par le ray! incohérent, à partir de $|e, N_1+1, N_2\rangle \in E(N_1+1, N_2)$: Taux $\tilde{\Gamma}_1$

(ii) Arrivée dans $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$ par émission spontanée ou induite par le ray! incohérent à partir de $|e, N_1, N_2+1\rangle \in E(N_1, N_2+1)$: Taux $\tilde{\Gamma}_2$

(iii) Arrivée dans $|e, N_1, N_2\rangle$ par excitation incohérente à partir de $|g_1, N_1, N_2\rangle \in E(N_1-1, N_2)$: Taux R_1

(iv) Arrivée dans $|e, N_1, N_2\rangle$ par excitation incohérente à partir de $|g_2, N_1, N_2\rangle \in E(N_1, N_2-1)$: Taux R_2 .

c - Evolution à l'intérieur d'une multiplicité

- Une fois que le système est arrivé dans une multiplicité,

par exemple $E(N_1, N_2)$, son vecteur d'état initial, juste après le saut quantique qui l'a fait entrer dans $E(N_1, N_2)$, est décrit par l'un des 3 états $|e, N_1, N_2\rangle$, $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$, $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$ (voir § 6 précédent)

- L'évolution ultérieure de la restriction du vecteur d'état dans $E(N_1, N_2)$ est régie par l'hamiltonien effectif, non hermitique

$$H_{\text{eff}} = \hbar \begin{pmatrix} -i\tilde{\Gamma}/2 & \Omega_1/2 & \Omega_2/2 \\ \Omega_1/2 & \delta_1 - iR_1/2 & 0 \\ \Omega_2/2 & 0 & \delta_2 - iR_2/2 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

obtenue en ajoutant respectivement les énergies imaginaires $-i\hbar\tilde{\Gamma}/2$, $-i\hbar R_1/2$, $-i\hbar R_2/2$ aux énergies des 3 états $|e, N_1, N_2\rangle$, $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$

- Nous appellerons $c_{ji}(t)$ la solution de l'équation de Schrödinger associée à (8.5) et représentant l'amplitude de probabilité de trouver le système dans l'état j de $E(N_1, N_2)$, où $j = e, 1, 2$, sachant que le système est parti à l'instant $t=0$ de l'état i de $E(N_1, N_2)$, avec $i = e, 1, 2$ (pour simplifier, nous omettons les indices des nombres de photons 1 et 2)

$$c_{ji}(t) = \langle j | U(t) | i \rangle = \langle j | e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar} | i \rangle \quad (8.6)$$

d - Description de l'évolution temporelle

- Apparaît comme constituée d'une suite de périodes d'évolution cohérente dans une multiplicité donnée, séparées par des sauts quantiques d'une multiplicité à une multiplicité voisine (Fig. 4)

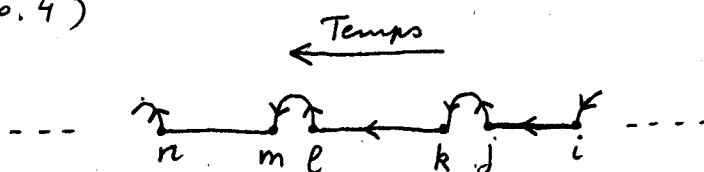


Fig. 4

Nous choisissons sur la figure un sens d'écoulement du temps de la droite vers la gauche pour rester conforme avec le fait que dans les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution écrits en (8.6), l'état i à droite est antérieur à l'état j à gauche.

- Chaque période $[j, i]$ est caractérisée par l'état i dans lequel elle commence, après le saut quantique qui amène le système dans une multiplicité $E(N_1, N_2)$, et l'état j à partir duquel le système va quitter $E(N_1, N_2)$ lors du prochain saut.

L'évolution représentée sur la figure 4 correspond donc à la suite suivante de périodes

$$-- [n, m] [l, k] [j, i] \dots$$

Fig. 5

- Soit Λ_i le temps de départ total à partir du niveau j de

$\mathcal{E}(N_1, N_2)$. L'examen de la figure 3 montre que

$$\Lambda_1 = R_1 \quad \Lambda_e = \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma} \quad \Lambda_2 = R_2 \quad (8.7)$$

On déduit alors de (8.6) que (*)

$$W_{ji}(t) dt = \Lambda_j |C_{ji}(t)|^2 dt \quad (8.8)$$

est la probabilité pour qu'un système, entré dans l'état i de $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ à $t=0$, quitte $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ à partir de l'état j entre t et $t+dt$. Les 9 fonctions $\Lambda_j |C_{ji}(t)|^2$ sont donc des "fonctions délai" du type de celles introduites dans le § 4 du cours VI.

- Une simulation Monte-Carlo de l'évolution temporelle de la figure 4 procède alors comme suit.

(i) Considérons une période partant de l'état i (à $t=0$). A partir de (8.8), on peut calculer les probabilités diverses relatives à la fin de cette période : instant du départ, état à partir duquel le départ s'effectue. A partir de ces probabilités, on peut tirer au sort les caractéristiques de la fin de cette période. On trouve par exemple qu'elle finit à t_1 et à partir de j .

(ii) Connaissant l'état de départ du prochain saut, j , on en déduit l'état d'arrivée après ce saut. L'examen de la figure 3 montre en effet que

- un départ à partir d'un état 1 (g_1, N_1+1, N_2) ne peut conduire que vers un état e (e, N_1+1, N_2)
- un départ à partir d'un état 2 (g_2, N_1, N_2+1) ne peut conduire que vers un état e (e, N_1, N_2+1)
- un départ à partir d'un état e (e, N_1, N_2) peut conduire, soit vers un état 1 (g_1, N_1, N_2), soit vers un état 2 (g_2, N_1, N_2), les probabilités respectives de ces 2 éventualités étant $\tilde{\Gamma}_1/\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{\Gamma}_2/\tilde{\Gamma}$.

(iii) Sachant que le saut a eu lieu à t_1 , on en déduit l'état du système entre 0 et t_1 , qui est nécessairement dans $\mathcal{E}(N_1, N_2)$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{C_{1i}(t)|g_1, N_1+1, N_2\rangle + C_{2i}(t)|g_2, N_1, N_2+1\rangle + C_{ei}(t)|e, N_1, N_2\rangle}{[|C_{1i}(t)|^2 + |C_{2i}(t)|^2 + |C_{ei}(t)|^2]^{1/2}} \quad (8.9)$$

(iv) Connaissant l'état initial, j , de la 2^{ème} période, on peut recommencer la procédure, et ainsi de suite...

e - Variations du champ de rayonnement entre 2 sauts successifs

- Revenons à notre problème initial. Comment peut-on voir, dans cette approche, si le champ w_{L1} va être amplifié ou absorbé?

- Chaque période $[j, i]$ commence dans un état i où les nombres de photons w_{L1} et w_{L2} sont bien définis (voir Fig. 3). Par contre, entre

(*) L'interprétation de $W_{ji}(t)$ comme une probabilité implique la condition de normalisation $\sum_j \int_0^\infty dt W_{ji}(t) = 1$ qui sera démontrée plus loin (Voir Appendice)

2 sauts, le couplage atome-laser transforme cet état i en une superposition linéaire d'états à nombres de photons différents, comme cela apparaît sur (8.9).

- Le prochain saut qui s'effectue à t_1 , à partir de l'état j de la superposition (8.9), va porter le système dans l'état k d'une multiplicité voisine, qui est très corréliée à j (voir point (ii) du § précédent) et où les nombres de photons w_{L1} et w_{L2} sont bien définis, en ayant d'ailleurs la même valeur dans les états j et k (voir Fig. 3)

- On peut ainsi, en quelque sorte, considérer que chaque saut est une "mesure" du nombre de photons w_{L1} et w_{L2} puisque chaque saut rend ce nombre de photons bien défini. Par contre, d'un saut au suivant, les nombres de photons varient, et c'est ce que nous allons préciser maintenant pour chacune des 9 périodes possibles $[j, i]$ en essayant d'identifier à chaque fois les processus physiques responsables de ces variations.

Période $[2, 1]$ - D'après la figure 3, une telle période correspond à

$$|e, N_1, N_2+1\rangle \xrightarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xrightarrow{\sim} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1+1, N_2\rangle$$

où la flèche ondulée $\xrightarrow{\sim}$ correspond à l'évolution cohérente dans $E(N_1, N_2)$ et où les sauts quantiques d'arrivée et de départ sont symbolisés par $\xrightarrow{\tilde{P}_1}$ et $\xrightarrow{R_2}$.

- Quand on passe de 1 à 2, N_1 et N_2 varient

$$\text{Période } [2, 1] \rightarrow \Delta N_1 = -1 \quad \Delta N_2 = +1 \quad (8.10)$$

- Description des processus physiques

L'atome arrive dans g_1 après une émission spontanée ou induite par le rayonnement incohérent. Un photon w_{L1} disparaît alors qu'un photon supplémentaire w_{L2} apparaît, l'atome passant de g_1 à g_2 . C'est l'effet Raman stimulé de g_1 vers g_2 (Voir Fig. 1a)

Enfin l'atome absorbe un photon du rayonnement incohérent et passe de g_1 à e . C'est cette absorption incohérente qui signe le processus Raman stimulé.

Période $[e, 1]$ Même démarche

$$\begin{array}{l} |g_1, N_1, N_2\rangle \\ \text{ou} \\ |g_2, N_1, N_2\rangle \end{array} \xrightarrow{\tilde{P}} |e, N_1, N_2\rangle \xrightarrow{\sim} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1+1, N_2\rangle$$

- Période $[e, 1] \rightarrow \Delta N_1 = -1 \quad \Delta N_2 = 0 \quad (8.11)$

- L'atome arrive dans g_1 après émission spontanée (ou induite incohérente). Il absorbe un photon w_{L1} et passe dans e .

Il retombe ensuite par émission spontanée (ou induite incohérente) soit dans g_1 : fluorescence de résonance sur $g_1 - e$; soit dans g_2 : effet Raman spontané (ou stimulé incohérent) de g_1 vers g_2 .

$$|e, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \longleftrightarrow |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1+1, N_2\rangle$$

- Période [e, 1] $\rightarrow \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = 0$ (8.12)
- Rien ne change pour les photons laser. Mais après émission spontanée d'un photon, l'atome absorbe un photon du rayonnement incohérent.

Période [1, 2]

$$|e, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \longleftrightarrow |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\tilde{P}_2} |e, N_1, N_2+1\rangle$$

- Période [1, 2] $\rightarrow \Delta N_1 = +1 \quad \Delta N_2 = -1$ (8.13)
- Effet Raman stimulé de g_2 vers g_1 , "signé" par l'absorption d'un photon incohérent sur g_1-e .

Période [2, 2] $\rightarrow \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = 0$ (8.14)

$$|e, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \longleftrightarrow |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\tilde{P}_2} |e, N_1, N_2+1\rangle$$

Emission spontanée, puis absorption incohérente sur g_2-e

Période [e, 2] $\rightarrow \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = -1$ (8.15)

$$\begin{array}{c} |g_1, N_1, N_2\rangle \\ \text{ou} \\ |g_2, N_1, N_2\rangle \end{array} \xleftarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1, N_2\rangle \longleftrightarrow |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\tilde{P}_2} |e, N_1, N_2+1\rangle$$

Fluorescence de résonance sur g_2-e ou effet Raman spontané de g_2 vers g_1 . Un photon ω_{22} est absorbé

Période [1, e] $\rightarrow \Delta N_1 = +1 \quad \Delta N_2 = 0$ (8.16)

$$|e, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \longleftrightarrow |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2\rangle$$

L'atome, excité de manière incohérente dans e, émet de manière stimulée un photon ω_{21}

Période [2, e] $\rightarrow \Delta N_1 = 0, \quad \Delta N_2 = +1$ (8.17)

$$|e, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \longleftrightarrow |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1, N_2\rangle$$

L'atome, excité de manière incohérente dans e, émet de manière stimulée un photon ω_{22}

Période [e, e] $\rightarrow \Delta N_1 = 0, \quad \Delta N_2 = 0$ (8.18)

$$\begin{array}{c} |g_1, N_1, N_2\rangle \\ |g_2, N_1, N_2\rangle \end{array} \xleftarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1, N_2\rangle \longleftrightarrow |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{\tilde{P}_2} |e, N_1, N_2\rangle$$

Fluorescence de résonance sur g_1-e et g_2-e et effet Raman spontané de g_1 vers g_2 ou de g_2 vers g_1

A la différence des périodes [e, 1] et [e, 2], ce ne sont pas des photons laser qui sont absorbés, mais des photons du rayonnement incohérent.

<u>Gains</u>	Période $[1,2]$: Effet Raman stimulé $g_2 \rightarrow g_1$	(8.19.a)
	Période $[1,e]$: Emission stimulée $e \rightarrow g_1$	(8.19.b)
<u>Pertes</u>	Période $[2,1]$: Effet Raman stimulé $g_1 \rightarrow g_2$	(8.19.c)
	Période $[e,1]$: Absorption $g_1 \rightarrow e$	(8.19.d)

Que faire maintenant ? 2 possibilités

- Faire des simulations Monte-Carlo numériques, conduisant à des courbes analogues à celles de la figure 12 du cours VI
- Essayer d'établir des résultats analytiques sur les propriétés statistiques des périodes $[j,i]$: probabilités d'occurrence, durée moyenne d'une période ..., de manière à comprendre les facteurs qui contrôlent la vitesse de variation moyenne $\langle \Delta N_1 \rangle / \Delta t$ du nombre de photons ω_1 .

C'est la 2^{ème} voie que nous allons suivre ici, en commençant par établir des propriétés générales au § 3 suivant, puis en étudiant plus particulièrement certains cas limites intéressants au cours IX suivant.

(3) Propriétés statistiques des périodes $[j,i]$ entre 2 sauts successifs

a - Quelques définitions de probabilités

- $P([j,i]) =$ Probabilité d'une période $[j,i]$ (8.20)

On tire au hasard une période parmi la suite infinie de la figure 5. $P([j,i])$ est la probabilité de sortir une période $[j,i]$

$P([j,i])$ est encore la probabilité pour qu'une période quelconque tirée au hasard commence dans l'état i et finisse dans l'état j .

La connaissance des $P([j,i])$, en particulier celle de $P([1,2])$, $P([1,e])$, $P([2,1])$, $P([e,1])$, est essentielle pour savoir si le nombre moyen $\langle N_1 \rangle$ de photons ω_1 augmente ou diminue au cours du temps (voir (8.19)).

Pour calculer les $P([j,i])$, nous passerons intermédiairement, au § b suivant, par d'autres probabilités que nous introduisons maintenant

- $P(i) =$ Probabilité pour qu'une période quelconque, tirée au hasard, commence dans l'état i (8.21)

- $P(j/i) =$ Probabilité pour qu'une période finisse dans l'état j sachant qu'elle a commencé dans l'état i . (8.22)

- $P(in:j/in:i) =$ Probabilité, sachant qu'une période a commencé dans l'état i , pour que la période suivante commence dans l'état j (8.23)

Corrélations entre les débuts de 2 périodes consécutives

b - Comment calculer ces diverses probabilités

- La plus simple à calculer est $P(j/i)$. En effet, compte tenu du sens physique de (8.8), on a

$$P(j/i) = \Lambda_j \int_0^\infty dt |c_{ji}(t)|^2 \quad (8.24)$$

où les Λ_j sont les taux de départ globaux à partir de j , donnés en (8.7) et où $c_{ji}(t)$ est donné en (8.6)

les $P(j/i)$ obéissent à la condition de normalisation

$$\sum_j P(j/i) = 1 \quad (8.25)$$

qui exprime que, si le système est entré dans l'état i de $E(N_1, N_2)$ à $t=0$, et si les 3 valeurs propres de (8.5) ont une partie imaginaire négative non nulle (pas d'état piège parfait dans $E(N_1, N_2)$), alors le système aura certainement quitté $E(N_1, N_2)$ à $t=\infty$. (Voir Appendice)

- D'après la définition d'une probabilité conditionnelle

$$P([j, i]) = P(j/i) P(i) \quad (8.26)$$

Connaisant les $P(j/i)$ d'après (8.24), il nous faut maintenant, pour obtenir les $P([j, i])$, expliquer comment on calcule les $P(i)$.

- • Une période commençant par j , de probabilité $P(j)$, suit nécessairement une période commençant par $i=1, 2$ ou e , de probabilité $P(i)$. On en déduit que

$$P(j) = \sum_i P(in:j/in:i) P(i) \quad (8.27)$$

où $P(in:j/in:i)$ est défini en (8.23)

• Par ailleurs, une période qui a commencé dans i se termine nécessairement dans un état $k=1, 2$ ou e , avec un saut quantique $j \leftarrow k$ qui amène le système dans la période suivante commençant par j . On peut donc écrire

$$P(in:j/in:i) = \sum_k \pi_{jk} P(k/i) \quad (8.28)$$

où π_{jk} = Probabilité, pour un saut quantique s'effectuant à partir de l'état k d'une multiplicité, d'aboutir dans l'état j d'une multiplicité voisine (8.29)

L'examen de la figure 3 montre que

$$\pi_{j1} = \delta_{ej} \quad \pi_{j2} = \delta_{ej} \quad \pi_{je} = \frac{\tilde{\Gamma}_1}{\tilde{\Gamma}} \delta_{1j} + \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\tilde{\Gamma}} \delta_{2j} \quad (8.30)$$

Notons que les π_{jk} sont normalisés

$$\sum_j \pi_{jk} = 1 \quad (8.31)$$

• Finalement, les $P(i)$ sont donnés par un système linéaire et homogène de 3 équations

$$\sum_i \alpha_{ji} P(i) = 0 \quad \text{avec } j=1, 2, e \quad (8.32)$$

dont les coefficients α_{ji} valent, d'après (8.27) et (8.28)

$$\alpha_{ji} = \sum_k \pi_{jk} P(k/i) - \delta_{ji} \quad (8.33)$$

La somme des lignes du déterminant associé à α_{ji} est nulle puisque

$$\sum_j \alpha_{ji} = \sum_k \left(\sum_j \pi_{jk} \right) P(k/i) - \sum_i \delta_{ji} = 1 - 1 = 0 \quad (8.34)$$

compte tenu de (8.31) et (8.25). Ceci montre que le système homogène (8.31) a une solution non nulle. Cette solution non nulle n'est déterminée qu'à un coefficient multiplicatif près, fixé par la relation de normalisation

$$\sum_i P(i) = 1 \quad (8.35)$$

Récapitulation sur les calculs à faire

(i) Résolution de l'équation de Schrödinger associée à (8.5) avec les 3 conditions initiales possibles : état initial = 1, 2 ou e

↳ Calcul des 9 fonctions $c_{ji}(t)$

(ii) Calcul des $P(j|i)$ au moyen de (8.24)

(iii) Calcul des $P(i)$ au moyen de (8.32), compte tenu de (8.33), (8.30) et (8.35)

(iv) Calcul des $P([j,i])$ au moyen de (8.26)

c - Durée moyenne d'une période $[j,i]$

- Dans toutes les considérations qui précèdent (§§ a et b), chaque période $[j,i]$ n'est caractérisée que par l'état d'entrée i et l'état de sortie j , et les calculs de probabilité ne tiennent compte que de ces données.

On peut se poser d'autres questions qui nécessitent la connaissance d'autres caractéristiques des périodes $[j,i]$. Supposons par exemple que l'on tire sur l'axe des temps, un temps t au hasard. La probabilité de trouver à cet instant le système dans une période $[j,i]$ ne dépendra pas seulement de la probabilité a priori $P([j,i])$ d'une période $[j,i]$ dans la suite de périodes représentée sur la figure 5, mais aussi de la durée moyenne de cette période. Une période qui dure un temps long est avantagée dans un tel tirage au sort par rapport à une période qui dure un temps court.

- L'équation (8.8) donne la probabilité pour qu'une période, commencée dans l'état i à $t=0$, s'achève dans l'état j entre t et $t+dt$. La durée d'une telle période $[j,i]$ est t . On en déduit que le temps moyen $T(j,i)$ d'une période $[j,i]$ est égal à

$$T(j,i) = \frac{\lambda_j \int_0^\infty t |c_{ji}(t)|^2 dt}{\lambda_j \int_0^\infty |c_{ji}(t)|^2 dt} = \frac{\lambda_j \int_0^\infty t |c_{ji}(t)|^2 dt}{P(j|i)} \quad (8.36)$$

- Durée moyenne d'une période quelconque : T

Il faut moyenner les $T(j,i)$ avec des poids $P([j,i])$ (qui sont normalisés, compte tenu de (8.26), (8.25) et (8.35))

$$T = \sum_i \sum_j T(j,i) P([j,i]) \quad (8.37)$$

d - Variation moyenne du nombre de photons ω_L

- D'après (8.19), ΔN_L vaut +1 pour les périodes $[1,2]$ et $[1,e]$, -1 pour les périodes $[2,1]$ et $[e,1]$, 0 pour toutes les autres périodes

On en déduit que la variation moyenne $\langle \Delta N_L \rangle$ du nombre de photons ω_L pour une période quelconque est donnée par

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \mathcal{P}([1,2]) + \mathcal{P}([1,e]) - \mathcal{P}([2,1]) - \mathcal{P}([e,1]) \quad (8.38)$$

la condition d'amplification du champ ω_L , étant $\langle \Delta N_1 \rangle > 0$.

- On peut aussi calculer la vitesse de variation moyenne de N_1 . Prenons N périodes consécutives avec $N \gg 1$. La durée moyenne de l'ensemble de ces N périodes vaut NT . La variation moyenne de N_1 , à l'issue de ces N périodes est $N \langle \Delta N_1 \rangle$. On en déduit

$$\left\langle \frac{\Delta N_1}{\Delta t} \right\rangle = \frac{\langle \Delta N_1 \rangle}{T} = \frac{\mathcal{P}([1,2]) + \mathcal{P}([1,e]) - \mathcal{P}([2,1]) - \mathcal{P}([e,1])}{\sum_j \sum_i T(j,i) \mathcal{P}([j,i])} \quad (8.39)$$

- Nous expliquerons également dans le cours IX suivant comment calculer les populations stationnaires des états g_1, g_2, e

Références

- 1 - A. Imamoglu, J.E. Field, S.E. Harris Phys. Rev. Lett. 66, 1154 (1991)
- 2 - C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg. Processus d'Interaction entre photons et atomes - Référence déjà donnée page II-10
- 3 - Travail non encore publié, fait en collaboration avec B. Zambon et E. Arimondo.

Appendice Démonstration de $\sum_j \mathcal{P}(j|i) = \sum_j \lambda_j \int_0^\infty |c_{j,i}(t)|^2 dt = 1$

- L'équation de Schrödinger relative à (8.5), s'écrit pour un état initial quelconque $\{c_j(0)\}$ avec $\sum_j |c_j(0)|^2 = 1$

$$\dot{c}_j(t) = -\frac{\lambda_j}{2} c_j(t) - \frac{i}{\hbar} \sum_k h_{jk} c_k(t) \quad (8.40)$$

où λ_j est le taux de départ global de j (venant des termes imaginaires diagonaux de 8.5) et où h_{jk} est la partie hermitique de (8.5) (une fois les termes imaginaires diagonaux enlevés)

$$h_{jk} = h_{kj}^* \quad (8.41)$$

- A partir de (8.40) et de l'équation complexe conjuguée, on obtient

$$\frac{d}{dt} |c_j(t)|^2 = \dot{c}_j^*(t) c_j(t) + \dot{c}_j(t) c_j^*(t) = -\lambda_j |c_j(t)|^2 - \frac{i}{\hbar} \sum_k [c_j^*(t) h_{jk} c_k(t) - c_k^*(t) h_{kj} c_j(t)] \quad (8.42)$$

Intégrons (8.42) de 0 à $+\infty$, sommions sur j et utilisons (8.41). Il vient

$$\underbrace{\sum_j |c_j(\infty)|^2}_{=0} - \underbrace{\sum_j |c_j(0)|^2}_{=1} = - \sum_j \lambda_j \int_0^\infty |c_j(t)|^2 dt - \underbrace{\frac{i}{\hbar} \sum_j \sum_k [c_j^*(t) h_{jk} c_k(t) - c_k^*(t) h_{kj} c_j(t)]}_{=0} \quad (8.43)$$

Le 1^{er} terme du membre de gauche est nul puisque le système a certainement quitté $E(N_1, N_2)$ à $t = +\infty$ (nous supposons qu'il n'y a pas d'état piège parfait dans $E(N_1, N_2)$). Le dernier terme du membre de droite est nul (pour le voir il suffit d'interventer les indices de sommation j et k dans l'un des 2 termes). Un tel résultat exprime que l'évolution sous l'effet de l'hamiltonien hermitique h ne peut changer la norme du vecteur. L'égalité des termes restants donne finalement $1 = \sum_j \lambda_j \int_0^\infty |c_j(t)|^2 dt$, et ceci quel que soit l'état initial $c_j(0)$, en particulier si $c_j(0) = \delta_{ij}$, auquel cas $c_j(t)$ n'est autre, d'après (8.6), que $c_{ji}(t)$, c.q.f.d.