

4 - Evolution de l'état fondamental à la limite semiclassique

a) Equation d'évolution de σ_{gg}

- Dans (2.44), on remplace σ_{eg} et $\tilde{\sigma}_{ge}$ par leurs expressions approchées (3.1.a) et (3.1.b), $\vec{R}$ étant remplacé par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$, puisqu'on considère ici la limite semiclassique. On obtient ainsi

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g + \frac{1}{i\hbar^2} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} (\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L(\vec{r})) (\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^*(\vec{r})) \sigma_{gg} - \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \sigma_{gg} (\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L(\vec{r})) (\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^*(\vec{r})) \quad (4.1)$$

La 1^{ère} ligne décrit le repeuplement de l'état fondamental à partir de l'état excité, σ_{ee} étant donné par (3.6) et les termes retombée par émission spontanée étant donnés en (2.36). La 2^{ème} ligne de (4.1) décrit l'effet de l'excitation laser sur les atomes se trouvant dans l'état fondamental

- Posons

$$\hbar G^+(\vec{r}) = \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^*(\vec{r}) \quad \hbar G^-(\vec{r}) = \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L(\vec{r}) = [\hbar G^+(\vec{r})]^\dagger \quad (4.2)$$

Si l'on sépare les parties réelle et imaginaire de $\pm \frac{1}{i\hbar^2} \frac{1}{\delta \pm i\frac{\Gamma}{2}}$ dans la 2^{ème} ligne de (4.1) et que l'on utilise (4.2), on peut réécrire (4.1) sous la forme

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g - i \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [G^- G^+, \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \{G^- G^+, \sigma_{gg}\}_+ \quad (4.3)$$

où $\{U, V\}_+ = UV + VU$. On voit apparaître ainsi la somme d'un commutateur et d'un anticommutateur de σ_{gg} avec l'opérateur $- +$ qui est hermitique puisque

$$(G^- G^+)^\dagger = (G^+)^\dagger (G^-)^\dagger = G^- G^+ \quad (4.4)$$

Une telle structure de l'équation d'évolution de σ_{gg} ^{a déjà été obtenue} dans les premières théories quantiques du cycle de pompage optique (Refs. 1, 2).

- Pour la suite, il sera utile d'introduire quelques notations.

• Posons $\vec{E}_L^+(\vec{r}) = \hat{E}(\vec{r}) \mathcal{E}_L(\vec{r}) \quad \vec{E}_L^-(\vec{r}) = \hat{E}^*(\vec{r}) \mathcal{E}_L(\vec{r}) = \vec{E}_L^+(\vec{r})^* \quad (4.5)$

où $\hat{E}$ est un vecteur polarisation normé, éventuellement complexe (pour décrire des polarisations circulaires ou elliptiques)

$$\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{E}^*(\vec{r}) = 1 \quad (4.6)$$

et où $\mathcal{E}_L(\vec{r})$ est réel et représente l'amplitude du champ

• L'opérateur $\vec{d}^+$ est un opérateur vectoriel. Les composantes standard $\hat{e}_q \cdot \vec{d}^+$ de $\vec{d}^+$ où

$$\hat{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \quad \hat{e}_0 = \hat{e}_z \quad \hat{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y) \quad (4.7)$$

satisfont au théorème de Wigner-Eckart

$$\langle J_e, e_m | \hat{E}_q \cdot \vec{d} | J_g, g_\mu \rangle = D \langle J_e m | J_g 1 \mu q \rangle \quad (4.8) \quad \text{IV-2}$$

où D est un "élément de matrice réduit" indépendant de q, m, μ , et où $\langle J_e m | J_g 1 \mu q \rangle$ est un coefficient de Clebsch-Gordan.

On peut donc écrire $\vec{d}^+ = D \hat{d}^+$ (4.9)

où $\hat{d}^+$ est un opérateur vectoriel sans dimensions, tel que les éléments de matrice de $\hat{E}_q \cdot \hat{d}^+$ sont des coefficients de Clebsch-Gordan.

• A partir de D et E_L , on peut introduire la fréquence de Rabi Ω_1

$$-D E_L(\vec{r}) = \frac{\hbar \Omega_1(\vec{r})}{2} \quad (4.10)$$

et le paramètre de saturation s

$$s(\vec{r}) = \frac{\Omega_1^2(\vec{r})/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (4.11)$$

de même que les quantités

$$\Gamma'(\vec{r}) = \Gamma \frac{s(\vec{r})}{2} \quad (4.12.a) \quad \delta'(\vec{r}) = \delta \frac{s(\vec{r})}{2} \quad (4.12.b)$$

• Introduisons enfin l'opérateur hermitique sans dimensions A

$$A(\vec{r}) = P_g \hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^- P_e \hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+ P_g = P_g \hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^- P_e \hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+ P_g \quad (4.13)$$

qui est proportionnel à $G^- G^+$.

- Avec ces notations, l'équation (4.3) peut être réécrite

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\sigma}_{gg} &= P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g \\ &- i \delta'(\vec{r}) [A(\vec{r}), \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma'(\vec{r})}{2} \{A(\vec{r}), \sigma_{gg}\} \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Dans (4.14), σ_{ee} peut être réexprimé en fonction de σ_{gg} grâce à l'équation (3.6) qui s'écrit avec les nouvelles notations.

$$\begin{aligned} \sigma_{ee} &= \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} G^+(\vec{r}) \sigma_{gg} G^-(\vec{r}) \\ &= \frac{\Gamma'(\vec{r})}{\Gamma} \hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+ \sigma_{gg} \hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^- \end{aligned} \quad (4.15)$$

b. Hamiltonien effectif associé aux déplacements lumineux

- Le terme en δ' de (4.14) s'écrit (évolution hamiltonienne)

$$\frac{1}{i\hbar} [H_{\text{eff}}, \sigma_{gg}] \quad \text{où} \quad H_{\text{eff}} = \hbar \delta'(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) \quad (4.16)$$

L'hamiltonien effectif H_{eff} décrit les effets réactifs de VAL.

(δ' varie avec δ comme une courbe de dispersion - voir 4.12.b et 4.10)

- L'opérateur A est hermitique et a donc des valeurs propres réelles a_α et des vecteurs propres orthogonaux $|g_\alpha\rangle$

$$A |g_\alpha\rangle = a_\alpha |g_\alpha\rangle \quad (4.17)$$

Les a_α et $|g_\alpha\rangle$ dépendent en général de $\vec{r}$, comme $\hat{E}(\vec{r})$. Chaque sous-niveau $|g_\alpha\rangle$ a un déplacement lumineux bien défini, $\hbar \delta'_\alpha$,

qui est proportionnel, comme $\delta(\vec{r})$, à l'intensité laser. Si tous les a_z sont différents, la dégénérescence Zeeman de g est complètement levée par l'irradiation laser.

- Les opérateurs $\hat{d}^+$ et $\hat{d}^-$ qui apparaissent dans l'expression (4.13) de A sont des opérateurs vectoriels. Comme A est un produit de 2 opérateurs vectoriels, sa décomposition en opérateurs tensoriels irréductibles $T_q^{(k)}$ fait apparaître seulement les valeurs $k=0$ (scalaire), $k=1$ (vecteur), $k=2$ (tenseur). Le terme $k=0$ correspond à un déplacement d'ensemble de g . Le terme $k=1$ a la même structure que celui qui serait associé à un champ magnétique fictif, le terme $k=2$ peut souvent être décrit en termes de champ électrique fictif. Si le moment cinétique J_g de g est $J_g = 1/2$, seules les valeurs $k=0$ et $k=1$ sont permises (théorème de Wigner-Eckart). Les symétries des champs fictifs associés aux déplacements lumineux sont déterminées par les symétries du vecteur polarisation $\hat{E}(\vec{r})$. Voir référence 5.

C - Relaxation associée au pompage optique

- Le dernier terme de (4.14) décrit comment l'état fondamental se vide sous l'effet de l'excitation. La contribution de ce dernier terme à la vitesse de variation de la population $\langle g_\alpha | \dot{\rho} | g_\alpha \rangle$ de l'état propre $|g_\alpha\rangle$ de A est égale à

$$- a_\alpha \Gamma'(\vec{r}) \langle g_\alpha | \rho | g_\alpha \rangle \quad (4.18)$$

Pour chaque état propre $|g_\alpha\rangle$ de A , on peut donc définir une probabilité par unité de temps de quitter l'état $|g_\alpha\rangle$, égale à $a_\alpha \Gamma'(\vec{r})$. Comme δ , Γ' est proportionnel à l'intensité laser. Enfin, Γ' varie avec δ comme une courbe d'absorption, ce qui montre que les effets physiques décrits par Γ' sont des effets dissipatifs.

- Le 1^{er} terme de (4.14), décrit la retombée dans g de atomes qui ont absorbé un photon et sont l'état dans e est décrit par (4.15). En utilisant (4.15) et (2.36.a) on peut écrire ce terme sous la forme

$$P_g \dot{\rho}_{ee} P_g = \Gamma'(\vec{r}) \sum_{q=\pm 1, 0, -1} (\hat{E}_q^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+) \sigma_{gg} (\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_q \cdot \hat{d}^+) \quad (4.19)$$

La combinaison de (4.19) et du dernier terme de (4.14) décrit la relaxation de l'état fondamental sous l'effet des processus d'absorption et d'émission spontanée de photons. Des différences de population importantes peuvent apparaître entre les sous-niveaux Zeeman de g (pompage optique). Les éléments non diagonaux de σ_{gg} ("cohérences" Zeeman) peuvent, dans certains cas, varier de manière importante quand un champ magnétique statique est balayé autour de certaines valeurs (effet Hanle).

- On peut vérifier aisément que l'équation d'évolution (4.14) conserve la trace de σ_{gg}

$$\frac{d}{dt} \text{Tr } \sigma_{gg} = 0 \quad (4.20)$$

En utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire et le fait que

$$\sum_q (\hat{E}_q \cdot \hat{d}^+) (\hat{E}_q^* \cdot \hat{d}^-) = \hat{d}^+ \cdot \hat{d}^- = P_e \quad (4.21)$$

(compte tenu de la relation de normalisation des coefficients de Clebsch-Gordan), on voit en effet que la trace du 1^{er} terme (4.19) vaut

$$\Gamma'(\vec{r}) \text{Tr} (\hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^-) P_e (\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+) \sigma_{gg} = \Gamma'(\vec{r}) \text{Tr} [A(\vec{r}) \sigma_{gg}] \quad (4.22)$$

et compense exactement la trace du dernier terme de (4.14), celle du 2^{ème} terme, qui est un commutateur, étant automatiquement nulle.

d. Effet du déplacement de l'atome à la vitesse $\vec{v}_0$.

- Si l'atome se déplace à la vitesse, $\vec{r}$ est égal à $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ dans toutes les équations précédentes.
- En général la polarisation $\hat{E}(\vec{r})$ varie d'un point à l'autre, de même que l'intensité laser qui apparaît dans $S(\vec{r})$. L'atome est donc soumis à un pompage optique et à des déplacements lumineux qui varient en général dans le temps. Comme l'atome réagit à des variations de l'excitation optique avec des constantes de temps longues, de l'ordre de $1/\Gamma'$, il répond avec un certain retard à ces variations temporelles. Nous analyserons plus loin l'importance d'un tel retard dans les nouveaux mécanismes de refroidissement laser.

5. Evolution de l'état fondamental. Traitement entièrement quantique

a) Cas général

- Les calculs sont très analogues à ceux du §4 et ne seront pas repris. Les modifications sont les suivantes.
- Dans l'équation (4.14), il faut
 - rajouter au 2^{ème} membre $[\vec{p}^2/2M, \sigma_{gg}]/i\hbar$
 - remplacer dans $S'(\vec{r})$, $\Gamma'(\vec{r})$, $A(\vec{r})$, $\vec{r}$ par l'opérateur $\vec{R}$ et regrouper $S'(\vec{r})$ et $A(\vec{r})$, $\Gamma'(\vec{r})$ et $A(\vec{r})$, de manière que dans le calcul des commutateurs ou de l'anticommutateur l'ordre entre $\vec{R}$ et σ_{gg} soit respecté.
 - utiliser pour $P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g$ l'équation (2.45) au lieu de (2.36.a)

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{gg} = & P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2M}, \sigma_{gg} \right] \\ & - i [S'(\vec{R}) A(\vec{R}), \sigma_{gg}] - \frac{1}{2} \{ \Gamma'(\vec{R}) A(\vec{R}), \sigma_{gg} \}_+ \end{aligned} \quad (4.23)$$

- Dans la 1^{ère} ligne de (4.15), il faut remplacer $\vec{r}$ par $\vec{R}$; dans la 2^{ème}, il faut remplacer $\Gamma'(\vec{r})$ par $\sqrt{\Gamma'(\vec{R})}$ à droite et $\sqrt{\Gamma'(\vec{R})}$ à gauche

$$\begin{aligned} \sigma_{ee} = & \frac{1}{S^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} G^+(\vec{R}) \sigma_{gg} G^-(\vec{R}) \\ = & \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\Gamma'(\vec{R})} \hat{E}(\vec{R}) \cdot \hat{d}^+ \sigma_{gg} \hat{E}^*(\vec{R}) \cdot \hat{d}^- \sqrt{\Gamma'(\vec{R})} \end{aligned} \quad (4.24)$$

b) Etude plus détaillée d'un exemple concret : atome à 2 niveaux à un noeud d'une onde stationnaire

Buts du calcul

- A partir de l'équation d'évolution de σ_{gg} , calculer $\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle$ et retrouver le résultat du cours II (page II-9) sur le coefficient de diffusion de l'impulsion.
- Compléter la discussion physique du § 3b ci-dessus, où l'on avait calculé σ_{ee}

$$\sigma_{ee} = \frac{s}{2} k_L X \sigma_{gg} k_L X \quad (4.25)$$

et où l'on s'était intéressé à la variation de $\langle P^2 \rangle$ quand un atome passe de g à e .

Equations donnant $\dot{\sigma}_{gg}$

- Par rapport au cas général où g est dégénéré, $A(\vec{R})$ est ici un nombre indépendant de $\vec{R}$ (comme $\hat{E}(\vec{R})$). $S'(\vec{R})$ et $\Gamma'(\vec{R})$ sont respectivement égaux à $S'k_L^2 X^2$ et $\Gamma'k_L^2 X^2$, où $S' = S\delta/2$ et $\Gamma' = \Gamma\delta/2$ sont respectivement le déplacement lumineux et le taux d'absorption aux ventres de l'onde stationnaire où le paramètre de saturation vaut S . Comme dans l'équation (4.25), on a remplacé au voisinage du noeud $\sin k_L X$ par $k_L X$.
- L'équation (4.23) devient alors

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{gg} = & P_g \sigma_{ee} P_g + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{P^2}{2M}, \sigma_{gg} \right] \\ & - i S' [k_L^2 X^2, \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma'}{2} \{k_L^2 X^2, \sigma_{gg}\}_+ \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Dans l'état interne fondamental, les états externes qui ont un déplacement lumineux et un taux d'absorption bien définis sont les états propres de l'opérateur X^2 , donc les états propres $|x\rangle$ de l'opérateur position. Un atome dans l'état $|g, x\rangle$ a un déplacement lumineux $\delta'(x)$ et un taux d'absorption $\Gamma'(x)$ donnés par

$$\delta'(x) = S' k_L^2 x^2 \quad \Gamma'(x) = \Gamma' k_L^2 x^2 \quad (4.27)$$

Contribution à $d\langle P^2 \rangle/dt$ du terme d'énergie cinétique

Multiplions $[P^2/2M, \sigma_{gg}]/i\hbar$ par P^2 et prenons la trace. En utilisant l'invariance de la trace d'un produit dans une permutation circulaire, on trouve un résultat nul.

Contribution à $d\langle P^2 \rangle/dt$ des atomes qui retombent de e à g

- C'est la contribution du 1^{er} terme de (4.26).
- Nous avons vu dans le § 3b ci-dessus qu'un atome passant de g à e augmente en moyenne son $\langle P^2 \rangle$ d'une quantité

de l'ordre de $\hbar^2/\Delta x^2$ (où $\Delta x = a$ est la largeur en x du paquet d'ondes), beaucoup plus grande que $\hbar^2 k_L^2$, et nous avons donné une interprétation physique de ce résultat. Quand l'atome retombe de e à g , il transfère à g cette augmentation de $\langle P^2 \rangle$. S'y ajoute la contribution des photons de fluorescence, qui n'étant pas corrélés avec l'impulsion de l'atome dans e , ajoutent à $\langle P^2 \rangle$ une contribution de l'ordre de $\hbar^2 k_L^2$ négligeable devant $\hbar^2/\Delta x^2$. On peut donc négliger l'impulsion des photons de fluorescence, ce qui revient simplement à écrire le 1^{er} terme de (4.26) sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt} \sigma_{gg}\right)_{sp} = \Gamma \sigma_{ee} = \Gamma \frac{\Delta}{2} k_L x \sigma_{gg} k_L x \quad (4.28)$$

où l'on a utilisé (4.25). En multipliant les 2 membres de (4.28) par P^2 et en prenant la trace, on obtient

$$\left(\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle\right)_{sp} = \Gamma \frac{\Delta}{2} k_L^2 \langle x P^2 x \rangle \quad (4.29)$$

Dans le cours III, nous avons calculé $\langle x P^2 x \rangle$ pour le paquet d'ondes gaussien (3.14) et trouvé $\langle x P^2 x \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2$

Contribution à $d\langle P^2 \rangle/dt$ des atomes qui quittent g

- C'est la contribution des 2 dernières termes de (4.26). Nous supposons ici $\delta = 0$, de sorte que $\delta' = 0$. Il ne reste donc plus que le dernier terme de (4.26)
- En multipliant le dernier terme de (4.26) par P^2 et en prenant la trace, on obtient

$$\left(\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle\right)_{\text{départ}} = -\Gamma \frac{\Delta}{2} k_L^2 \left\langle \frac{1}{2} (x^2 P^2 + P^2 x^2) \right\rangle \quad (4.30)$$

La relation de commutation $[X, f(P)] = i\hbar \frac{df(P)}{dP}$ donne alors

$$\begin{cases} x^2 P^2 = x P^2 x + 2i\hbar x P \\ P^2 x^2 = x P^2 x - 2i\hbar P x \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\text{de sorte que } \frac{1}{2} (x^2 P^2 + P^2 x^2) = x P^2 x - \hbar^2 \quad (4.32)$$

$$\text{et par suite } \left(\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle\right)_{\text{départ}} = -\frac{\Gamma \Delta}{2} k_L^2 (\langle x P^2 x \rangle - \hbar^2) \quad (4.33)$$

- Pour le paquet d'ondes gaussien (3.14), $\langle x P^2 x \rangle$ vaut $3\hbar^2/4$, de sorte que la parenthèse de (4.33) vaut $-\hbar^2/4$, et $(d\langle P^2 \rangle/dt)_{\text{départ}}$ vaut $\Gamma \Delta \hbar^2 k_L^2 / 8$. Le départ des atomes de g contribue donc lui aussi à augmenter $\langle P^2 \rangle$. L'interprétation est la suivante. Comme l'amplitude de probabilité de quitter g après un temps t varie en $e^{-\Gamma(x)t/2}$ et que $\Gamma(x)$ croît avec x (voir (4.27)), les atomes qui restent dans g ont une fonction d'onde qui est d'autant plus réduite qu'on s'écarte de $x=0$

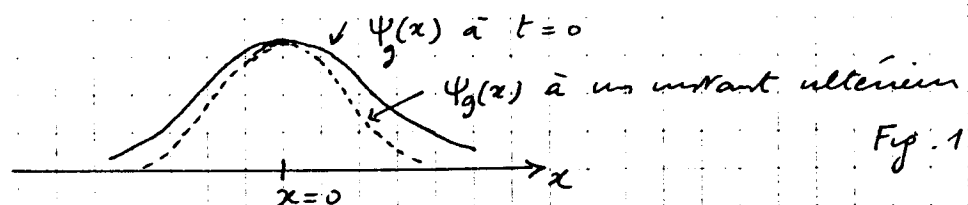


Fig. 1

La fonction d'onde des atomes restant dans g est donc plus étroite en x , donc plus large en p . (Nous avons implicitement supposé ici que σ_1 est suffisamment grand pour qu'on puisse négliger l'étalement du paquet d'ondes entre 0 et t devant l'effet d'affinement en x discuté ici.

Vitesse de variation globale de $\langle P^2 \rangle$

- Ajoutons (4.29) et (4.33). On obtient, quelle que soit la forme exacte du paquet d'ondes

$$\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle = \Gamma \frac{d}{dt} \hbar^2 k_L^2 = 2 \Gamma s_0 \hbar^2 k_L^2 = 2D \quad (4.34)$$

avec

$$D = \Gamma s_0 \hbar^2 k_L^2 \quad (4.35)$$

- On retrouve ainsi le résultat (2.61) du cours II, mais avec une compréhension physique plus poussée

Références

- Théorie quantique du cycle de pompage optique

(1) J.-P. Barrat et C. Cohen-Tannoudji

J. Phys. Rad. 22, 329 et 443 (1961)

(2) C. Cohen-Tannoudji, Thèse d'état, Paris (1962)

Ann. Phys. (Paris) 7, 423 et 469 (1962)

- Premières observations expérimentales des déplacements lumineux

(3) C. Cohen-Tannoudji C. R. Acad. Sci. 252, 394 (1961)

(4) M. Arditi and T. R. Carver, Phys. Rev 124, 800 (1961)

- Levée de dégénérescence Zeeman par déplacements lumineux et équivalence avec des champs magnétiques et électriques fictifs

(5) C. Cohen-Tannoudji et J. Dupont, Roc Phys Rev A5, 968 (1972)
et références in