

1 - Introduction

- Buts de ce chapitre : Donner une idée générale des approches théoriques qui ont été développées pour décrire quantitativement le mouvement d'un atome dans une onde laser. Introduire les équations de base sous une forme permettant de les appliquer au cas d'un atome ayant plusieurs sous-niveaux dans l'état fondamental.
- Description du mouvement par une force. La plus proche de la description classique. Ne s'applique que si l'atome est bien localisé en position et en vitesse (limite semiclassique). Approche de Gordon et Ashkin [Ref. 1].

Comme toutes les approches quantiques essayant de généraliser des équations classiques, cette approche utilise le point de vue de Heisenberg.

Séparation de la force agissant sur l'atome en une force moyenne et une force de Langevin fluctuante permettant de calculer le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique.

- Description du mouvement atomique à partir des équations d'évolution de la matrice densité atomique (Comment évolue l'impulsion moyenne de l'atome ? la variance de cette impulsion ? Peut-on introduire des fonctions de distribution ? ...)
 - Approche qui utilise l'autre point de vue, celui de Schrödinger.
 - Divers niveaux de description suivant qu'on s'intéresse à l'évolution d'une base d'opérateurs atomiques (équations de Bloch-Langevin), à celle de la matrice densité atomique incluant les 2 types de degrés de liberté internes et externes (équations de Bloch optiques généralisées), à celle de la matrice densité interne (équations de Bloch optiques).
 - A la limite semiclassique, et quand il existe 2 échelles de temps bien distinctes permettant de découpler variables externes et variables internes, ces 2 approches sont équivalentes (voir Ref. 2)

2 - Hamiltoniens

- Récapitule la dynamique du système global (voir Fig. 1 du cours I)

$$H = H_A + H_V + V_{AL} + V_{AV} \quad (2.1)$$

- Il n'y a pas d'hamiltonien H_L du champ laser quand ce dernier est décrit comme un champ extérieur classique (voir Equ. 1.2)

Dans les approches de type atome habillé où le champ laser est traité quantiquement, il faut ajouter à (2.1) l'hamiltonien H_L du mode laser

- Hamiltonien atomique : H_A

$$H_A = H_A^{\text{ext}} + H_A^{\text{int}} \quad (2.2)$$

$$H_A^{\text{ext}} = \vec{P}^2 / 2M \quad (2.3)$$

$$H_A^{\text{int}} = \hbar \omega_A P_e \quad (2.4)$$

$$P_e = \sum_m |e_m\rangle \langle e_m| \quad P_g = \sum_\mu |g_\mu\rangle \langle g_\mu| \quad (2.5)$$

P_e et P_g : Projecteurs sur les sous-espaces de dégénérescence de e et g

- Hamiltonien du champ quantique dans l'état vide : H_V

(II-2)

$$H_V = \sum_j \hbar \omega_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2})$$

(2.6)

Somme d'hamiltoniens harmoniques relatifs aux divers modes j

Développement du champ électrique quantique en modes j

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \sum_j \epsilon_{\omega_j} a_j \vec{\epsilon}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} + h.c. \quad (2.7)$$

$$\epsilon_{\omega_j} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 L^3}} \quad \vec{E}^+(\vec{r}) : \text{composante de fréquence positive de } \vec{E} \text{ variant en } e^{-i\omega_j t} \text{ dans le point de vue de Heisenberg}$$

(2.8)

- Hamiltonien d'interaction atome-laser : V_{AL}

$$V_{AL} = -\vec{d} \cdot \vec{E}_L(\vec{R}, t) \quad (2.9)$$

$$\vec{d} = \vec{d}^+ + \vec{d}^- \quad (2.10.a)$$

$$\vec{d}^+ = P_e \vec{d} P_g \quad \vec{d}^- = P_g \vec{d} P_e \quad (2.10.b)$$

Approximation du champ tournant

$$V_{AL} = -\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} - \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) e^{+i\omega_L t} \quad (2.11)$$

$$\vec{E}_L(\vec{R}, t) = \vec{E}_L^+(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} + \vec{E}_L^-(\vec{R}) e^{+i\omega_L t} \quad (2.12)$$

- Hamiltonien d'interaction atome-champ quantique du vide : V_{AV}

$$V_{AV} = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{R}) \simeq -\vec{d}^+ \cdot \vec{E}^+(\vec{R}) - \vec{d}^- \cdot \vec{E}^-(\vec{R}) \quad (2.13)$$

3. Force radiative à la limite semiclassical

Equations de Heisenberg pour $\vec{R}$ et $\vec{P}$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{R}, H] = \frac{1}{i\hbar} [\vec{R}, H_A^{\text{ext}}] = \frac{\vec{P}}{M} \quad (2.14.a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= M \ddot{\vec{R}} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{P}, H] = -\frac{\partial H}{\partial \vec{R}} \\ &= -\vec{\nabla} V_{AL}(\vec{R}) - \vec{\nabla} V_{AV}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (2.14.b)$$

Champ du vide et champ source

- Dans V_{AV} figurent $\vec{E}(\vec{R})$ et les opérateurs d'annihilation $a_j(t)$ et de création $a_j^\dagger(t)$ d'un photon du mode j (voir Equ. 2.7)

- L'équation de Heisenberg de $a_j(t)$ est une équation différentielle linéaire avec un terme source atomique, qui s'intègre aisément (voir Ref. 3 Complément A_V)

$$a_j(t) = \underbrace{a_j(0) e^{-i\omega_j t}}_{a_j^{\text{vide}}(t)} + a_j^{\text{source}}(t) \quad (2.15)$$

1^{re} terme : champ du vide évoluant librement entre 0 et t

2^{me} terme : champ source venant du dipôle atomique

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{E}^{\text{vide}}(\vec{R}, t) + \vec{E}^{\text{source}}(\vec{R}, t) \quad (2.16)$$

- Choix dans V_{AV} de l'ordre normal (tous les a_j à droite, les $a_j^\dagger$ à gauche) conduisant à des calculs plus simples quand on prend des valeurs moyennes dans le vide $|0\rangle$ puisque

$$a_j |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | a_j^\dagger = 0 \quad (2.17)$$

Opérateur force radiative semi-classique

[II-3]

- On reporte (2.16) dans (2.13) puis dans (2.14.b). Le gradient de $\vec{E}_{source}(\vec{r}, t)$ dû au dipôle au point $\vec{R}$ où le dipôle est situé est nul (c'est une fonction paire de $\vec{r} - \vec{R}$). Seule subsiste donc dans $-\vec{\nabla} V_{AV}(\vec{R})$ la contribution de $\vec{E}_{vide}(\vec{R})$, de sorte qu'on obtient pour $\vec{P}$ c'est à dire pour l'opérateur force $\vec{F}(\vec{R}, t)$

$$\vec{F}(\vec{R}, t) = -\vec{\nabla} V_{AL}(\vec{R}, t) - : \vec{\nabla} V_{AV}^{vide}(\vec{R}, t) : \quad (2.18)$$

où le dernier terme représente la contribution de $\vec{E}_{vide}$ dans V_{AV} rangé dans l'ordre normal

- Si le paquet d'ondes atomique est bien localisé en position et en vitesse à $t=0$, on peut remplacer, au voisinage de $t=0$, l'opérateur $\vec{R}(t)$ qui apparaît dans (2.18) par le nombre $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$

$$\vec{R}(t) \longrightarrow \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (2.19)$$

$$\text{où } \vec{r}_0 = \langle \vec{R}(0) \rangle \quad \vec{v}_0 = \langle \vec{P}(0) \rangle / M \quad (2.20)$$

L'opérateur (2.18) devient alors un opérateur qui n'agit plus que sur les variables du champ et les variables atomiques internes. Ce n'est plus un opérateur vis à vis des variables atomiques externes

Force moyenne $\vec{F}$

- On remplace $\vec{R}$ par $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ dans (2.18) et on prend la valeur moyenne. Dans le point de vue de Heisenberg, l'état du champ est le même qu'à $t=0$. C'est donc le vide. Le 2^{ème} terme de (2.18) donne alors une valeur moyenne nulle à cause de l'ordre normal et de (2.17). On obtient pour la force moyenne

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t, t) = -\langle \vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) \rangle |_{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t} \quad (2.21)$$

- En utilisant (2.12), on peut réécrire (2.21) sous la forme

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = + \sum_{i=x,y,z} \left[\langle d_i^+ \rangle \vec{\nabla} E_{Li}^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \langle d_i^- \rangle \vec{\nabla} E_{Li}^-(\vec{r}) e^{+i\omega_L t} \right] \quad (2.22)$$

où $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$.

Force de Langevin $\delta \vec{F}$

- On peut toujours écrire (en posant encore $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$)

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t) + \delta \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (2.23)$$

$$\text{où } \delta \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t) - \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t) - \langle \vec{F}(\vec{r}, t) \rangle \quad (2.24)$$

est la partie fluctuante de $\vec{F}$

- Séparons les contributions de V_{AL} et V_{AV} à $\delta \vec{F}$. En utilisant (2.18) (2.21), (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} \delta \vec{F}_{laser}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) + \langle \vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) \rangle \\ &= \sum_{i=x,y,z} \left[\delta d_i^+ \vec{\nabla} E_{Li}^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \delta d_i^- \vec{\nabla} E_{Li}^-(\vec{r}) e^{+i\omega_L t} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{où } \delta d_i^\pm = d_i^\pm - \langle d_i^\pm \rangle \quad (2.26)$$

est la partie fluctuante du dipôle atomique

$$\delta \vec{F}_{vide}(\vec{r}, t) = - : \vec{\nabla} V_{AV}^{vide}(\vec{r}, t) : + \underbrace{\langle : \vec{\nabla} V_{AV}^{vide}(\vec{r}, t) : \rangle}_{=0} \\ = \sum_{i=x,y,z} \left[d_i^+ \vec{\nabla} E_{vide,i}^+(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} E_{vide,i}^-(\vec{r}, t) d_i^- \right] \quad (2.27)$$

- le coefficient de diffusion D de l'impulsion atomique, défini par $\frac{d}{dt} \Delta P^2(t) = 2D$ (2.28)

où $\Delta P^2(t) = \langle [\vec{P}(t) - \langle \vec{P}(t) \rangle]^2 \rangle$ est la variance de l'impulsion est relié simplement à la fonction de corrélation de $\delta \vec{F}$ [voir Ref. 1]

$$D = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \delta \vec{F}(t) \cdot \delta \vec{F}(t-\tau) \rangle \quad (2.29)$$

Remplaçons $\delta \vec{F}$ par $\delta \vec{F}_{laser} + \delta \vec{F}_{vide}$. On peut montrer que les termes croisés en $\delta \vec{F}_{laser} \cdot \delta \vec{F}_{vide}$ ont une contribution nulle dans (2.29). On peut donc écrire

$$D = D_{laser} + D_{vide} \quad (2.30)$$

avec

$$D_{laser} = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \delta \vec{F}_{laser}(t) \cdot \delta \vec{F}_{laser}(t-\tau) \rangle \quad (2.31)$$

$$D_{vide} = \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \delta \vec{F}_{vide}(t) \cdot \delta \vec{F}_{vide}(t-\tau) \rangle \quad (2.32)$$

D_{laser} est associé aux fluctuations des échanges d'impulsion lors des processus d'absorption et d'émission induite de photons laser. D_{vide} est associé aux fluctuations des échanges d'impulsion lors des processus d'émission spontanée.

- Pour obtenir la force moyenne $\vec{F}$ et le coefficient de diffusion D , il faut calculer la valeur moyenne et les fonctions de corrélation du dipôle atomique. Ceci nous amène tout naturellement aux équations du mouvement de la matrice densité atomique.
- Voir en appendice un exemple simple de calcul de coefficient de diffusion.

4. Equations du mouvement de la matrice densité atomique

a. Equations de Bloch optiques (voir Ref. 3, chapitres IV et V)

Approximations

- On ne quantifie pas les degrés de liberté externes. $\vec{R}$ est remplacé par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$. $\vec{p}^2/2M$ n'est pas inclus dans H .
- L'effet de l'émission spontanée est décrit par une équation pilote. Approximation justifiée par la petitesse du temps T_c , temps de corrélation des fluctuations du vide (voir cours I).
- Les termes de relaxation par émission spontanée ne sont pas modifiés par la présence du laser. Pendant T_c , le couplage V_{AL} n'a pas le temps de se manifester ($\Omega, T_c \ll 1$).
 $\hookrightarrow$ On ajoute indépendamment les vitesses d'évolution de σ dues à $H_A^{int} + V_{AL}$ et à l'émission spontanée.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} [H_A^{int} + V_{AL}, \sigma]}_{\text{Evolution hamiltonienne}} + \underbrace{\mathcal{F}(\sigma)}_{\text{Relaxation due à l'émission spontanée}} \quad (2.33)$$

Structure de σ

- Transition atomique $J_g \leftrightarrow J_e$: $J_g(J_e)$ moment cinétique de $g(e)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{ee} & \sigma_{eg} \\ \sigma_{ge} & \sigma_{gg} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ge} = \sigma_{eg}^+$$

$\sigma_{ee} = P_e \sigma P_e$ Matrice carrée $(2J_e+1) \times (2J_e+1)$ } Contiennent des populations et des cohérences Zeeman.
 $\sigma_{gg} = P_g \sigma P_g$ " " $(2J_g+1) \times (2J_g+1)$
 $\sigma_{eg} = P_e \sigma P_g$ Matrice rectangle $(2J_e+1) \times (2J_g+1)$ Cohérences optiques.

Termes décrivant l'effet de l'émission spontanée (voir Ref. 4)

- Très simples pour σ_{ee} et σ_{eg} (2.35.a)

$$P_e \mathcal{T}(\sigma) P_e = -\Gamma \sigma_{ee}$$

L'atome quitte e avec un taux Γ

$$P_e \mathcal{T}(\sigma) P_g = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg} \quad (2.35.b)$$

Les cohérences optiques sont amorties avec un taux $\Gamma/2$ (le déplacement de Lamb est réinclus dans ω_A)

- Un peu plus compliqué pour σ_{gg} . Les termes correspondants décrivent l'alimentation de g à partir de e

$$P_g \mathcal{T}(\sigma) P_g = \Gamma \sum_{q=+1,0,-1} (\hat{d}^- \cdot \hat{E}_q^*) \sigma_{ee} (\hat{d}^+ \cdot \hat{E}_q) \quad (2.36.a)$$

$$\hat{E}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x + i\hat{E}_y) \quad \hat{E}_0 = \hat{E}_z \quad \hat{E}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x - i\hat{E}_y) \quad (2.36.b)$$

$\hat{d}$: opérateur dipôle réduit, proportionnel à $\vec{d}$, mais sans dimension et normalisé de la manière suivante : $\langle e_{m+q} | \hat{E}_q \cdot \hat{d}^+ | g_m \rangle$ est le coefficient de Clebsch-Gordan de la transition $g_m \rightarrow e_{m+q}$, normalisé de manière que la somme des carrés de ces coefficients partant d'un sous-niveau excité quelconque soit égale à 1. Cette condition est équivalente à

$$\hat{d}^+ \cdot \hat{d}^- = P_e \quad (2.37)$$

- Exemple concret : Transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$

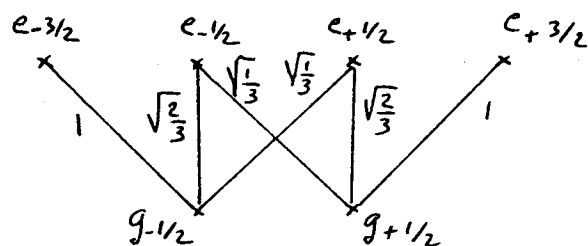


Fig. 1

$$(\dot{\sigma}_{g_{+1/2} g_{+1/2}})_{sp} = \Gamma \sigma_{e_{3/2} e_{3/2}} + \frac{2}{3} \Gamma \sigma_{e_{1/2} e_{1/2}} + \frac{1}{3} \Gamma \sigma_{e_{-1/2} e_{-1/2}} \quad (2.38.a)$$

$$(\dot{\sigma}_{g_{-1/2} g_{-1/2}})_{sp} = \Gamma \sigma_{e_{-3/2} e_{-3/2}} + \frac{2}{3} \Gamma \sigma_{e_{-1/2} e_{-1/2}} + \frac{1}{3} \Gamma \sigma_{e_{1/2} e_{1/2}} \quad (2.38.b)$$

$$(\dot{\sigma}_{g_{+1/2} g_{-1/2}})_{sp} = \Gamma \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_{e_{+3/2} e_{+1/2}} + \Gamma \frac{2}{3} \sigma_{e_{+1/2} e_{-1/2}} + \Gamma \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_{e_{-1/2} e_{-3/2}} \quad (2.38.c)$$

Le fait que l'émission spontanée ne couple pas les populations aux cohérences Zeeman et ne couple entre elles que des cohérences Zeeman de même Δm est dû à l'isotropie du vide et à l'invariance par rotation de V_{AL} .

$$\dot{\sigma}_{eg} = \frac{1}{i\hbar} P_e [H_A^{\text{int}}, \sigma] P_g + \frac{1}{i\hbar} P_e [V_{AL}(\vec{r}, t), \sigma] P_g + \underbrace{P_e \mathcal{T}(\sigma) P_g}_{= -\Gamma \sigma_{eg}/2} \quad (2.39)$$

$$P_e [V_{AL}(\vec{r}, t), \sigma] P_g = -\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \sigma_{gg} e^{-i\omega_L t} + \sigma_{ee} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} \quad (2.40)$$

Bien que la fonction classique $\vec{E}_L^+(\vec{r})$ commute avec les opérateurs internes σ_{ee} et σ_{gg} , l'ordre entre ces 2 quantités a été conservé tel qu'il apparaît dans le calcul du commutateur. En effet, dans le paragraphe suivant, $\vec{r}$ sera remplacé par l'opérateur $\vec{R}$ dans $\vec{E}_L^+(\vec{r})$, et σ sera un opérateur agissant non plus seulement sur les degrés de liberté internes mais également sur les degrés de liberté externes. Les 2 opérateurs σ et $\vec{E}_L^+(\vec{R})$ ne commutent plus alors nécessairement et il faudra garder l'ordre tel qu'il apparaît dans (2.40).

Pour éliminer les $e^{-i\omega_L t}$ qui apparaissent dans (2.40), posons

$$\tilde{\sigma}_{eg} = \sigma_{eg} e^{i\omega_L t} \quad (2.41)$$

On obtient alors

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{eg} = -\left(\frac{\Gamma}{2} - i\delta\right) \tilde{\sigma}_{eg} - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \sigma_{gg} - \sigma_{ee} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \right] \quad (2.42)$$

où $\delta = \omega_L - \omega_A$ est le désaccord (voir Eq. 1.6)

Equations d'évolution de σ_{ee} et σ_{gg}

Un calcul analogue donne, compte tenu de (2.35.a)

$$\dot{\sigma}_{ee} = -\Gamma \sigma_{ee} - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{r}) \right] \quad (2.43)$$

et

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{T}(\sigma) P_g - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{r}) \tilde{\sigma}_{eg} - \tilde{\sigma}_{ge} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \right] \quad (2.44)$$

b. Equations de Bloch optiques généralisées

Eléments nouveaux par rapport au paragraphe précédent.

- On quantifie les degrés de liberté externes. Les σ_{ab} avec $a, b = e \text{ ou } g$ sont des opérateurs à la fois internes et externes, qui ont des éléments de matrice en représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$: $\langle \vec{r}' | \sigma_{ab} | \vec{r}'' \rangle$, en représentation $\{|\vec{p}\rangle\}$: $\langle \vec{p}' | \sigma_{ab} | \vec{p}'' \rangle$ ou en représentation de Wigner : $W_{ab}(\vec{r}, \vec{p})$
- Le champ laser $\vec{E}_L^+(\vec{R})$ ou $\vec{E}_L^-(\vec{R})$, qui apparaît dans V_{AL} , contient l'opérateur $\vec{R}$ et est donc un opérateur externe. Il faut donc faire attention à l'ordre entre σ_{ab} et $\vec{E}_L^{\pm}(\vec{R})$ dans le calcul de $[V_{AL}, \sigma]$ (voir plus haut le commentaire après (2.40)).
- Il faut garder l'hamiltonien $\vec{p}^2/2M$ dans H .
- Les termes décrivant l'émission spontanée ont la même forme (2.35) pour σ_{ee} et σ_{eg} . Pour σ_{gg} , il sont modifiés, ce qui se comprend aisément puisqu'ils doivent décrire le transfert d'impulsion de e à g quand l'atome retombe de e à g en émettant un photon de fluorescence [voir Refs. 2, 3 et 4, 5]. De telles équations sont également discutées dans les Refs. 6 et 7.

Elles s'écrivent

$$P_g \mathcal{T}(\sigma) P_g = \Gamma \int \frac{d^2 k}{8\pi/3} \sum_{\hat{E} \perp \hat{k}} (\hat{d} \cdot \hat{E}^*) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \sigma_{ee} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} (\hat{d}^+ \cdot \hat{E}) \quad (2.45)$$

où $\hat{d}^-$ et $\hat{d}^+$ ont été déjà définis plus haut, à propos de (2.36). Dans (2.45), $\hat{k}$ est un vecteur unitaire caractérisant la direction dans laquelle est émis un photon de fluorescence de vecteur d'onde

$$\vec{k} = \frac{\omega_A}{c} \hat{k} \quad (2.46)$$

avec une polarisation $\hat{E}$ perpendiculaire à $\hat{k}$. Les 2 opérateurs $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}$ et $e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$, qui encadrent σ_{ee} dans (2.45), font que $\langle \vec{p}'' | \sigma_{gg} | \vec{p}' \rangle$ est alimentée par émission spontanée à partir de $\langle \vec{p}'' + \hbar \vec{k} | \sigma_{ee} | \vec{p}' + \hbar \vec{k} \rangle$. On voit apparaître clairement que l'émission spontanée d'un photon $\vec{k}$ diminue l'impulsion atomique de $\hbar \vec{k}$. Le fait que les transferts par émission spontanée se font à $\vec{p}' - \vec{p}''$ constant est dû à l'homogénéité de l'état vide $|0\rangle$ et à l'invariance de V_{AV} par translations.

Nouvelles équations d'évolution

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{eg} = & -(\frac{\Gamma}{2} - i\delta) \tilde{\sigma}_{eg} + \frac{1}{i\hbar} [\frac{\vec{p}^2}{2m}, \tilde{\sigma}_{eg}] \\ & - \frac{1}{i\hbar} [\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \sigma_{gg} - \sigma_{ee} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R})] \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\dot{\sigma}_{ee} = -\Gamma \sigma_{ee} + \frac{1}{i\hbar} [\frac{\vec{p}^2}{2m}, \sigma_{ee}] - \frac{1}{i\hbar} [\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R})] \quad (2.48)$$

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{T}(\sigma) P_g + \frac{1}{i\hbar} [\frac{\vec{p}^2}{2m}, \sigma_{gg}] - \frac{1}{i\hbar} [\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \tilde{\sigma}_{eg} - \tilde{\sigma}_{ge} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R})] \quad (2.49)$$

Remarque

Nous mentionnons ici juste pour mémoire les équations de Bloch-Langevin obtenues en écrivant les équations de Heisenberg pour les opérateurs atomiques $|a, \vec{p}'\rangle \langle b, \vec{p}''|$ avec $a, b = g$ ou e , et en utilisant (2.16) pour exprimer l'opérateur champ qui apparaît dans V_{AV} . En choisissant l'ordre normal dans V_{AV} , on peut montrer que les termes provenant du champ source donnent naissance aux termes d'amortissement par émission spontanée étudiés plus haut, alors que les termes provenant du champ du vide donnent naissance à des forces de Langevin [voir Ref. 3, complément AV où cette démarche est exposée dans le cas où les degrés de liberté externes sont traités classiquement]. L'intérêt des équations de Bloch-Langevin est qu'elles permettent de démontrer le théorème de régression quantique qui explique comment calculer les fonctions de corrélations atomiques (moyennes à 2 temps) à partir des équations de Bloch optiques (généralisées) qui décrivent l'évolution des moyennes à 1 temps.

5. Nouvelles approximations adaptées aux nouveaux mécanismes

Le fait d'avoir inclus l'existence de plusieurs sous-niveaux Zeeman dans e et g complique considérablement les équations d'évolution de σ , et leur résolution semble beaucoup plus difficile. Il est possible néanmoins d'introduire de nouvelles approximations adaptées aux nouveaux mécanismes et de retrouver des équations simples permettant de dépeindre des images physiques fructueuses.

a - Faibles intensités

Les nouveaux mécanismes reposent sur l'existence de temps internes qui deviennent longs à faible intensité, comme le temps de pompage optique τ_p entre sous-niveaux Zeeman de g .

Le régime intéressant est donc celui des faibles intensités. On peut alors éliminer adiabatiquement les cohérences optiques $\tilde{\sigma}_{eg}$ et l'état excité σ_{ee} des équations et obtenir des équations plus simples qui ne font plus intervenir que σ_{gg} et qui sont interprétables en termes d'hamiltonien effectif associé aux déplacements lumineux et de temps de pompage optique.

De même la force moyenne peut être réexprimée entièrement en fonction de σ_{gg} et des réponses réactive et dissipative de l'atome.

b - Très faibles vitesses

Les nouveaux mécanismes conduisent à des températures très basses, où les vitesses sont très faibles. La dépendance en vitesse des forces radiatives est caractérisée, non plus par le paramètre $k\nu/\Gamma$, comme c'est le cas pour le refroidissement Doppler, mais par les paramètres $k\nu/\Gamma'$ ou $k\nu/S'$, où Γ' et S' sont l'élargissement et le déplacement de l'état fondamental sous l'effet de la lumière (à faible intensité $\Gamma', S' \ll \Gamma$). Dans l'élimination adiabatique des cohérences optiques, qui sont amorties avec un temps $\Gamma/2$, on peut donc négliger l'effet de l'hamiltonien $\vec{p}^2/2M$, ce qui revient à faire un calcul à l'ordre 0 en $k\nu/\Gamma$.

c - De nouvelles approches

En plus des simplifications précédentes, le fait d'avoir des très faibles intensités permet d'envisager des calculs perturbatifs, par exemple des amplitudes de diffusion du photon incident par l'atome, dans lesquels on peut suivre ce qui se passe, non seulement sur l'atome (comme c'est le cas quand on travaille sur la seule matrice densité atomique), mais également sur le photon incident. On peut également, dans ce cas, étudier l'importance des corrélations qui s'établissent entre l'atome et le photon. Ce point sera crucial pour comprendre les échanges d'impulsions entre atome et champ aux moments d'une onde stationnaire.

Références

- (1) J.P. Gordon and A. Ashkin, Phys. Rev. A21, 1606 (1980)
- (2) J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. B18, 1661 (1985)
- (3) Processus d'interaction entre photons et atomes - Référence (2) des cours I
- (4) C. Cohen-Tannoudji in Les Houches XXVII, 1975 - Frontiers in Laser Spectroscopy, R. Balian, S. Haroche and S. Liberman eds (North Holland, 1977)
- (5) S. Stenholm, Appl. Phys. 15, 287 (1978)
- (6) Y. Castin, H. Wallis and J. Dalibard, J.O.S.A. B6, 2046 (1989)
- (7) A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B6, 2112 (1989)

Appendice : Exemple simple de calcul de coefficient de diffusion (II-9)

Atome à 2 niveaux à un nœud d'une onde stationnaire

Notations

$$\vec{E}_L(x,t) = \vec{e}_3 E_0 \sin k_L x \cos \omega_L t \quad (2.50)$$

$$\vec{d} = \vec{e}_3 d(\hat{d}^+ + \hat{d}^-) \quad \hat{d}^+ = |e\rangle\langle g| \quad \hat{d}^- = |g\rangle\langle e| \quad (2.51)$$

d : élément de matrice du dipôle qui a la même polarisation, $\vec{e}_3$, que celle de l'onde stationnaire laser

$$E_{Li}^+(x) = \delta i_3 \frac{1}{2} E_0 \sin k_L x = E_{Li}^-(x) \quad (2.52)$$

$$\text{On pose} \quad d E_0 = \hbar \Omega_1 \quad (2.53)$$

Ω_1 est la fréquence de Rabi aux ventres

$$\delta = \frac{\Omega_1^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.54)$$

δ est le paramètre de saturation aux ventres. $\delta = 4 \delta_0$ où δ_0 est le paramètre de saturation associé à chacune des 2 ondes planes progressives formant l'onde stationnaire.

Calcul de D_{vide} et D_{laser}

- Au voisinage d'un nœud, on peut négliger la fluorescence $\rightarrow D_{vide} \approx 0$
- D'après (2.52), au voisinage d'un nœud, par exemple en $x=0$

$$\vec{\nabla} E_{Li}^\pm = \delta i_3 \frac{1}{2} k_L E_0 \vec{e}_x \quad (2.55)$$

Si l'on reporte (2.55) dans (2.25), on obtient, compte tenu de (2.51) et (2.53),

$$\langle \vec{\delta F}_{laser}(t) \cdot \vec{\delta F}_{laser}(t-\tau) \rangle = \hbar^2 k_L^2 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \left[\langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t-\tau) \rangle e^{i\omega_L \tau} + \langle \delta \hat{d}^+(t) \delta \hat{d}^-(t-\tau) \rangle e^{-i\omega_L \tau} \right] \quad (2.56)$$

- Calcul des fonctions de corrélation du dipôle atomique

D'après le théorème de régression quantique, pour $t > t'$, $\langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle$ obéit à une équation analogue à celle de $\langle \delta \hat{d}^-(t) \rangle$. Or $\langle \hat{d}^- \rangle = \sigma_{eg}$ et au voisinage d'un nœud, où $\vec{E}_L = \vec{0}$, $\dot{\sigma}_{eg} = -(i\omega_A + \frac{\Gamma}{2}) \sigma_{eg}$. Donc

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle = -(i\omega_A + \frac{\Gamma}{2}) \langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle \quad (2.57)$$

On en déduit que, pour $x \approx 0$ et $t > t'$

$$\langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle = e^{-i\omega_A \tau} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau} \langle \delta \hat{d}^-(t') \delta \hat{d}^+(t') \rangle = e^{-i\omega_A \tau} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau} (\sigma_{gg}(t') - |\langle \hat{d}^+(t') \rangle|^2) \quad (2.58)$$

puisque, à un nœud où $\vec{E}_L = \vec{0}$, $\sigma_{gg} = 1$ et $\langle \hat{d}^+ \rangle = 0$. Un calcul analogue donne

$$\langle \delta \hat{d}^+(t) \delta \hat{d}^-(t-\tau) \rangle = 0 \quad (2.59)$$

(en effet, cette fonction de corrélation est proportionnelle à $\sigma_{ee}(t-\tau) - |\langle \hat{d}^-(t-\tau) \rangle|^2$ qui est nul à un nœud)

- Finalement, pour $\tau > 0$ et $x \approx 0$

$$\langle \vec{\delta F}_{laser}(t) \cdot \vec{\delta F}_{laser}(t-\tau) \rangle = \hbar^2 k_L^2 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 e^{i(\omega_L - \omega_A)\tau} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau} \quad (2.60)$$

- Reprenons alors (2.60) dans (2.31). Il vient

$$\begin{aligned} D_{laser} &= \hbar^2 k_L^2 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{i\delta\tau} e^{-\frac{\Gamma}{2} \tau} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{\Omega_1^2 / 8}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \\ &= \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{\delta}{4} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \delta_0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

qui est aussi le coefficient de diffusion global puisque en $x=0$, $D_{vide} = 0$

- Résultat intrigant : En $x=0$, il n'y a pas d'absorption de lumière et pourtant l'impulsion de l'atome fluctue puisque $D \neq 0$!