

Le refroidissement "Sisyphé"

Etude semiclassique d'un modèle à 1 dimension

Buts de ce cours

Présenter sur un modèle très simple l'un des nouveaux mécanismes les plus importants de refroidissement laser, appelé refroidissement "Sisyphé" parce que l'atome en mouvement monte plus de côtes de potentiel qu'il n'en descend.

On se limite ici à une mélasse optique à 1 dimension. La configuration laser et la transition atomique choisies sont telles que la force moyenne subie par l'atome est due uniquement à la variation spatiale des énergies des sous-niveaux de l'état fondamental ayant un déplacement lumineux bien défini (les fonctions d'onde de ces sous-niveaux sont indépendantes de la position de l'atome et les pressions de radiation exercées par les 2 ondes laser se propageant en sens opposé s'équilibrent toujours exactement). Le mécanisme étudié est donc très pur.

Le traitement présenté ici est semiclassique et suit de très près celui de la référence 1 et celui de la référence 2.

① - Le modèle étudié

Configuration laser

- 2 ondes laser, de même amplitude E_0 , de même fréquence ω_L , se propageant en sens opposé le long de Oz et de polarisations linéaires croisées le long de Ox et Oy (Fig. 1)

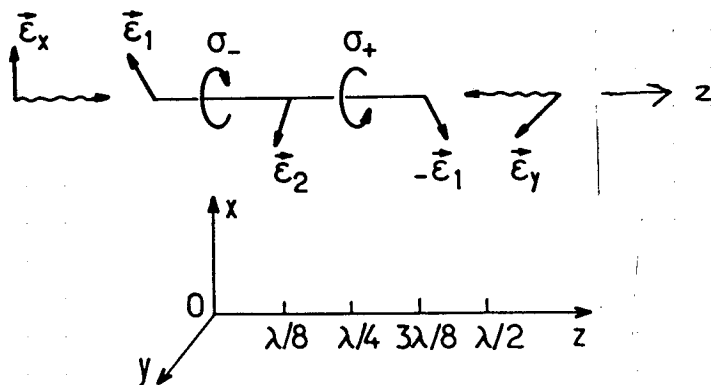


Fig. 1

$$\vec{E}_L(z, t) = \vec{E}_L^+(z) e^{-i\omega_L t} + \text{c.c.} \quad (6.1)$$

$$\vec{E}_L^+(z) = (\hat{E}_x e^{ikz} - i \hat{E}_y e^{-ikz}) E_0 \quad (6.2)$$

- Le facteur $-i$ dans 6.2 est choisi de manière à avoir une polarisation σ_- en $z=0$. La polarisation change très vite le long de Oz, devenant elliptique, linéaire, σ_+ , elliptique, linéaire... (Fig. 1)

Forts gradients de polarisation - Gradients d'ellipticité

- Calcul de la polarisation $\hat{E}(z)$ en z et de l'amplitude $E_L(z)$ en z

$$\vec{E}_L^+(z) = E_0 \sqrt{2} \left[\cos kz \frac{\hat{E}_x - i \hat{E}_y}{\sqrt{2}} + i \sin kz \frac{\hat{E}_x + i \hat{E}_y}{\sqrt{2}} \right] \quad (6.3)$$

$$\hat{E}(z) = \cos kz \hat{E}_- - i \sin kz \hat{E}_+ \quad (6.4.a) \quad E_L(z) = \sqrt{2} E_0 \quad (6.4.b)$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan sont donnés sur la Fig. 2

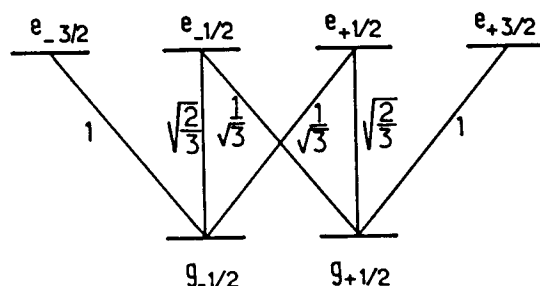


Fig. 2

Simplifications qui en résultent pour la force moyenne

(i) Force $\vec{F}_1$ en S' (voir cours V, § 2)

- Comme il n'y a que 2 sous-niveaux dans g , l'opérateur

$$A(z) = (\hat{E}^*(z) \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}(z) \cdot \hat{d}^+) \quad (6.5)$$

est diagonal dans la base $\{|g_{+1/2}\rangle, |g_{-1/2}\rangle\}$. En effet, $\hat{E}(z)$ est une superposition linéaire de $\hat{E}_+$ et $\hat{E}_-$ (voir 6.4.a), et les seuls éléments non diagonaux de A ne peuvent apparaître qu'entre 2 sous-niveaux $|g_\mu\rangle$ et $|g_{\mu'}\rangle$ avec $\mu - \mu' = \pm 2$, ce qui est impossible ici.

- Les états propres de A sont donc $|g_{+1/2}\rangle$ et $|g_{-1/2}\rangle$ et sont indépendants de z . Il n'y a donc pas de contribution à $\vec{F}_1$ d'effets non adiabatiques liés à la variation spatiale des fonctions d'onde : le dernier terme (de 5.12) est nul.

- Par contre, comme la polarisation $\hat{E}(z)$ varie avec z , les valeurs propres de $A(z)$ dépendent de z . Les énergies $E_{\pm 1/2}(z)$ des 2 sous-niveaux $|g_{\pm 1/2}\rangle$ déplacés par la lumière varient donc avec z . Si l'on note

$$\Pi_{\pm 1/2}(z) = \langle g_{\pm 1/2} | \hat{A}(z) | g_{\pm 1/2} \rangle \quad (6.6)$$

les populations de ces 2 sous-niveaux pour un atome en z , le 1^{er} terme de (5.12) devient ici

$$\vec{F}_1(z) = -\Pi_{+1/2}(z) \vec{\nabla} E_{+1/2}(z) - \Pi_{-1/2}(z) \vec{\nabla} E_{-1/2}(z) \quad (6.7)$$

(ii) Force $\vec{F}_2$ en Γ' (voir cours V, §§ 3 et 4)

- Comme on se limite ici à une mélasse à 1 dimension, $\vec{F}_2$ est simplement la différence entre les pressions de radiation exercées par les 2 ondes 1 et 2 ($\hat{E}_1 = \hat{E}_x$, $\hat{E}_2 = \hat{E}_y$) se propageant en sens inverse - voir équation (5.29) du cours V.

- Comme les intensités des 2 ondes sont égales, il suffit de calculer

$$\langle (\hat{E}_1^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_1 \cdot \hat{d}^+) \rangle - \langle (\hat{E}_2^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_2 \cdot \hat{d}^+) \rangle$$

Or $\hat{E}_1 = \hat{E}_x$ et $\hat{E}_2 = \hat{E}_y$ sont tous 2 des superpositions à poids égal de $\hat{E}_+$ et $\hat{E}_-$. Comme il ne peut y avoir de cohérences Zeeman $\Delta\mu = 2$ dans g (à cause de $J_g = 1/2$), il n'y a pas de termes croisés entre les composantes σ^+ et σ^- de $\hat{E}_1$ (ou $\hat{E}_2$). Pour obtenir $\langle (\hat{E}_1^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_1 \cdot \hat{d}^+) \rangle$, il suffit donc de sommer les populations

$\Pi_{+1/2}$ et $\Pi_{-1/2}$ ^{pondérées} par la demi-somme des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan des transitions σ^+ et σ^- partant de chacun de ces 2 sous-niveaux. On obtient alors aisément

$$\langle (\hat{E}_1^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_1 \cdot \hat{d}^+) \rangle = \frac{2}{3} (\Pi_{+1/2} + \Pi_{-1/2}) = \frac{2}{3} = \langle (\hat{E}_2^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_2 \cdot \hat{d}^+) \rangle \quad (6.8)$$

Les pressions de radiation des 2 ondes s'équilibrent donc toujours exactement et $\vec{F}_2$ est identiquement nul.

(iii) Récapitulation

- la force moyenne totale se réduit donc à (6.7) et n'est due qu'à la variation spatiale des déplacements lumineux.
- Pour aller plus loin, il faut maintenant calculer les déplacements lumineux $E_{\pm 1/2}(z)$, ainsi que les populations $\Pi_{\pm 1/2}(z)$ des 2 sous-niveaux $|g_{\pm 1/2}\rangle$. Il faut donc revenir à l'équation d'évolution de σ_{gg} , introduite dans le cours IV, et résoudre cette équation pour un atome, soit immobile en z , soit passant en z à la vitesse v .

② Déplacements lumineux (voir cours IV, § 4b)

Matrice représentant $A(z)$ dans la base $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$

- Nous avons déjà mentionné plus haut que $\langle g_{+1/2} | A(z) | g_{-1/2} \rangle = 0$
- Pour calculer $A_{\pm\pm} = \langle g_{\pm 1/2} | A(z) | g_{\pm 1/2} \rangle$, on utilise (6.4.a) et les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 2. On trouve

$$\begin{cases} A_{++}(z) = \sin^2 kz + \frac{1}{3} \cos^2 kz = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz \\ A_{--}(z) = \frac{1}{3} \sin^2 kz + \cos^2 kz = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz \end{cases} \quad (6.9)$$

Calcul de $E_{\pm 1/2}(z)$

$$\begin{cases} E_{+1/2}(z) = \hbar \delta' A_{++} = \hbar \delta' (1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz) \\ E_{-1/2}(z) = \hbar \delta' A_{--} = \hbar \delta' (1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz) \end{cases} \quad (6.10)$$

où
$$\delta' = \delta \frac{s}{2} = \delta s_0 \quad (6.11)$$

s étant le paramètre de saturation pour une onde d'amplitude E_L . Comme $E_L = \sqrt{2} E_0$ (voir 6.4.b), $s = 2 s_0$ où s_0 est le paramètre de saturation de chacune des 2 ondes 1 et 2, d'où la 2^{ème} égalité (6.11)

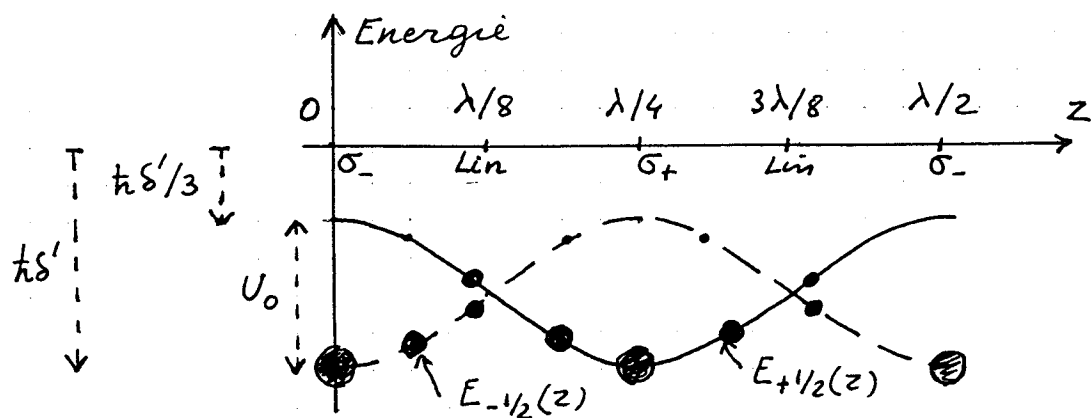
- Les énergies des 2 sous-niveaux $g_{\pm 1/2}$ varient donc sinusoidalement dans l'espace, et en opposition de phase (Fig. 3)

On peut écrire

$$E_{+1/2}(z) - E_{-1/2}(z) = -\frac{2}{3} \hbar \delta' (\cos^2 kz - \sin^2 kz) = U_0 \cos 2kz \quad (6.12)$$

où
$$U_0 = -\frac{2}{3} \hbar \delta' = -\frac{2}{3} \hbar \delta s_0 \quad (6.13)$$

est la profondeur des puits de potentiels associés à chacun de ces 2 niveaux oscillant dans l'espace (Fig. 3). On suppose ici $\delta < 0$, de sorte que $U_0 > 0$.



Nouvelle expression de la force moyenne

En reportant (6.10) dans (6.7), on obtient, compte tenu de (6.13)

$$\begin{aligned}\vec{F}(z) &= \vec{F}_1(z) = \hat{e}_3 k U_0 \sin 2kz [\pi_{+1/2}(z) - \pi_{-1/2}(z)] \\ &= \hat{e}_3 k U_0 \sin 2kz \mathcal{M}(z)\end{aligned}\quad (6.14)$$

$$\text{ou} \quad \mathcal{M}(z) = \pi_{+1/2}(z) - \pi_{-1/2}(z) \quad (6.15)$$

est la différence de populations entre les 2 sous-niveaux $|g_{\pm 1/2}\rangle$.

③ Equations du pompage optique (voir cours IV, § 4c)

Paramètre Γ'

$$\Gamma' = \Gamma \frac{\Delta}{2} = \Gamma \Delta_0 \quad (6.16)$$

Termes de départ : diagonaux dans la base $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} \pi_{+1/2}(z) \right)_{\text{départ}} = -\Gamma' A_{++} \pi_{+1/2}(z) = -\Gamma' \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz \right) \pi_{+1/2}(z) \\ \left(\frac{d}{dt} \pi_{-1/2}(z) \right)_{\text{départ}} = -\Gamma' A_{--} \pi_{-1/2}(z) = -\Gamma' \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz \right) \pi_{-1/2}(z) \end{cases} \quad (6.17)$$

Termes de retombée

A cause de l'isotropie de l'émission spontanée, une population dans g ne peut être alimentée qu'à partir d'une population dans e . Or comme il n'y a pas de cohérence $\Delta m = 2$ dans g , une population dans e ne peut être alimentée par absorption qu'à partir d'une population dans g . Les termes de retombée ne comptent donc les populations dans g qu'aux populations dans g . Effectivement, les équations (6.19) deviennent ici, compte tenu de (6.4.a) et des coefficients de Clebsch-Gordan de la Fig. 2

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} \pi_{+1/2}(z) \right)_{\text{retombée}} = \Gamma' \left(\sin^2 kz + \frac{1}{9} \cos^2 kz \right) \pi_{+1/2}(z) + \Gamma' \frac{2}{9} \sin^2 kz \pi_{-1/2}(z) \\ \left(\frac{d}{dt} \pi_{-1/2}(z) \right)_{\text{retombée}} = \Gamma' \frac{2}{9} \cos^2 kz \pi_{+1/2}(z) + \Gamma' \left(\cos^2 kz + \frac{1}{9} \sin^2 kz \right) \pi_{-1/2}(z) \end{cases} \quad (6.18)$$

Vitesse de variation globale de $\pi_{\pm 1/2}(z)$

En ajoutant (6.17) et (6.18) on obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \pi_{+1/2}(z) = -\frac{2}{9} \Gamma' \cos^2 kz \pi_{+1/2}(z) + \frac{2}{9} \Gamma' \sin^2 kz \pi_{-1/2}(z) \\ \frac{d}{dt} \pi_{-1/2}(z) = \frac{2}{9} \Gamma' \cos^2 kz \pi_{+1/2}(z) - \frac{2}{9} \Gamma' \sin^2 kz \pi_{-1/2}(z) \end{cases} \quad (6.19)$$

Taux de pompage optique d'un niveau à l'autre

(VI-5)

- Les équations (6.19) s'interprètent très simplement en considérant que le pompage optique transfère l'atome du sous niveau $|g_{+1/2}\rangle$ (resp. $|g_{-1/2}\rangle$) vers le sous niveau $|g_{-1/2}\rangle$ (resp. $|g_{+1/2}\rangle$) avec un taux $\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}$ (resp. $\Gamma'_{-1/2 \rightarrow +1/2}$)

$$\begin{cases} \Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}(z) = \frac{2}{g} \Gamma' \cos^2 kz \\ \Gamma'_{-1/2 \rightarrow +1/2}(z) = \frac{2}{g} \Gamma' \sin^2 kz \end{cases} \quad (6.20)$$

- Les taux de pompage optique d'un sous-niveau à l'autre varient donc dans l'espace, avec la même période spatiale que les déplacements lumineux (6.9).

$\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}(z)$ est maximum quand $\cos^2 kz$ est maximum, c'est à dire en $z = 0, \lambda/2, \dots$ c'est à dire encore aux maxima de $E_{+1/2}(z)$ (voir Fig. 3). Par contre $\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}(z) = 0$ quand $\cos^2 kz = 0$, c'est à dire en $z = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$ c'est à dire encore aux minima de $E_{+1/2}(z)$ (voir Fig. 3).

Point très important pour la suite. Quand on se déplace le long de Oz sur l'une des 2 courbes $E_{\pm 1/2}(z)$, le taux de pompage optique vers l'autre sous-niveau est maximum au sommet des côtes de la courbe de potentiel, nul au fond des vallées.

Vitesse de variation de la différence de populations $\mathcal{M}(z) = \Pi_{+1/2}(z) - \Pi_{-1/2}(z)$

- On vérifie aisément sur (6.19) que $\Pi_{+1/2}(z) + \Pi_{-1/2}(z)$ ne varie pas et reste égal à 1

$$\Pi_{+1/2}(z) + \Pi_{-1/2}(z) = 1 \quad (6.21)$$

- En retranchant la 2^{ème} équation (6.19) de la 1^{ère} et en utilisant (6.15) et (6.21), on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(z) = -\frac{1}{\tau_p} [\mathcal{M}(z) + \cos 2kz] \quad (6.22)$$

où $\frac{1}{\tau_p} = \frac{2}{g} \Gamma' = \frac{2\Gamma\delta_0}{g} \quad (6.23)$

τ_p est le temps de pompage optique caractérisant la vitesse de variation de la différence de population entre les 2 sous-niveaux.

④ Atome en mouvement - L'effet Sisyphé

Un atome est lancé à la vitesse v_0 le long de Oz dans l'un des 2 sous-niveaux Zeeman, par exemple dans l'état $|g_{+1/2}\rangle$

a - Discussion qualitative dans le cas $\frac{1}{2} M v_0^2 \gg U_0$, $v_0 \tau_p \gg \lambda$

- Comme $v_0 \tau_p \gg \lambda$, l'atome parcourt plusieurs λ avant d'être pompé optiquement vers l'autre sous-niveau.
- Comme $\Gamma_{+1/2 \rightarrow -1/2}$ est maximal aux sommets de la courbe $E_{+1/2}(z)$ la transition $+1/2 \rightarrow -1/2$ se fera préférentiellement au voisinage d'un sommet, l'atome se retrouvant après la transition dans l'état $|g_{-1/2}\rangle$ au voisinage du fond d'une vallée de $E_{-1/2}(z)$ [voir Fig. 4]. Une telle

transition diminue l'énergie potentielle de l'atome, tout en laissant son énergie cinétique inchangée (on néglige pour le moment la variation d'énergie cinétique due à l'émission du photon de fluorescence et à l'absorption d'un photon laser - voir § b plus loin). L'énergie totale de l'atome diminue donc, comme cela est représenté sur la partie supérieure de la figure 4.

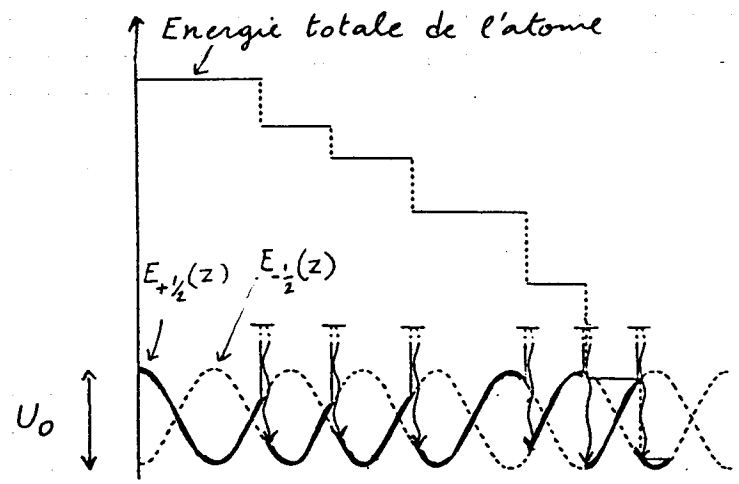


Fig. 4
(extraite de la Ref. 2)

- Le cycle précédent peut être répété plusieurs fois. Comme l'atome quitte le plus souvent une courbe de potentiel au voisinage d'un sommet pour se retrouver au fond d'une vallée dans l'autre courbe de potentiel, il gravit plus de côtes qu'il n'en descend, comme Sisyphe dans la mythologie grecque, d'où le nom donné à l'effet. Il ressort clairement de la discussion précédente que l'effet Sisyphe est dû à la conjonction de 2 effets
 - des déplacements lumineux oscillant dans l'espace
 - des taux de pompage optique variant dans l'espace et étant les plus importants du sous-niveau le plus élevé vers le sous-niveau le plus bas.
- Après un certain nombre de cycles, l'atome peut se retrouver piégé au fond d'un puits de potentiel. C'est le cas du dernier cycle de la figure 4. Son énergie peut reaugmenter ensuite à cause de la diffusion d'impulsion ou d'un pompage optique vers l'autre niveau. Mais on conçoit aisément que l'énergie de l'atome en régime stationnaire va s'exprimer en unités de U_0 . D'où la tentation de prendre U_0 de plus en plus petit pour avoir des températures d'équilibre de plus en plus basses. Voir cependant § b plus loin.
- Bilan d'impulsion et d'énergie.

Entre 2 cycles de fluorescence, le mouvement est conservatif. Quand l'atome gravit une côte, son énergie potentielle augmente et son énergie cinétique diminue. La variation d'impulsion de l'atome est, quant à elle, due à une redistribution cohérente des photons entre les 2 ondes laser se propageant en sens inverse.

Au cours d'un cycle de fluorescence, l'énergie potentielle perdue par l'atome est emportée par le photon de fluorescence qui a une énergie plus élevée que celle du photon laser absorbé. Cette dissipation d'énergie par processus de diffusion Raman anti-Stokes est essentielle pour l'effet Sisyphe.

b - Existence d'un seuil pour V_0

[VI-7]

Perte moyenne d'énergie potentielle par effet Sisyphé

- Nous supposons que l'atome va très vite : $v_{Tp} \gg \lambda$. Il parcourt plusieurs arches de $E_{\pm}(z)$ avant de passer d'un sous-niveau à l'autre par pompage optique. Sa répartition spatiale varie donc très peu avec z . Nous la supposons uniforme.

- Supposons l'atome dans $g_{-1/2}$. Il peut passer dans $g_{+1/2}$ au point z avec une probabilité $\Gamma_{-1/2 \rightarrow +1/2} = 2\Gamma' \sin^2 kz / g$ et son énergie potentielle varie alors de $E_{+1/2}(z) - E_{-1/2}(z) = V_0 \cos 2kz$. La moyenne spatiale de la variation d'énergie potentielle vaut donc

$$\overline{\Delta U} = V_0 \frac{\frac{2}{g} \sin^2 kz \cos 2kz}{\frac{2}{g} \sin^2 kz} = - \frac{V_0}{2} \quad (6.24)$$

↳ Même résultat pour des atomes dans $g_{+1/2}$ et passant dans $g_{-1/2}$. La perte moyenne d'énergie potentielle quand l'atome change de sous-niveau est donc $-V_0/2$.

- D'après les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 2, et d'après (6.4.a), pour un atome dans $g_{+1/2}$, le nombre de cycles (σ^+, σ^+) (absorption d'un photon σ^+ suivi de l'émission spontanée d'un photon σ^+), (σ^-, σ^-) , (σ^-, π) sont respectivement proportionnels à $\sin^2 kz \times 1$, $\cos^2 kz \times 1/g$, $\cos^2 kz \times 2/g$, c'est à dire encore à $g, 1, 2$. Seuls les cycles (σ^-, π) font changer l'atome de sous-niveau.

Sur 6 photons absorbés et réémis, un seul est donc utile en moyenne pour diminuer V_0 . Après N cycles de fluorescence, la variation moyenne d'énergie potentielle vaut donc

$$\overline{\Delta U} = - \frac{N}{6} \frac{V_0}{2} = - N \frac{V_0}{12} \quad (6.25)$$

Gain d'énergie cinétique le long de Oz dû aux photons de fluorescence

- Quand un atome excité d'impulsion $\vec{p}$ émet un photon de fluorescence $\hbar \vec{k}$, son impulsion passe de $\vec{p}$ à $\vec{p} - \hbar \vec{k}$, et son p_z^2 varie en moyenne de $\hbar^2 \langle k_z^2 \rangle$ (le terme en $-2\hbar \vec{k} \cdot \vec{p}$ a une moyenne nulle car les émissions $\vec{k}$ et $-\vec{k}$ ont la même probabilité).

- Sur 6 photons absorbés, 5 sont réémis avec une polarisation circulaire σ^+ ou σ^- , et pour ces photons, on a $\langle k_z^2 \rangle = 2k^2/5$, 1 est réémis avec une polarisation π qui donne $\langle k_z^2 \rangle = k^2/5$. Après N cycles de fluorescence, la variation moyenne d'énergie cinétique due aux photons de fluorescence vaut donc ($E_R = \hbar^2 k^2 / 2M$ est l'énergie de recul) :

$$(\overline{\Delta T})_{\text{spont}} = N E_R \left[\frac{5}{6} \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \frac{1}{5} \right] = N \frac{11}{30} E_R \quad (6.26)$$

- Remarque : Dans la Ref. 2, on suppose, pour simplifier les calculs numériques, que les photons $\sigma_{\pm}$ sont émis parallèlement ou antiparallèlement à Oz, les photons π perpendiculairement à Oz. L'expression (6.26) doit alors être remplacée par

$$(\overline{\Delta T})'_{\text{spont}} = N E_R \left[\frac{5}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 0 \right] = N \frac{5}{6} E_R \quad (6.26)'$$

Gain d'énergie cinétique le long de Oz dû à l'absorption

- L'émission de N photons de fluorescence se traduit par la disparition de N_+ photons dans l'onde 1 et N_- dans l'onde 2, avec

$$N_+ + N_- = N \quad (6.27)$$

l'atome gagnant l'impulsion

$$\Delta p_z = (N_+ - N_-) \hbar k \quad (6.28)$$

- En moyenne, $\langle N_+ \rangle = \langle N_- \rangle$ et $\langle \Delta p_z \rangle = 0$. Par contre, $N_+ - N_-$ fluctue autour de 0. A faible intensité et grande vitesse on peut penser que les effets non poissoniens sont négligeables. Nous l'admettrons ici, ce qui donne pour la variance de $N_+ - N_-$

$$\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle = \langle N_+ \rangle + \langle N_- \rangle = N \quad (6.29)$$

de sorte que le gain moyen d'énergie cinétique le long de Oz après absorption de N photons, c'est à dire après N cycles, vaut

$$(\overline{\Delta T})_{abs} = N E_R \quad (6.30)$$

Bilan global pour la variation moyenne d'énergie totale $\overline{\Delta E}$

- En ajoutant (6.25), (6.26) et (6.30), on obtient

$$\overline{\Delta E} = N \left[-\frac{U_0}{12} + \frac{11}{30} E_R + E_R \right] \quad (6.31)$$

qui n'est négatif que si

$$U_0 > 16.4 E_R \quad (6.32)$$

le même calcul fait avec (6.26)' donne

$$U_0 > 22 E_R \quad (6.33)$$

- On voit ainsi, en conclusion, que U_0 doit être supérieur à quelques dizaines de E_R si l'on veut que le mécanisme Sisyphe soit efficace, c'est à dire, diminue l'énergie totale des atomes.

C- Les 2 régimes

- Supposons maintenant que l'atome, dans l'état $g_{-1/2}$, soit piégé au fond d'un puits de potentiel, par exemple au voisinage de $z=0$. Négligeons momentanément tout pompage optique. L'atome va osciller autour de sa position d'équilibre avec une pulsation Ω_{osc} qu'on obtient en développant $E_{-1/2}(z)$ au voisinage de $z=0$

$$E_{-1/2}(z) = \hbar \delta' + U_0 \sin^2 k z \simeq \hbar \delta' + U_0 k^2 z^2 \quad (6.34)$$

et en égalant le terme en z^2 à $\frac{1}{2} M \Omega_{osc}^2 z^2$, ce qui donne

$$\Omega_{osc} = k \sqrt{\frac{2U_0}{M}} \quad (6.35)$$

- Considérons maintenant la quantité $\Omega_{osc} \tau_p \sim k \tau_p \sqrt{2U_0/M}$ qui représente physiquement le nombre d'oscillations que l'atome effectue dans le puits avant de changer de centre de potentiel par pompage optique. 2 cas extrêmes sont alors à envisager

Régime "sautant"

$$\Omega_{osc} \tau_p = k \tau_p \sqrt{\frac{2U_0}{M}} \ll 1 \quad (6.36)$$

L'atome saute très souvent d'un sous-niveau à l'autre avant

de bouger appréciablement. Bien que τ_p soit long (bien plus long que $\tau_R = \Gamma^{-1}$), les variables internes évoluent beaucoup plus vite que les variables externes

$$T_{int} \ll T_{ext} \quad (6.37)$$

Elles peuvent alors être éliminées adiabatiquement au profit des variables externes, et le mouvement de l'atome décrit en termes de force moyenne et de coefficient de diffusion. C'est ce qui est fait dans la référence 1

Régime oscillant

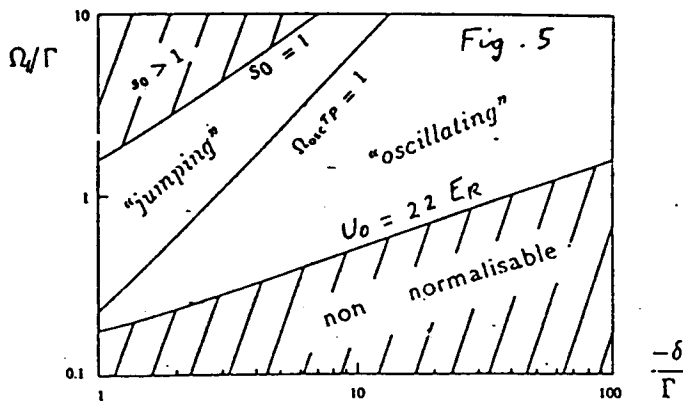
$$\Omega_{osc} \tau_p = k \tau_p \sqrt{\frac{2U_0}{m}} \gg 1 \quad (6.38)$$

τ_p est maintenant si long que ce sont les variables externes qui évoluent plus vite que les variables internes. La description habituelle en termes de force n'est alors plus valable.

Une approche originale, développée récemment (voir Ref. 3), consiste à considérer tout d'abord les niveaux d'énergie de $P^2/2M + H_{eff}(Z)$: particule dans le bi-potentiel de la figure 3. (Ces niveaux sont en fait des "bandes" à cause du caractère périodique du potentiel). La condition (6.38) exprime que la largeur des niveaux, de l'ordre de $\hbar/\tau_p$, est plus petite que la distance entre les niveaux, de l'ordre de $\hbar \Omega_{osc}$. Les équations du pompage optique entre ces niveaux peuvent alors être simplifiées (approximation séculaire permettant de négliger les couplages entre populations et cohérences) et résolues numériquement, ce qui donne les populations des niveaux. Connaissant par ailleurs les fonctions d'ondes, on en déduit les distributions de position et d'impulsion.

Recapitulation

La figure 5, extraite de la référence 2, donne, pour l'énergie de recul du Césium, les domaines des différents régimes dans le plan $\frac{\Omega_1}{\Gamma}, \frac{-\delta}{\Gamma}$



$S_0 = 1 \rightarrow \frac{\Omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = 1 \rightarrow$ droite de pente 1 en coordonnées logarithmiques pour $|\delta| \gg \Gamma$

$U_0 = 22 E_R \rightarrow \frac{\Omega_1^2 \delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = C^te \rightarrow \Omega_1 \sim \delta^{1/2} \rightarrow$ Droite de pente 1/2

$\Omega_{osc} \tau_p = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{U_0}}{\Gamma} = C^te \rightarrow \frac{\sqrt{\delta}}{\Gamma \sqrt{S_0}} = C^te \rightarrow \Omega_1 \sim \delta^{3/2} \rightarrow$ Droite de pente 3/2

Références

- (1) J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji JOSA B6, 2023 (1989)
voir aussi P.J. Ungar, P.S. Weiss, E. Riis, S. Chu JOSA B6, 2058 (1989)
pour une résolution numérique des équations de Bloch optiques
- (2) Y. Castin, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, Proceedings of the LIKE workshop (L. Moi et al eds) Elbe, Mai 1990, à paraître
- (3) Y. Castin, J. Dalibard, soumis à Europhysics Letters.

- Comme dans le § 4b, nous supposons que l'atome parcourt plusieurs λ avant de changer de niveau : $v t_p \gg \lambda$ et que son énergie est élevée : $E \gg U_0$

Entre 2 sauts, l'atome, sur un sous-niveau donné, a une énergie potentielle moyenne égale à $U_0/2$, de sorte que son énergie cinétique moyenne $\tilde{T}$ est égale à $E - U_0/2$ (Son énergie cinétique instantanée oscille entre E et $E - U_0$)

$$\tilde{T} = E - \frac{U_0}{2} = \frac{\tilde{p}^2}{2M} \quad (6.39)$$

Variance de la variation d'énergie potentielle δU

- Comme l'atome va très vite, toutes les positions z sont équiprobables et la probabilité de passer de $g_{-1/2}$ à $g_{+1/2}$ est proportionnelle à $\sin^2 kz$ en z . On en déduit comme la variation δU de U en z vaut $U_0 \cos 2kz$

$$(\delta U)_{\text{saut}} = U_0 \frac{\sin^2 kz \cos 2kz}{\sin^2 kz} = -\frac{U_0}{2} \quad (\delta U^2)_{\text{saut}} = U_0^2 \frac{\sin^2 kz \cos^2 2kz}{\sin^2 kz} = \frac{U_0^2}{2} \quad (6.40)$$

- Les résultats précédents sont pour un saut. Pendant le temps δt il y a $\delta N/6$ sauts, où δN est le nombre de cycles de fluorescence, égal d'après (6.17) à $\Gamma' \delta t (1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz) = \Gamma' \delta t (1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz) = \frac{2}{3} \Gamma' \delta t$

$$\text{Nombre moyen de sauts pendant } \delta t = \frac{1}{6} \frac{2}{3} \Gamma' \delta t = \frac{1}{9} \Gamma' s_0 \delta t \quad (6.41)$$

- Comme les sauts sont indépendants et que les variances s'ajoutent on a donc

$$\overline{\delta U^2} - \overline{\delta U}^2 = \frac{1}{9} \Gamma' s_0 \frac{U_0^2}{2} \delta t = \frac{\Gamma' s_0}{18} U_0^2 \delta t \quad (6.42)$$

Variance de la variation d'énergie cinétique δT

- Au cours d'une absorption ou d'une émission spontanée, l'impulsion p varie de p à $p - \hbar k_z$ et son énergie cinétique varie de

$$\delta T = -2\hbar k_z \frac{p}{2M} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} \quad (6.43)$$

Nous avons calculé plus haut (§ 4b) la moyenne de δT pour un cycle de fluorescence

$$(\delta T)_{\text{cycle}} = \beta E_R \quad \text{avec } \beta = \frac{41}{30} \text{ ou } \frac{11}{6} \quad (6.44)$$

- Calculons maintenant la moyenne de δT^2 pour un cycle

$$(\delta T^2)_{\text{cycle}} = \hbar^2 k_z^2 \frac{p^2}{M^2} + \frac{\hbar^4 k_z^4}{4M^2} - \hbar^3 k_z^3 \frac{p}{M^2} \approx 4 \frac{\tilde{p}^2}{2M} \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} = 4 \frac{\tilde{p}^2}{2M} \beta E_R \quad (6.45)$$

En effet, dans la 1^{ère} égalité, on peut négliger le 2^{ème} terme devant le premier (car $\tilde{p} \gg \hbar k_z$), le 3^{ème} est nul par symétrie, et dans le premier $p \approx \tilde{p}$

- En retranchant le carré de (6.44) de (6.45) et en négligeant de nouveau E_R devant $\tilde{p}^2/2M$, on obtient, après multiplication par $\delta N = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 \delta t$ (nombre de cycles de fluorescence)

$$\overline{\delta T^2} - \overline{\delta T}^2 = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 4 \frac{\tilde{p}^2}{2M} \beta E_R \quad (6.46)$$

Variance de la variation d'énergie totale δE

- En ajoutant (6.42) et (6.46), on obtient

$$\overline{\delta E^2} - \overline{\delta E}^2 = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 \delta t \left[\frac{U_0^2}{12} + \frac{11}{6} \frac{\tilde{p}^2}{M^2} \hbar^2 k_z^2 \right] \quad (6.47)$$

- On connaît déjà la moyenne de δE (voir § 4b plus haut)

$$\overline{\delta E} = \overline{\delta U} + \overline{\delta T} = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 \delta t \left[-\frac{U_0}{12} + \beta \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} \right] \quad (6.48)$$

Comme les sauts de E sont petits par rapport à E , on pourrait, à partir de (6.47) et (6.48), écrire une équation de Fokker-Planck pour la fonction de distribution de l'énergie