Généralisations de la transformation de Pauli-Fierz

① Généralisation à une particule sans spin non localisée

- Hamiltonien de Coulomb (sans approximation des grandes longueurs d'onde)
- Comment généraliser la transformation de Pauli-Fierz ?
- Transformation unitaire découplant au 1er ordre la particule du champ transverse
- Transformation de quelques états et de quelques observables
- Hamiltonien dans le nouveau point de vue
- Exemple d'application : diffusion Compton

Hamiltonien de Coulomb pour une particule (sans spin) non localisée (et non relativiste)

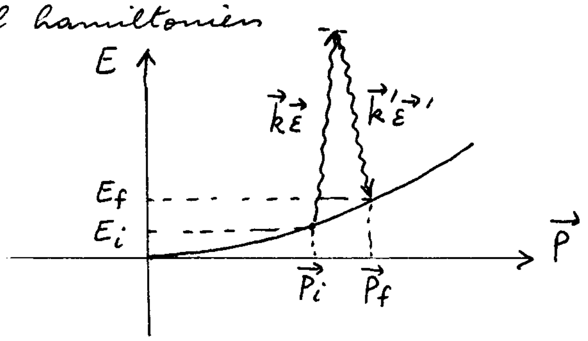
$$H = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e(\vec{r}_\alpha) + H_R \tag{1.1}$$

Différence avec les cours précédents : $\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)$ au lieu de $\vec{A}_\perp(\vec{0})$.

Exemple de problème physique nécessitant l'utilisation d'un tel hamiltonien

Charge libre non localisée échangeant de l'impulsion avec le rayonnement par des processus de diffusion Compton.
On ne peut pas négliger l'impulsion $\hbar\vec{k}$ des photons

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}'$$



Propriétés intéressantes de la transformation de Pauli-Fierz (utilisée dans les cours précédents)

1 - Translation simple de $a_\varepsilon(\vec{k})$

$$T\, a_\varepsilon(\vec{k})\, T^+ = a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k}, \vec{p}_\alpha) \tag{1.2}$$

$$\beta_\varepsilon(\vec{k}, \vec{p}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega^3 (2\pi)^3}} \tag{1.3}$$

2 - Translation simple de $\vec{r}_\alpha$

$$T\,\vec{r}_\alpha\,T^+ = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0}) \qquad T\,\vec{p}_\alpha\,T^+ = \vec{p}_\alpha \tag{1.4}$$

3 - Disparition de tout terme d'interaction particule - champ transverse linéaire en q_α dans THT^+

La forme simple et compacte de (1.2) et (1.4) permet d'obtenir pour $H' = THT^+$ une expression simple et compacte.

Difficultés apparaissant quand on ne fait plus l'approximation des grandes longueurs d'onde.

- La variable normale classique du champ lié dépend, non seulement de $\vec{p}_\alpha$ mais aussi de $\vec{r}_\alpha$ (on ne remplace plus $\exp(i\vec{k}\vec{r}_\alpha)$ par 1 dans l'équation du mouvement de $\beta_\varepsilon(\vec{k})$).

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{p}_\alpha) \longrightarrow \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{p}_\alpha,\vec{r}_\alpha) \tag{1.5}$$

Il est alors impossible de trouver une transformation unitaire telle que
$$T\,a_\varepsilon(\vec{k})\,T^+ = a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha) \tag{1.6}$$

En effet, T doit conserver les relations de commutation entre a et a^+. Or, même si les a et les β^+ commutent entre eux, il n'en est pas de même pour les β et β^+ à cause de la non-commutation de $\vec{r}_\alpha$, $\vec{p}_\alpha$. L'équation (1.6) n'a donc pas de solution avec $TT^+ = T^+T = \mathbb{1}$

- De même, on ne peut généraliser simplement (1.4) quand on tient compte des corrections introduites par l'effet Doppler et la force de Lorentz magnétique sur le mouvement de vibration de la particule.

Solution choisie pour généraliser T

- Comme les propriétés 1 et 2 précédentes ne peuvent être conservées, on va se concentrer sur la propriété 3, c'est à dire chercher T avec $TT^+ = T^+T = \mathbb{1}$, de façon à faire disparaître dans THT^+ tous les termes d'interaction particule - champ transverse linéaires en q_α.
- On conserve ainsi l'avantage consistant à faire apparaître dans l'hamiltonien des particules tous les effets associés à l'émission et à la réabsorption d'un photon virtuel.
- Par contre, la formulation mathématique de la théorie sera plus complexe : les expressions simples (1.2) et (1.4) ne seront plus valables. Il faudra ajouter des termes d'ordre croissant en q_α au second membre de (1.6). Idem pour (1.4). De même, l'hamiltonien $H' = THT^+$ ne sera plus donné par une expression compacte, mais par une série infinie de termes d'ordre croissant en q_α.

Construction de T

- Classification des termes de l'hamiltonien de Coulomb (1.1) par ordre croissant en q_α

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \tag{1.7}$$

$$H_0 = \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + H_R \qquad (1.8) \qquad\qquad H_1 = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (1.9)$$

$$H_2 = V_e(\vec{r}_\alpha) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r}_\alpha) + \varepsilon^\alpha_{coul} \qquad (1.10)$$

($V_e(\vec{r}_\alpha)$ est considéré comme un terme d'ordre 2 car c'est en général une interaction de Coulomb entre q_α et une autre charge)

– $$T = e^{iF/\hbar} \qquad \text{avec} \quad F = F^+ \qquad (1.11)$$

$$e^{iA}\,B\,e^{-iA} = B + i\,[A,B] + \frac{i^2}{2!}\,[A,[A,B]] + \cdots \qquad (1.12)$$

– On verra plus loin que F peut être choisi d'ordre 1 en q_α. On peut donc ordonner $H' = T H T^+$ en puissances de q_α

$$\begin{aligned} H' = \; & H_0 \; + \\ & + H_1 + \frac{i}{\hbar}[F,H_0] + \\ & + H_2 + \frac{i}{\hbar}[F,H_1] + \frac{i^2}{2!\hbar^2}[F,[F,H_0]] + \\ & \qquad + \frac{i}{\hbar}[F,H_2] + \frac{i^2}{2!\hbar^2}[F,[F,H_1]] + \frac{i^3}{3!\hbar^3}[F,[F,[F,H_0]]] + \cdots \end{aligned} \qquad (1.13)$$

– Condition imposée à F $$H_1 + \frac{i}{\hbar}[F,H_0] = 0 \qquad (1.14)$$

– La forme simple de H_1 et H_0, respectivement linéaire et quadratique en a et a^+ suggère de rechercher F sous forme d'une superposition linéaire de a et a^+

$$\frac{iF}{\hbar} = \int d^3k \sum_\varepsilon \left\{ \beta^+_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)\, a_\varepsilon(\vec{k}) - \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)\, a^+_\varepsilon(\vec{k}) \right\} \qquad (1.15)$$

– L'annulation du coefficient de $a^+_\varepsilon(\vec{k})$ dans (1.14) donne alors

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + \hbar\omega\,\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha) + \left[\frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}, \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)\right] = 0 \qquad (1.16)$$

Multiplions (1.16) à droite par $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}$ et posons

$$X = \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \qquad (1.17)$$

L'équation pour X s'écrit

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha + \hbar\omega X + \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}X - X\,\underbrace{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\,\frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}}_{(\vec{P}_\alpha+\hbar\vec{k})^2/2m_\alpha} = 0 \qquad (1.18)$$

↳ X ne dépend donc que de $\vec{P}_\alpha$ et s'écrit

$$X = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha}{\hbar\omega + \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{P}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}} \qquad (1.19)$$

ce qui donne finalement pour $\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)$ compte tenu de (1.17)

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha}{\hbar\omega + \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{P}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}}\; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \qquad (1.20)$$

Si l'on remplace $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}$ par 1, et le dénominateur par $\hbar\omega$ (ordre 1 en $\vec{P}_\alpha/m_\alpha c$ et 0 en $\hbar\omega/m_\alpha c^2$), on retrouve (1.3) et T coïncide avec la transformation de Pauli-Fierz habituelle

– Comme H est non relativiste, il est inutile de conserver les termes d'ordre supérieur à 1 en $\vec{p}_\alpha/mc$ et $\hbar\omega/m_\alpha c^2$ dans le developpement du dénominateur de 1.20). A cet ordre, on peut écrire

$$\frac{1}{\hbar\omega + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{p}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}} = \frac{1}{\hbar\omega - \frac{\hbar\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha}{m_\alpha} - \frac{\hbar^2k^2}{2m_\alpha}} \simeq \frac{1}{\hbar\omega}\left(1 + \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha}{m_\alpha\omega} + \frac{\hbar k}{2m_\alpha c}\right) \qquad (1.21)$$

En remarquant que

$$\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha}{m_\alpha\omega} + \frac{\hbar k}{2m_\alpha c}\right)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} = \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha}{2m_\alpha\omega}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\,\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha}{2m_\alpha\omega} \qquad (1.22)$$

on peut mettre $\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha)$ sous la forme approchée

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega^3(2\pi)^3}}\left\{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + \vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha\left[\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\,\vec{k}\cdot\vec{p}_\alpha}{2m_\alpha\omega}\right]\right\} \qquad (1.23)$$

et écrire finalement F sous la forme

$$F = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left\{\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{r}_\alpha) + \vec{\nabla}_\alpha\cdot\left[(\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Y}(\vec{r}_\alpha))\frac{\vec{p}_\alpha}{2m_\alpha} + \frac{\vec{p}_\alpha}{2m_\alpha}(\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Y}(\vec{r}_\alpha))\right]\right\} \qquad (1.24)$$

où $\vec{Z}$ est le vecteur de Hertz et $\vec{Y}$ un autre champ défini par

$$\vec{Y}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon(\vec{k})}{(i\omega)^2}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon^+(\vec{k})}{(-i\omega)^2}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \qquad (1.25)$$

$\vec{Y}$ est en fait (au signe près) l'intégrale de $\vec{Z}$ $(\dot{\vec{Y}} = -\vec{Z})$ et est comme $\vec{Z}$ un champ transverse

---

Transformation des états

– Supposons $V_e = 0$ et considérons, dans le point de vue (1), l'état propre de H qui tend vers l'état propre $|\vec{p};0\rangle$ de H_0 quand $q_\alpha \to 0$. Cet état sera noté $|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle$. A l'ordre 1 en q_α, cet état s'obtient par la théorie des perturbations au 1er ordre avec H_{I1}

$$|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle = |\vec{p};0\rangle + \int d^3k\sum_\varepsilon |\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle\,\frac{\langle\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\,H_{I1}\,|\,\vec{p};0\rangle}{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_\alpha} - \hbar\omega - \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}} \qquad (1.26)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (1.9) et du fait que $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}|\vec{p}\rangle = |\vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle$

$$|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle = |\vec{p};0\rangle - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int d^3k\sum_\varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}}{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_\alpha} - \hbar\omega - \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}}\,|\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \qquad (1.27)$$

Cet état représente physiquement une charge q_α dans l'état $|\vec{p}\rangle$ "habillée" d'un nuage de photons virtuels qu'elle émet et réabsorbe

– Soit $|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle$ le ket représentant le <u>même état physique</u> dans le point de vue (2). A l'ordre 1 en q_α

$$|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle = T|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle = \left(1+\frac{iF}{\hbar}\right)|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle \simeq |\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle + \frac{iF}{\hbar}|\vec{p};0\rangle \qquad (1.28)$$

En utilisant (1.15) et (1.20), on obtient pour le dernier terme de (1.28)

$$\frac{iF}{\hbar}|\vec{p};0\rangle = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \; \frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha}{\hbar\omega + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{p}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}} \; |\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \qquad (1.29)$$

Or, $|\vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle$ est état propre de l'opérateur $\vec{p}_\alpha$, de valeur propre $\vec{p}-\hbar\vec{k}$. De plus, $\vec{\varepsilon}\cdot\vec{k}=0$. On déduit alors de (1.29)

$$\frac{iF}{\hbar}|\vec{p};0\rangle = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \; \frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}}{\hbar\omega + \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_\alpha}} \; |\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \qquad (1.30)$$

Finalement, en ajoutant (1.27) et (1.30) pour obtenir, d'après (1.28), $|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle$, on constate que le dernier terme de (1.27) se compense avec (1.30), de sorte que

$$|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle = |\vec{p};0\rangle \qquad (1.31)$$

L'état physique habillé de photons du point de vue (1), qui est état propre de H (à l'ordre 1 en q_α), en dehors de la zone d'action de V_e, est donc représenté beaucoup plus simplement dans le point de vue (2) par un ket de la forme $|\vec{p};0\rangle$. Dans le point de vue (2), les kets $|\vec{p};0\rangle$ représentent donc des états asymptotiques corrects pour la diffusion par V_e, puisqu'ils représentent des états propres du reste de l'hamiltonien en dehors de la zone d'action du potentiel. C'est ce qui explique pourquoi le point de vue (2) est beaucoup plus commode que le point de vue (1) pour l'étude des processus de collision.

<u>Transformation des opérateurs</u>

Nous ne calculerons pas ici $T\vec{r}_\alpha T^+$, $T\vec{p}_\alpha T^+$, $Ta_\varepsilon(\vec{k})T^+$. Disons simplement que :

$$TGT^+ = G + \left[\frac{iF}{\hbar}, G\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},G\right]\right] + \cdots \qquad (1.32)$$

où $G = \vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha, a_\varepsilon(\vec{k}) \dots$. On retrouve bien qu'à l'ordre 1 en q_α, $\left[\frac{iF}{\hbar}, G\right]$ est la réponse linéaire de l'observable G d'un système à la perturbation exercée par l'autre. Mais les autres termes (d'ordre 2, 3 -- en q_α) du développement (1.32) ne sont pas nuls.

Ainsi, T est bien un opérateur de translation pour $\vec{r}_\alpha$, $\vec{p}_\alpha$, $a_\varepsilon(\vec{k})$... Mais l'amplitude de la translation ne se réduit pas à la seule réponse linéaire comme c'était le cas à l'approximation des grandes longueurs d'onde.

<u>Structure de l'hamiltonien transformé H' et approximations</u>

<u>Développement de H' en puissances de q_α</u>

$$H' = H_0 + H'_1 + H'_2 + H'_3 + H'_4 + \cdots \qquad (1.33)$$

$\frac{iF}{\hbar}$ a été choisi pour avoir $H'_1 = 0 \rightarrow$ Condition (1.14) : $\left[\frac{iF}{\hbar}, H_0\right] = -H_1$

On obtient alors $$H' = H_0 + H'_2 + H'_3 + H'_4 + \cdots \qquad (1.34)$$

$$H'_2 = H_2 + \left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_0\right]\right] = H_2 + \frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right] \qquad (1.35)$$

$$H'_3 = \left[\frac{iF}{\hbar}, H_2\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_1\right]\right] \quad (1.36.a) \qquad H'_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_2\right]\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_1\right]\right]\right] \quad (1.36.b)$$

Terme d'ordre 2 en q_α : en plus de H_2, il y a le terme provenant du commutateur de $iF/\hbar$ et H_1.

$iF/\hbar$ et H_1 sont tous deux des combinaisons linéaires de a et a^+ avec des coefficients de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$ $\rightarrow$ 2 contributions dans $\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right]$

1 - Terme provenant de $[a, a^+] = 1$ $\rightarrow$ opérateur dépendant uniquement de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$, c-à-d opérateur de particule s'ajoutant à $\vec{p}_\alpha^{\,2}/2m_\alpha + V_e(\vec{r}_\alpha)$

2 - Terme provenant de la non commutation de $\vec{p}_\alpha$ et $e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$ $\rightarrow$ opérateur quadratique en a et a^+ et dépendant de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$. Nouvel hamiltonien d'interaction particule - champ transverse quadratique en q_α.

Termes prépondérants d'ordre 3 et 4 en q_α

Pour des particules chargées non relativistes, l'énergie de Coulomb $V_e(\vec{r}_\alpha)$ est beaucoup plus importante que l'interaction avec le champ transverse. On negligera donc les seconds termes de (1.36.a) et (1.36.b), et on remplacera H_2 par $V_e(\vec{r}_\alpha)$ dans les premiers termes. On ne conservera donc que les termes

$$\left[\frac{iF}{\hbar}, V_e(\vec{r}_\alpha)\right] \quad (1.37.a) \qquad\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar}, V_e(\vec{r}_\alpha)\right]\right] \quad (1.37.b)$$

Développement en puissances de $p_\alpha/m_\alpha c$ et $\hbar k/m_\alpha c$

Toutes les corrections relativistes, ne figurant pas dans l'hamiltonien de départ (1.1), sont au moins d'ordre $1/c^2$. Par ailleurs, F a été développé à l'ordre 1 inclus en $1/c$ (voir (1.21)).

Tous les termes de H'_2 d'ordre 0 et 1 en $1/c$ sont donc corrects. Par contre, pour les termes d'ordre 2 en $1/c$ de H'_2, il faut s'assurer, avant de les garder, qu'ils ne seraient pas modifiés par les termes d'ordre supérieur en $1/c$ de H et F, et éventuellement, les corriger et les compléter.

Nouvel hamiltonien des particules à l'ordre 2 en q_α.

Le commutateur de a et a^+ dans $\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right]$ donne, d'après (1.15) et (1.9)

$$\frac{1}{2}\int d^3k \sum_\varepsilon \left\{\beta_\varepsilon^+(\vec{k}, \vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha)\left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\,(\vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha)e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}\right] + c.c.\right\} \qquad (1.38)$$

Remplaçons β_ε^+ par l'adjoint de (1.23). La contribution du dernier terme de (1.23) est impair en $\vec{k}$ et s'annule dans l'intégrale sur $\vec{k}$. Il reste donc

$$-\frac{1}{2}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{(\vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha)^2}{2\varepsilon_0\omega^3(2\pi)^3} + c.c. = -\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \qquad (1.39)$$

qui n'est autre que la correction à l'énergie cinétique due à la correction de masse m_α.

Seule différence : comme on ne fait plus ici l'approximation des grandes longueurs d'onde, on peut prendre une coupure k_c plus élevée dans l'intégrale sur k donnant $\delta m_{1\alpha}$ ($k_c a_0$ peut être grand devant 1. Par contre, $\hbar\omega_c$ doit rester petit devant $m_\alpha c^2$ pour la validité du traitement non relativiste).

Nouvel hamiltonien d'interaction à l'ordre 2 en q_α

En plus de $\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha)$ qui figure dans H_2 (voir (1.10)), il faut considérer le terme de $\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right]$ qui provient de la non commutation de $\vec{P}_\alpha$ et $e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$.

Nous négligerons la contribution du dernier terme de (1.24) qui donne naissance à des termes en $1/c^2$ dans le nouvel hamiltonien d'interaction particule-champ transverse. La contribution du 1er terme donne, après un calcul que nous ne détaillerons pas ici, le résultat

$$-\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\vec{P}_\alpha\cdot\left[\vec{\nabla}_\alpha\times\left(\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)\right] \tag{1.40}$$

Finalement, à l'ordre 2 en q_α et 1 en $1/c$, le nouvel hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H'_I = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha) - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\vec{P}_\alpha\cdot\left[\vec{\nabla}_\alpha\times\left(\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)\right] \tag{1.41}$$

Le 2ème terme représente des corrections en $P_\alpha/m_\alpha c$ au 1er terme. Corrections à l'énergie cinétique du mouvement de vibration dues au mouvement lent de la particule (effet Doppler, aberration, force magnétique due au champ magnétique du rayonnement.

Termes prépondérants en q^3 et q^4

Pour ces termes (1.37.a) et (1.37.b), on peut se contenter du 1er terme de (1.24). On obtient alors

$$H'_3 = \left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha.\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), V_e(\vec{r}_\alpha)\right] = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{r}_\alpha).\vec{\nabla}V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{1.42}$$

$$H'_4 = \left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha.\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), \left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha.\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), V_e(\vec{r}_\alpha)\right]\right] = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\sum_{ij} Z_i(\vec{r}_\alpha)Z_j(\vec{r}_\alpha)\nabla_i\nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{1.43}$$

On retrouve des termes analogues à ceux obtenus dans les cours précédents, à la différence près que $\vec{Z}(\vec{0})$ est remplacé par $\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)$. En particulier, H'_3 est un terme d'interaction à 1 photon décrivant le couplage avec le vecteur de Hertz de l'accélération de la particule.

Diffusion Compton

Etats initial et final $\quad |\psi_{in}\rangle = |\vec{P}_1, \vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle \quad |\psi_{fin}\rangle = |\vec{P}_2, \vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2\rangle$ (1.44)

On prendra $\vec{P}_1 = \vec{0}$: électron initialement immobile

Normalisation des états de la particule et du photon dans une boîte L^3.

Probabilité de transition par unité de temps

$$W(\vec{P}_1+\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1 \to \vec{P}_2+\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\vec{P}_2, \vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2|H'_I\;|\vec{P}_1, \vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle\right|^2\delta(E_{\vec{P}_1}+\hbar\omega_1-E_{\vec{P}_2}-\hbar\omega_2) \tag{1.45}$$

Comme $\vec{P}_\alpha|\vec{P}_1\rangle = \vec{P}_1|\vec{P}_1\rangle = \vec{0}$ puisque $\vec{P}_1 = \vec{0}$, le 2ème terme de (1.41) ne contribue pas ($\vec{P}_\alpha$ commute avec le champ transverse $\vec{\nabla}\times(\vec{A}_\perp\times\vec{Z})$). On peut donc remplacer H'_I par $q_\alpha^2\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha)/2m_\alpha$ dans (1.45).

$$\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\langle\vec{P}_2, \vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2|\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha)|\vec{P}_1, \vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3\sqrt{\omega_1\omega_2}}(\vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_2)\times$$

$$\times\underbrace{\langle\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2|a^+_{\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2}a_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1}+a_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1}a^+_{\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2}|\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle}_{2}\;\underbrace{\langle\vec{P}_2|e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{r}_\alpha}|\vec{P}_1\rangle}_{\delta_{\vec{P}_1+\hbar\vec{k}_1,\,\vec{P}_2+\hbar\vec{k}_2}} \tag{1.46}$$

$$\langle \vec{p}_2, \vec{k}_2 \vec{\varepsilon}_2 | H'_I | \vec{p}_1, \vec{k}_1 \vec{\varepsilon}_1 \rangle = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \frac{\hbar}{\varepsilon_0 \sqrt{\omega_1 \omega_2} L^3} \vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \; \delta_{\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1, \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2} \tag{1.47}$$

Sommation sur les états finals - Section efficace

- On n'observe pas l'électron diffusé. Il faut donc sommer sur $\vec{p}_2$

$$\sum_{\vec{p}_2} w(\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1 \to \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2) =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{p}_2} \frac{q_\alpha^4}{4m_\alpha^2} \frac{\hbar^2}{\varepsilon_0^2 L^6 \omega_1 \omega_2} (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \delta_{\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1, \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2} \; \delta\left(\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_\alpha} + \hbar\omega_1 - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_\alpha} - \hbar\omega_2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q_\alpha^4}{4m_\alpha^2} \frac{\hbar^2}{\varepsilon_0^2 L^6 \omega_1 \omega_2} (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \frac{1}{\hbar} \delta\left[\omega_2 + \frac{(\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2)^2}{2\hbar m_\alpha} - \omega_1 - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2\hbar m_\alpha}\right] \tag{1.48}$$

- Probabilité par unité de temps pour que le photon soit diffusé dans l'angle solide $d\Omega_2$ autour de $\kappa_2 = \vec{k}_2 / k_2$

$$dW = d\Omega_2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \frac{\omega_2^2 \, d\omega_2}{c^3} \sum_{\vec{p}_2} w(\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1 \to \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2) \tag{1.49}$$

- Flux du photon incident $\frac{c}{L^3}$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{L^3}{c} \frac{dW}{d\Omega_2} = \frac{L^6}{c^4 (2\pi)^3} \int \omega_2^2 \, d\omega_2 \sum_{\vec{p}_2} w(\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1 \to \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2) \tag{1.50}$$

Calcul explicite de $d\sigma / d\Omega_2$

- La fonction δ de (1.48) s'annule pour $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$ avec

$$\tilde{\omega}_2 \simeq \omega_1 \left[1 - \frac{\hbar \omega_1}{m_\alpha c^2} (1 - \cos\theta)\right] \tag{1.51}$$

On a utilisé $\vec{p}_1 = \vec{0}$ et posé $\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = k_1 k_2 \cos\theta$ (θ angle entre $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$)

On peut donc écrire cette fonction δ sous la forme

$$\frac{\delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2)}{1 + \frac{\hbar\omega_1}{m_\alpha c^2} - \frac{\hbar \omega_2}{m_\alpha c^2}\cos\theta} \simeq \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2)\left[1 - \frac{\hbar\omega_1}{m_\alpha c^2}(1 - \cos\theta)\right] \simeq \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2) \frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_1} \tag{1.52}$$

- On obtient alors pour $\frac{d\sigma}{d\Omega_2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{L^6}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^4} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q^4}{4m_\alpha^2} \frac{\hbar^2}{\varepsilon_0^2 L^6 \omega_1} \frac{(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2}{\hbar} \int \omega_2 \, d\omega_2 \, \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2) \frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_1}$$

$$= r_0^2 \left(\frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_1}\right)^2 (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \tag{1.53}$$

où $r_0 = q_\alpha^2 / 4\pi\varepsilon_0 m_\alpha c^2$ est le rayon classique de l'électron

- Comme nous n'avons pas gardé tous les termes en $1/c^2$ dans le calcul de H'_I, on peut remplacer $\tilde{\omega}_2 / \omega_1$ par 1, ce qui donne

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = r_0^2 (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \tag{1.54}$$

- Moyenne sur les 2 polarisations initiales $\vec{\varepsilon}_1$ possibles et sommation sur les 2 polarisations finales $\vec{\varepsilon}_2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2\theta) \tag{1.55}$$