

Diffusion par un potentiel en présence d'un rayonnement laser

VII-1

① Champ laser décrit comme un champ extérieur

- Hamiltonien de la particule.
- Transformation unitaire.
- Hamiltonien transformé
- Diffusion élastique (traitement à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α)
- Diffusion inélastique avec absorption ou émission stimulée de n photons laser (ordre 1 en V_e , tous les ordres en q_α)

② Description quantique du champ laser

- Amplitude de diffusion à n photons laser
- Raccord avec la théorie semiclassique
- Limite des très basses fréquences - Formule de Kroll - Watson

③ Exemple de résultats expérimentaux.

Introduction

L'absorption et l'émission induite ^(réelles) de photons incidents sont impossibles pour une particule chargée libre.
Deviennent possibles en présence d'un potentiel qui peut absorber ou fournir de l'impulsion.

Exemples d'application : chauffage d'un plasma par un laser (processus de "Bremsstrahlung inverse").
Chauffage radiofréquence dans un piège de Paul

Hamiltonien d'une particule couplé à un champ laser
traité comme un champ extérieur $\vec{A}_e(\vec{r}, t)$

- On néglige les couplages avec les autres modes du champ (émission spontanée négligée)
- Approximation des grandes longueurs d'onde

$$\vec{A}_e(\vec{r}_\alpha, t) \rightarrow \vec{A}_e(\vec{0}, t) = A_0 \cos \omega t \vec{e}_3 \quad (1.1)$$

$$\vec{E}_e(\vec{0}, t) = -\dot{\vec{A}}_e(\vec{0}, t) = \omega A_0 \sin \omega t \vec{e}_3 \quad (1.2)$$

$$\vec{Z}_e(\vec{0}, t) = -\int^t \vec{A}_e(\vec{0}, t') dt' = -\frac{A_0}{\omega} \sin \omega t \vec{e}_3 \quad (1.3)$$

- Hamiltonien dans le point de vue de Coulomb

(VII-2)

$$H(t) = \frac{1}{2m_\alpha} [\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_e(\vec{0}, t)]^2 + V_e(\vec{r}_\alpha) \quad (1.4)$$

V_e dépend que des variables $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$ de la particule puisque le champ est traité classiquement
 V_e : Potentiel diffusé.

Transformation unitaire

- Equivalent de la transformation de Pauli-Fierz

$$T(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{Z}_e(\vec{0}, t) \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{\xi}_\alpha(t) \right\} \quad (1.5)$$

$$\vec{\xi}_\alpha(t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}_e(\vec{0}, t) = - \frac{q_\alpha A_0}{m_\alpha \omega} \sin \omega t \vec{e}_3 \quad (1.6)$$

- Pour se débarrasser du terme en $q_\alpha^2 A_e^2(\vec{0}, t)/2m_\alpha$ de (1.4) qui est une fonction classique de t , on peut prendre

$$T(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{\xi}_\alpha(t) \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \int_0^t dt' \vec{A}_e^2(\vec{0}, t') \right\} \quad (1.7)$$

Hamiltonien transformé

$$H'(t) = T(t) H(t) T^\dagger(t) + i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^\dagger(t) \quad (1.8)$$

$$T(t) \vec{r}_\alpha T^\dagger(t) = \vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t) \quad T(t) \vec{p}_\alpha T^\dagger(t) = \vec{p}_\alpha \quad (1.9)$$

$$\hookrightarrow T(t) H(t) T^\dagger(t) = \frac{1}{2m_\alpha} [\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_e(\vec{0}, t)]^2 + V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) \quad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt} T(t) = \left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{\xi}}_\alpha(t) + \frac{i}{\hbar} \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_e^2(\vec{0}, t) \right] T(t) \quad (1.11)$$

$$\dot{\vec{\xi}}_\alpha(t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \dot{\vec{Z}}_e(\vec{0}, t) = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{A}_e(\vec{0}, t) \quad (1.12)$$

$$\hookrightarrow i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^\dagger(t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_e^2(\vec{0}, t) \quad (1.13)$$

$$\hookrightarrow H'(t) = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) \quad (1.14)$$

Développement du nouveau potentiel $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t))$ en série de Fourier

$$V_e(\vec{k}) = \int d^3r e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} V_e(\vec{r}) \quad V_e(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} V_e(\vec{k}) \quad (1.15)$$

$$V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k V_e(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}_\alpha(t)} \quad (1.16)$$

$$\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}_\alpha(t)) = \exp\left(i \frac{q_\alpha A_0}{m_\alpha \omega} \vec{k} \cdot \vec{e}_3 \sin \omega t\right) = \exp(i \vec{k} \cdot \vec{\xi}_0 \sin \omega t) \quad (1.17)$$

$$\text{avec } \vec{\xi}_0 = \frac{q_\alpha A_0}{m_\alpha \omega} \vec{e}_3 \quad (1.18)$$

$$\text{Or } e^{i\alpha \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha) e^{in\varphi}$$

$$\hookrightarrow \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}_\alpha(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\vec{k} \cdot \vec{\xi}_0) e^{in\omega t} \quad (1.20)$$

$$\hookrightarrow V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha) e^{in\omega t} \quad (1.21)$$

$$\tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} v_e(\vec{k}) J_n(\vec{k} \cdot \vec{\xi}_0) \quad (1.22)$$

A l'ordre 1 en v_e , $\tilde{V}_0(\vec{r}_\alpha)$ ne change pas l'énergie de la particule $\rightarrow$ diffusion élastique. Quant à $\tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha) e^{in\omega t}$, il change l'énergie de la particule de $n\hbar\omega \rightarrow$ diffusion inélastique avec absorption de n photons.

Diffusion élastique

- Potentiel $V_e(\vec{r})$ créé par une charge q placée en $\vec{O}$

$$V_e(\vec{r}) = \frac{q q_\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \rightarrow v_e(\vec{k}) = \frac{q q_\alpha}{\epsilon_0 k^2} \quad (1.23)$$

$$\tilde{V}_0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{q q_\alpha}{\epsilon_0 k^2} J_0(\vec{k} \cdot \vec{\xi}_0) \quad (1.24)$$

La transformée de Fourier $\tilde{V}_0(\vec{k})$ de $\tilde{V}_0(\vec{r})$ est donc

$$\tilde{V}_0(\vec{k}) = q q_\alpha \frac{J_0(\vec{k} \cdot \vec{\xi}_0)}{\epsilon_0 k^2} \quad (1.25)$$

- Soit $\tilde{\rho}_0(\vec{r})$ la distribution de charge donnant naissance au potentiel $\tilde{V}_0(\vec{r})/q_\alpha$. D'après l'équation de Poisson

$$\Delta \frac{\tilde{V}_0(\vec{r})}{q_\alpha} + \frac{\tilde{\rho}_0(\vec{r})}{\epsilon_0} = 0 \quad (1.26)$$

ce qui donne par transformée de Fourier, et compte tenu de (1.25)

$$\tilde{\rho}_0(\vec{k}) = \epsilon_0 k^2 \frac{\tilde{V}_0(\vec{k})}{q_\alpha} = q J_0(\vec{k} \cdot \vec{\xi}_0) \quad (1.27)$$

On en déduit $\tilde{\rho}_0(\vec{r})$ par transformée de Fourier inverse

$$\tilde{\rho}_0(\vec{r}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} J_0(\vec{k} \cdot \vec{\xi}_0) \quad (1.28)$$

c'est à dire en utilisant la T.F. de J_0 et le fait que, d'après (1.18), $\vec{\xi}_0$ est parallèle à $\vec{e}_3$

$$\tilde{\rho}_0(\vec{r}) = q \delta(x) \delta(y) \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - z^2}} & \text{si } |z| < \xi_0 \\ 0 & \text{si } |z| > \xi_0 \end{cases} \quad (1.29)$$

- Interprétation physique.

Sous l'effet de l'excitation laser, la particule effectue le mouvement de vibration $-\vec{\xi}_0 \sin \omega t$ (voir (1.6) et (1.18)).

Dans son référentiel au repos, la particule "voit" donc la charge q créant $V_e(\vec{r})$ osciller le long de Oz avec l'amplitude ξ_0 .

L'équation (1.29) donne la distribution de charge statique apparente associée à cette charge oscillante. Cette distribution est bien sûr localisée sur Oz . Elle représente la densité de probabilité de trouver la charge q en un point z de l'axe Oz , qui diverge bien sûr aux points de rebroussement $+\xi_0$ et $-\xi_0$ puisque la vitesse de la charge q est nulle en ces points.

Diffusion inélastique

$$\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \hbar \vec{\phi}$$

- D'après la théorie des perturbations dépendant du temps, l'amplitude de diffusion de $\vec{p}_1$ vers $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \hbar \vec{\phi}$ avec absorption de n photons laser vaut

$$\frac{1}{i\hbar} \langle \vec{p}_2 | \tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha) | \vec{p}_1 \rangle \int_{-T/2}^{+T/2} dt e^{i(E_2 - E_1 - n\hbar\omega)t/\hbar} \quad (1.30)$$

c'est à dire encore, d'après (1.22)

$$\begin{aligned} & -2\pi i \delta^{(T)}(E_2 - E_1 - n\hbar\omega) \frac{\tilde{V}_n(\vec{\phi})}{L^3} = \\ & = -2\pi i \delta^{(T)}(E_2 - E_1 - n\hbar\omega) \frac{V_e(\vec{\phi})}{L^3} J_n(\vec{\phi} \cdot \vec{\xi}_0) \end{aligned} \quad (1.31)$$

- Cette formule est valable à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α . Les amplitudes des processus d'émission induite s'obtiennent à partir de (1.31) en remplaçant n par $-n$.
- Si $A_0 \rightarrow 0$, $\vec{\xi}_0 \rightarrow \vec{0}$. Comme $J_n(0)$ s'annule sauf si $n=0$, on retrouve bien que seule la diffusion élastique subsiste en l'absence de laser.

Description quantique du champ laser

- Retour au cours précédent (pages VI-1 et VI-2)
Extension de la formule (4.8) à un processus on

$$|\Psi_{in}\rangle = |\vec{p}_1; \{n_i; \vec{k}_i; \vec{E}_i\}\rangle \quad |\Psi_{fin}\rangle = |\vec{p}_2; \{n'_i; \vec{k}'_i; \vec{E}'_i\}\rangle \quad (2.1)$$

- Amplitude de diffusion

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{p}_1 + \{n_i; \vec{k}_i; \vec{E}_i\} \rightarrow \vec{p}_2 + \{n'_i; \vec{k}'_i; \vec{E}'_i\}) = \\ -2\pi i \delta^{(T)}(E_{in} - E_{fin}) \frac{V_e(\vec{\phi})}{L^3} \langle \{n'_i\} | e^{-i\vec{\phi} \cdot \vec{\xi}_\alpha} | \{n_i\} \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E_{in} = E_1 + \sum_i n_i \hbar \omega_i \quad E_{fin} = E_2 + \sum_i n'_i \hbar \omega'_i \quad (2.3)$$

$$E_1 = \vec{p}_1^2 / 2m_\alpha \quad E_2 = \vec{p}_2^2 / 2m_\alpha \quad \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar \vec{\phi} \quad (2.4)$$

- La formule (2.2) tient compte de tous les modes et des processus aussi bien spontanés que stimulés
- Nous allons supposer maintenant que tous les modes sont vides, dans l'état initial et l'état final, sauf l'un d'entre eux $\vec{k} \vec{E}$, qui

contient n_1 photons dans l'état initial, n_2 photons dans l'état final. Le processus étudié est donc $\vec{p}_1 + n_1 \vec{k} \vec{E} \rightarrow \vec{p}_2 + n_2 \vec{k} \vec{E}$

Selon que $n_2 < n_1$ ou $n_2 > n_1$, il y a absorption de $n_1 - n_2$ photons ou émission de $n_2 - n_1$ photons, l'amplitude correspondante étant

$$A(\vec{p}_1 + n_1 \vec{k} \vec{E} \rightarrow \vec{p}_2 + n_2 \vec{k} \vec{E}) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_2 - E_1 - (n_1 - n_2)\hbar\omega) \frac{V_e(\vec{p})}{L^3} \langle n_2 | e^{-i\vec{p} \cdot \vec{\xi}_\alpha} | n_1 \rangle \quad (2.5)$$

Dans (2.5), il suffit de ne garder dans $\vec{\xi}_\alpha = q_\alpha \vec{Z}(\vec{0})/m_\alpha$ que la contribution du mode $\vec{k} \vec{E}$

$$\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3}} i(a^\dagger - a) \vec{E} \quad (2.6)$$

a et $a^\dagger$ étant des notations simplifiées pour $a_{\vec{k} \vec{E}}$ et $a_{\vec{k} \vec{E}}^\dagger$.

Raccord avec la théorie semiclassique

- Supposons le mode $\vec{k} \vec{E}$ dans un état cohérent $|\alpha\rangle$ (avec α réel). La valeur moyenne du potentiel vecteur libre en $\vec{0}$ s'écrit

$$\langle \alpha | \vec{A}_e(\vec{0}, t) | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} \vec{E} (\alpha e^{-i\omega t} + \alpha e^{i\omega t}) = 2\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} \vec{E} \cos \omega t \quad (2.7)$$

De même, le nombre moyen $\langle N \rangle$ et la variance $\Delta N = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ du nombre de photons dans le mode valent

$$\langle N \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^2 \quad \Delta N = \alpha^2 = \langle N \rangle \quad (2.8)$$

- Pour faire le raccord avec la théorie semiclassique, nous choisissons α de manière que $\vec{A}_e(\vec{0}, t)$ soit égal en valeur moyenne au champ classique (1.1)

$$\langle \alpha | \vec{A}_e(\vec{0}, t) | \alpha \rangle = A_0 \cos \omega t \vec{e}_3 \quad (2.9)$$

ce qui donne, compte tenu de (2.7)

$$\vec{E} = \vec{e}_3 \quad 2\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} = A_0 \quad (2.10)$$

- Seul compte finalement $\alpha/\sqrt{L^3}$ (ou encore $\alpha^2/L^3 = \langle N \rangle/L^3$, c'est à dire la densité d'énergie par unité de volume). On peut faire tendre L^3 et α vers l'infini en gardant $\alpha/\sqrt{L^3}$ constant et donné par (2.10)

Dans l'amplitude (2.5), on peut donc considérer que n_2 et n_1 sont très grands

Calcul de $\langle n_2 | \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{\xi}_\alpha) | n_1 \rangle$

- En utilisant (2.6) et (2.10), on obtient

$$-i\vec{p} \cdot \vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega^3 L^3}} (a^\dagger - a) \vec{e}_3 \cdot \vec{p} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{A_0}{2\alpha\omega} (a^\dagger - a) \vec{e}_3 \cdot \vec{p} \quad (2.11)$$

ce qui donne, compte tenu de (1.18)

$$\exp(-i\vec{p} \cdot \vec{\xi}_\alpha) = \exp\left[\frac{\lambda}{2\alpha} (a^\dagger - a)\right] \quad (2.12)$$

avec

$$\lambda = \vec{\xi}_0 \cdot \vec{p} \quad (2.13)$$

- Or, si n_2 et n_1 sont tous deux très grands et proches de $\langle N \rangle$, on peut montrer que (voir référence 7)

$$\langle n_2 | \exp \left[\frac{\lambda}{2\alpha} (a^\dagger - a) \right] | n_1 \rangle \simeq J_{n_2 - n_1} \left(\frac{2\lambda \sqrt{\langle N \rangle}}{2\alpha} \right) = J_{n_2 - n_1}(\lambda) = J_{n_2 - n_1}(\vec{\xi}_0 \cdot \vec{\phi}) \quad (2.14)$$

En reportant (2.14) dans (2.5), on retrouve bien (1.31) puisque $n = n_1 - n_2$ représente le nombre de photons absorbés.

Remarque . Avec l'approximation (2.14), qui redonne le résultat de la théorie semiclassical, le spectre de transitions multiphotoniques est symétrique : Comme $J_n^2 = J_{-n}^2$, la probabilité d'absorber n photons est égale à la probabilité d'en émettre n . Avec la forme exacte de la probabilité $|\langle n_2 | \exp(-i\vec{\phi} \cdot \vec{\xi}_\alpha) | n_1 \rangle|^2$, un tel résultat n'est plus vrai. Le calcul du § 4e du cours précédent (voir page VI-5) s'applique ici. Il montre que l'énergie moyenne perdue par la particule est égale à l'énergie rayonnée par la particule classique dans le mode $\vec{k}\vec{E}$ lorsqu'elle est diffusée de $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$.

Limite des très basses fréquences - Formule de Kroll et Watson

Hamiltonien

En ne retenant que la contribution du mode $\vec{k}\vec{E}$, l'hamiltonien quantique de Pauli-Fierz s'écrit

$$H' = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + H_R + V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) \quad (2.15)$$

(La contribution du mode $\vec{k}\vec{E}$ au terme $q_\alpha^2 \vec{A}_\perp^2(\vec{0})/2m_\alpha$ peut être regroupée avec $\hbar\omega a^\dagger a$ pour donner un terme de la forme $\hbar(\omega + \delta)a^\dagger a$, où δ est une correction de fréquence du mode. Nous supposons désormais δ réinclus dans ω_0).

Développement de Born

- Matrice ($\mathcal{P}$) $\mathcal{P}_{21} = \langle \vec{p}_2; n_2 | \mathcal{P} | \vec{p}_1; n_1 \rangle \quad (2.16)$

- Matrice de transition ($\mathcal{C}$)

$$\mathcal{P}_{21} = \delta_{21} - 2\pi i \delta^{(T)}(E_2 + n_2 \hbar\omega - E_1 - n_1 \hbar\omega) \mathcal{C}_{21} \quad (2.17)$$

$$\mathcal{C}_{21} = \langle \vec{p}_2; n_2 | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) | \vec{p}_1; n_1 \rangle +$$

$$+ \sum_{\vec{p}} \sum_n \langle \vec{p}_2; n_2 | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) | \vec{p}; n \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}_1 n_1} - E_{\vec{p} n} + i\varepsilon} \langle \vec{p}; n | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) | \vec{p}_1; n_1 \rangle + \dots \quad (2.18)$$

Terme d'ordre k : k éléments de matrice de $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha)$ séparés par $(k-1)$ dénominateurs d'énergie

$$[E_{\vec{p}_1 n_1} - E_{\vec{p} n} + i\varepsilon]^{-1} = [E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}} + (n_1 - n)\hbar\omega + i\varepsilon]^{-1} \quad (2.19)$$

- Soit $\Delta\omega$ l'intervalle sur lequel les variations de $\mathcal{C}_{21}$ avec ω sont appréciables. Nous allons faire un développement de $\mathcal{C}_{21}$ en puissances de $\omega/\Delta\omega$ ($\Delta\omega$ est supposé grand : Pas de diffusion résonnante)

- Réécrivons le terme d'ordre 2 en V_e de $\mathcal{C}_{21}$ (2^{ème} ligne de (2.18)) en utilisant

$$V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}_\alpha} V_e(\vec{k}) \quad (2.20)$$

Il vient

$$\mathcal{C}_{21}^{(2)} = \sum_{\vec{p}} \sum_n \int d^3k \int d^3k' \frac{V_e(\vec{k})}{(2\pi)^3} \frac{V_e(\vec{k}')}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}} + (n_1 - n)\hbar\omega + i\epsilon} \times \\ \times \langle \vec{p}_2 | e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}_\alpha} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} | \vec{p}_1 \rangle \langle n_2 | e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{\xi}_\alpha} | n \rangle \langle n | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}_\alpha} | n_1 \rangle \quad (2.21)$$

- Dans (2.21), n_1, n_2 et n sont très grands, mais $|n_1 - n|$ est de l'ordre de quelques unités. A l'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$, on peut négliger $(n_1 - n)\hbar\omega$ dans le dénominateur d'énergie de (2.21). Il est possible alors d'utiliser la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ qui fait apparaître $\langle n_2 | \exp[-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{\xi}_\alpha] | n_1 \rangle$.

Par ailleurs, le produit des 2 éléments de matrice de $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha}$ et $e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}_\alpha}$ n'est différent de zéro que si $\vec{p} = \vec{p}_1 - \hbar\vec{k}$ et $\vec{p}_2 = \vec{p} - \hbar\vec{k}'$, ce qui entraîne $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar\vec{\Phi} = \hbar(\vec{k} + \vec{k}')$. On peut donc remplacer $\langle n_2 | \exp[-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{\xi}_\alpha] | n_1 \rangle$ par $\langle n_2 | \exp(-i\vec{\Phi} \cdot \vec{\xi}_\alpha) | n_1 \rangle$ et le sortir des sommes sur $\vec{k}$ et $\vec{k}'$, de sorte que, à l'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$, (2.21) devient

$$\mathcal{C}_{21}^{(2)} = \langle n_2 | e^{-i\vec{\Phi} \cdot \vec{\xi}_\alpha} | n_1 \rangle \times \\ \times \sum_{\vec{p}} \langle \vec{p}_2 | \underbrace{\int d^3k' \frac{V_e(\vec{k}')}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}_\alpha}}_{V_e(\vec{r}_\alpha)} | \vec{p} \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \langle \vec{p} | \underbrace{\int d^3k \frac{V_e(\vec{k})}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha}}_{V_e(\vec{r}_\alpha)} | \vec{p}_1 \rangle \quad (2.22)$$

On reconnaît dans la 2^{ème} ligne de (2.22) le terme d'ordre 2 en V_e dans le développement de la matrice de transition décrivant la diffusion de la particule en l'absence de rayonnement incident.

- La démonstration ^{incidente} se généralise à tous les ordres en V_e , le fait de négliger les termes en $\hbar\omega$ au dénominateur, permettant de factoriser les éléments de matrice de $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\xi}_\alpha}$, $e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{\xi}_\alpha}$, $e^{-i\vec{k}'' \cdot \vec{\xi}_\alpha}$... en $\langle n_2 | \exp[-i(\vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}'' + \dots) \cdot \vec{\xi}_\alpha] | n_1 \rangle = \langle n_2 | \exp(-i\vec{\Phi} \cdot \vec{\xi}_\alpha) | n_1 \rangle$. On obtient ainsi, à l'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$, mais à tous les ordres en V_e et q_α

$$\langle \vec{p}_2, n_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1, n_1 \rangle = \langle n_2 | e^{-i\vec{\Phi} \cdot \vec{\xi}_\alpha} | n_1 \rangle \langle \vec{p}_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1 \rangle \\ \simeq T_{n_2, n_1}(\vec{\Phi}, \vec{\xi}_0) \langle \vec{p}_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1 \rangle \quad (2.23)$$

où $\langle \vec{p}_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1 \rangle$ est la matrice de transition en l'absence de laser.

Comme $E_{\vec{p}_2} \neq E_{\vec{p}_1}$ si $n_1 \neq n_2$, $\langle \vec{p}_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1 \rangle$ n'est pas sur la couche d'énergie si $\langle \vec{p}_2, n_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1, n_1 \rangle$ est sur la couche d'énergie et si $n_1 \neq n_2$.

Terme d'ordre 1 en $\omega/\Delta\omega$ de $\mathcal{C}_{21}$

- On peut développer les dénominateurs d'énergie (2.19) en puissance de $(n_1 - n)\hbar\omega / (E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}} + i\epsilon)$, ce qui fait apparaître $(n_1 - n)\hbar\omega$ au numérateur. On peut ensuite remplacer les éléments de matrice

de $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_0}$... par des fonctions de Bessel et utiliser la relation

$$\sum_s b J_{\ell-s}(x) J_s(y) = \frac{\ell y}{x+y} J_\ell(x+y) \quad (2.24)$$

- Il apparaît alors que le terme correctif en $\omega/\Delta\omega$, revient à remplacer au second membre de (2.23) $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ par $\vec{p}_1 + \hbar\vec{\gamma}$ et $\vec{p}_2 + \hbar\vec{\gamma}$ ou $\vec{\gamma}$, qui est d'ordre 1 en $\omega/\Delta\omega$ et qui est parallèle à $\vec{\xi}_0$, en tel que $E_{\vec{p}_1 + \hbar\vec{\gamma}} = E_{\vec{p}_2 + \hbar\vec{\gamma}}$ si $E_{\vec{p}_1} + n_1 \hbar\omega = E_{\vec{p}_2} + n_2 \hbar\omega$

On obtient ainsi à l'ordre 1 inclus en $\omega/\Delta\omega$ et à tous les ordres en q_α et V_e

$$\langle \vec{p}_2, n_2 | \mathcal{C} | \vec{p}_1, n_1 \rangle \simeq J_{n_2-n_1}(\vec{p} \cdot \vec{\xi}_0) \langle \vec{p}_2 + \hbar\vec{\gamma} | \mathcal{C} | \vec{p}_1 + \hbar\vec{\gamma} \rangle \quad (2.25)$$

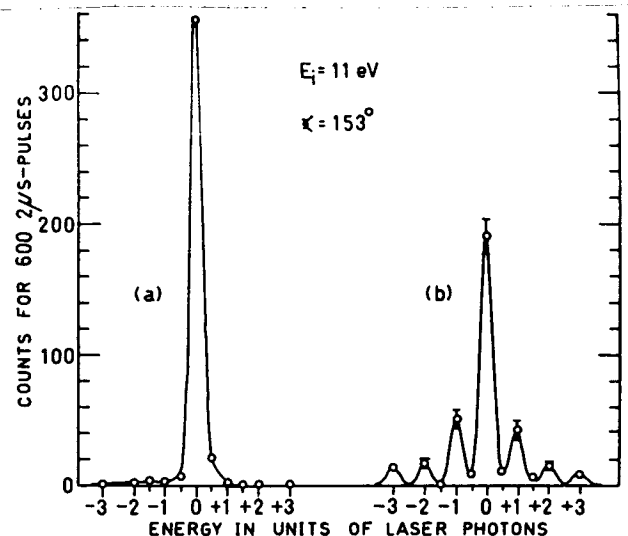
C'est la formule de Kroll et Watson (référence 4) qui relie la matrice de transition onélectronique à n_1, n_2 photons, à la matrice de transition électronique en l'absence de laser, les 2 matrices de transition étant évaluées sur la couche d'énergie

Pour le calcul d'ordre 2 en $\omega/\Delta\omega$ voir la référence 5.

Exemples de résultats expérimentaux

Figure et légende extraites de la référence 6

FIG. 1. Energy-loss spectrum of e^- -Ar scattering. (a) Without laser field. The circles show the measured experimental points and the estimated outline of the process is drawn with a solid line, which was obtained by tracing out the elastic peak with a ratemeter and scaled to fit the maximum counts. (b) With laser field. The circles with error bars show the measured points and the estimated outline of the multiphoton (emission and absorption) processes are drawn in with solid lines obtained by scaling down the elastic peak as in (a).



Références

- 1 - W.D. Henneberger, Phys. Rev. Lett. 21, 838 (1968)
- 2 - Y. Gontier and N.K. Rahman, Lettere al Nuov. Cim. 9, 537 (1974)
- 3 - C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, "Photons et Atomes, Introduction à l'Électrodynamique Quantique", Interéditions et Éditions du CNRS (1987), exercice 4 du Complément Eiv, p. 346
- 4 - N.M. Kroll and K.M. Watson, Phys. Rev. A8, 804 (1973)
- 5 - M.H. Mittleman, Phys. Rev. A19, 134 (1979)
- 6 - A. Weingartshofer, J.K. Holmes, G. Candler, E.M. Clarke and H. Krüger, Phys. Rev. Lett. 39, 269 (1977)
- 7 - N. Polonsky et C. Cohen-Tannoudji, J. de Physique 26, 409 (1965)