La transformation de Pauli-Fierz (suite)

(4) Etude du nouvel hamiltonien

a) Calcul de l'hamiltonien transformé

b) Discussion physique
- Sens physique de $\vec{P}_\alpha$ dans le nouveau point de vue
- Correction de masse
- Nouveaux termes d'interaction charge-rayonnement
- Interprétation des autres termes

c) Disparition des termes d'interaction linéaires en q_α.

(5) Généralisation à 2 particules localisées

a) Nouvelle expression de la transformation

b) Nouvel hamiltonien

c) Interprétation physique des nouveaux termes
Interactions magnétiques et effets de retard.

Calcul de $H^{(2)} = T H^{(1)} T^+$ ($H^{(1)}$ étant donné par (2.1))

Transformé du terme d'énergie cinétique

- D'après (2.13) et (2.28)

$$T \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T^+ = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0}) - q_\alpha \vec{A}_{\perp P}(\vec{0})\right]^2 \tag{4.1}$$

- Calcul de $q_\alpha \vec{A}_{\perp P}(\vec{0})$. D'après (1.8)

$$q_\alpha\left(\vec{A}_{\perp P}(\vec{0})\right)_i = \frac{q_\alpha^2}{\varepsilon_0 m_\alpha c^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{k_M} k^2 dk \int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j P_{\alpha j}}{k^2} \tag{4.2}$$

avec $i,j = x,y,z$. Mêmes types de calculs que page II-7

$$\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \qquad\qquad \int d\Omega \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

$$\hookrightarrow \quad q_\alpha \vec{A}_{\perp P}(\vec{0}) = \vec{P}_\alpha \frac{q_\alpha^2 k_M}{3\pi^2 \varepsilon_0 m_\alpha c^2} = \vec{P}_\alpha \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \tag{4.3}$$

où $\delta m_{1\alpha}$ est la correction de masse étudiée page (II.5) pour la particule α (on prend $k_c = k_M$)

- δm_1 est d'ordre 2 en q_α. Si l'on ne garde que les termes jusqu'à l'ordre 2 inclus, on peut négliger les termes en $\delta m_{1\alpha}^2$ et en $q_\alpha \delta m_{1\alpha} \vec{A}_\perp(\vec{0})$

$$\hookrightarrow \quad T\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T^+ \simeq \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) - \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\frac{2\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \tag{4.4}$$

Transformé du terme d'énergie potentielle

- D'après (2.23) et (2.24)

$$T\, V_e(\vec{r}_\alpha) T^+ = V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\right) \qquad (4.5)$$

- Par ailleurs $\quad T\,\varepsilon^\alpha_{Coul}\,T^+ = \varepsilon^\alpha_{Coul}$ $\qquad (4.6)$

Transformé de $\quad H_R = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left[a^+_\varepsilon(\vec{k})\, a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right]$

- D'après (2.3),

$$T H_R T^+ = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left\{ \left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k})\right]\left[a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k})\right] + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= H_R + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) + a_\varepsilon(\vec{k})\right]\beta_\varepsilon(\vec{k}) + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega\, \beta_\varepsilon(k)\,\beta_\varepsilon(\vec{k}) \qquad (4.7)$$

- En utilisant (1.5), on trouve que le $2^{\text{ème}}$ terme de (4.5) vaut $q_\alpha \vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0})/m_\alpha$ et que le $3^{\text{ème}}$ vaut

$$\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha)^2 \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\,\omega(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar\omega}$$

c'est à dire d'après le cours II (page II-7) $\dfrac{\vec{P}_\alpha^2}{2m_\alpha}\dfrac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}$

$$\hookrightarrow \quad T H_R T^+ = H_R + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{\vec{P}_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \qquad (4.8)$$

Récapitulation $\quad$ On ajoute (4.4), (4.5), (4.6), (4.8)

A l'ordre 2 inclus en $\vec{P}_\alpha$, on peut écrire

$$\frac{\vec{P}_\alpha^2}{2m_\alpha}\left(1 - \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\right) \sim \frac{\vec{P}^2}{2m_\alpha^*} \qquad \text{où} \qquad m_\alpha^* = m_\alpha + \delta m_{1\alpha} \qquad (4.9)$$

est la masse corrigée

$$\hookrightarrow \quad H^{(2)} = \frac{\vec{P}_\alpha^2}{2m_\alpha^*} + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\right) + H_R + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{0}) \qquad (4.10)$$

Interprétation de $\vec{P}_\alpha$ dans le nouveau point de vue (2)

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}_\alpha, H^{(2)}\right] = \frac{\partial H^{(2)}}{\vec{P}_\alpha} = \frac{\vec{P}_\alpha}{m_\alpha^*} \qquad (4.11)$$

Comme $\vec{r}_\alpha$ représente dans le point de vue (2) la position moyenne de la particule (voir § 3 plus haut), l'équation (4.11) montre que $\vec{P}_\alpha$ est la quantité de mouvement associée au mouvement moyen de la particule α ayant une masse corrigée m_α^*.

$\hookrightarrow$ $\vec{P}_\alpha^2/2m_\alpha^*$ est donc l'énergie cinétique du mouvement moyen

---

Correction de masse

- La correction de masse $\delta m_{1\alpha}$ associée au processus (7a) de la page (II-4) dans le point de vue de Coulomb (1), apparaît maintenant <u>directement</u> dans l'hamiltonien des particules

- Origine de la correction en $-\dfrac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\dfrac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}$

Dernier terme de (4.4) + Dernier terme de (4.8)

Négatif
Energie d'interaction
$-q_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{A}_{\perp P}(\vec{0})/m_\alpha$
entre la particule et son champ transverse lié

Positif
Energie du champ transverse lié

Le 1er terme est 2 fois plus grand en module que le second, ce qui explique le signe − global.

<u>Nouveaux termes d'interaction</u>

- Développement du 3ème terme de (4.10) en puissances de q_α

$$V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\right) = V_e(\vec{r}_\alpha) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\cdot\vec{\nabla} V_e(\vec{r}_\alpha) + \frac{1}{2}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\sum_{\substack{i\,j=\\x,y,z}} Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})\,\nabla_i\nabla_j\, V_e(\vec{r}_\alpha) + \cdots \tag{4.12}$$

C'est uniquement dans (4.11) qu'apparaissent des termes contenant <u>à la fois</u> des opérateurs de particules et des opérateurs de rayonnement, donc des termes d'interaction

- Interprétation du terme en $q_\alpha \vec{Z}\cdot\vec{\nabla} V_e/m_\alpha$

Terme linéaire en $\vec{Z}$, donc en a et a^+. Décrit donc des absorptions ou émissions d'<u>un</u> photon

Or, $-\vec{\nabla} V_e(\vec{r}_\alpha)$ est la force extérieure (due à V_e) agissant sur la particule, proportionnelle à <u>l'accélération</u> de son mouvement dans le potentiel extérieur.

↳ Le nouveau terme d'interaction à 1 photon dépend donc de l'<u>accélération</u> de la particule dans le potentiel extérieur et du vecteur de Hertz.

- Interprétation du dernier terme de (4.12)

Si le champ de rayonnement est dans l'état vide, le terme en $\vec{Z}\cdot\vec{\nabla} V_e$ a une valeur moyenne nulle. Le dernier a une valeur moyenne non nulle (provenant des termes $i=j$ par suite de l'isotropie du vide) qui vaut

$$\frac{1}{6}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\langle \vec{Z}^2(\vec{0})\rangle_{\text{vide}}\;\Delta V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{4.13}$$

Interprétation : correction à l'énergie potentielle due au moyennage par l'électron du potentiel extérieur sur l'étendue de son mouvement de vibration sous l'effet de fluctuations du vide)

Image de Welton pour le Lamb-shift.

Interprétation des autres termes (dans le point de vue 2)

- H_R : énergie du rayonnement libre (non lié), c'est à dire des photons réels

- Terme $q_\alpha^2 \vec{A}_\perp^2(\vec{0})/2m_\alpha$. Pour un rayonnement libre, $\vec{A}_\perp(\vec{0}) = -\dot{\vec{Z}}(\vec{0})$

$$\hookrightarrow \quad \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_\perp^2(\vec{0}) = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \dot{\vec{Z}}^2(\vec{0}) = \frac{m_\alpha}{2} \dot{\vec{\xi}}_\alpha^2 \tag{4.14}$$

Energie cinétique du mouvement de vibration de la particule dans le champ de rayonnement libre.

Disparition des termes d'interaction linéaires en q_α

- A l'ordre 0 en q_α, chacun des 2 systèmes, la particule et le champ de rayonnement, évolue librement.

- A l'ordre 1 en q_α, chaque système répond linéairement à la perturbation exercée sur lui par le mouvement libre de l'autre

  Par exemple, le mouvement libre de la particule (non perturbé par le rayonnement) fait apparaître un champ transverse linéaire en q_α, le champ lié $\vec{A}_{\perp P}$

  De même, le mouvement libre du champ (non perturbé par la particule) induit un mouvement de vibration forcé $\vec{\xi}_\alpha$ de la particule, linéaire en q_α

- La transformation T revient à soustraire à chaque observable d'un système la réponse linéaire de cette observable à la perturbation exercée par le mouvement libre de l'autre système. C'est ce qu'expriment les relations (2.16) et (2.26)

  Dans le nouveau point de vue (2), les observables décrivent donc les écarts des différentes grandeurs physiques par rapport aux réponses linéaires.

- Il ne doit donc plus exister dans $H^{(2)}$ de termes d'interaction linéaires en q_α, car, s'il en restait, ces termes donneraient naissance à des réponses linéaires qui ne doivent plus apparaître après la transformation T.

- C'est bien ce qu'on vérifie sur les 2 derniers termes de (4.12), qui représentent l'hamiltonien d'interaction dans le point de vue (2).

  (Ne pas oublier que le "potentiel" extérieur V_e est lui même en q_α, car V_e est en fait une énergie potentielle provenant de l'interaction de q_α avec un potentiel extérieur U_e : $V_e = q_\alpha U_e$).

Généralisation à 2 particules localisées

– 2 particules A et B, de positions $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$, localisées autour de 2 points $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ $\quad (|\vec{r}_A - \vec{R}_A| , |\vec{r}_B - \vec{R}_B| \ll 1/k_M)$

$$H^{(1)} = H_A + H_B + V_{AB}^{Coul} + H_R \tag{5.1}$$

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}(\vec{R}_\alpha)\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e(\vec{r}_\alpha) \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.2}$$

$$H_R = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right] \tag{5.3}$$

$$V_{AB}^{Coul} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_A - \vec{r}_B|} \tag{5.4}$$

– Variables normales du champ transverse lié aux 2 particule

(généralisation de 1.4 avec $e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$ remplacé par $e^{-i\vec{k}.\vec{R}_\alpha}$ et $\vec{v}_\alpha$ remplacé par $\vec{p}_\alpha/m_\alpha$)

$$\beta_\varepsilon(\vec{k}) = \left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_A + \left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_B \tag{5.5}$$

$$\left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \omega} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega (2\pi)^3}} \vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha \exp(-i\vec{k}.\vec{R}_\alpha) \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.6}$$

– Potentiel vecteur transverse lié (généralisation de 1.6 avec $\vec{r}_\alpha$ remplacé par $\vec{R}_\alpha$ et $\vec{v}_\alpha$ remplacé par $\vec{p}_\alpha/m_\alpha$)

$$\vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) = \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_A + \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_B \tag{5.7}$$

$$\left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_\alpha = \frac{q_\alpha}{2m_\alpha \varepsilon_0 c^2} \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\varepsilon}} \frac{\vec{\varepsilon}(\vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha)}{k^2} e^{i\vec{k}.(\vec{r}-\vec{R}_\alpha)} + c.c. \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.8}$$

– Nouvelle transformation

$$T = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha = A, B} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha . \vec{Z}(\vec{R}_\alpha)\right] \tag{5.9}$$

– Transformé de $\vec{A}_\perp(\vec{r})$

$$T \vec{A}_\perp(\vec{r}) T^+ = \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_A + \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_B \tag{5.10}$$

– Transformé de $\vec{r}_\alpha$

$$T \vec{r}_\alpha T^+ = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}(\vec{R}_\alpha) \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.11}$$

Nouvel hamiltonien

– D'après (5.1-4), (5.10) et (5.11)

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= T H^{(1)} T^+ \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{R}_\alpha) - q_\alpha\left(\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_\alpha)\right)_A - q_\alpha\left(\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_\alpha)\right)_B\right]^2 \\ &\quad + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{Coul} + \sum_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) + V_{AB}^{Coul}(\vec{r}_A + \vec{\xi}_A - \vec{r}_B - \vec{\xi}_B) \\ &\quad + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left\{\left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) + \left(\beta^+_\varepsilon(\vec{k})\right)_A + \left(\beta^+_\varepsilon(\vec{k})\right)_B\right]\left[a_\varepsilon(\vec{k}) + \left(\beta_\varepsilon(\vec{k})\right)_A + \left(\beta_\varepsilon(\vec{k})\right)_B\right] + \frac{1}{2}\right\} \end{aligned} \tag{5.12}$$

- On trouve tout d'abord des (sommes de) termes identiques à ceux trouvés plus haut pour une seule particule, les uns pour A les autres pour B

- Terme "croisés" nouveaux faisant intervenir à la fois A et B

$$-\frac{q_A}{m_A}\,\vec{P}_A\cdot\left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_A)\right]_B - \frac{q_B}{m_B}\,\vec{P}_B\cdot\left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_B)\right]_A \tag{5.13}$$

$$\int_< d^3k\,\hbar\omega\sum_{\vec{\varepsilon}}\left\{\left[\beta_\varepsilon^+(\vec{k})\right]_A\left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_B + h.c\right\} \tag{5.14}$$

En utilisant (5.5) et (5.8), on trouve que le terme (5.14) est la moitié de l'opposé du terme (5.13)

Physiquement, (5.13) représente l'interaction de la particule A avec la valeur prise en $\vec{R}_A$ du potentiel vecteur transverse lié à la particule B + $A \rightleftarrows B$

- Somme de (5.13) et (5.14)

$$H'_{AB} = -\frac{1}{2}\frac{q_A q_B}{m_A m_B \varepsilon_0 c^2}\int_< d^3k\sum_{\vec{\varepsilon}}\frac{(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_A)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_B)}{k^2}\left[\exp i\vec{k}\cdot(\vec{R}_A-\vec{R}_B) + c.c.\right] \tag{5.15}$$

- Résultat du calcul de l'intégrale sur $\vec{k}$ et de la somme sur $\vec{\varepsilon}$ (voir détails des calculs page IV-7]

$$H'_{AB} = -\frac{q_A q_B}{8\pi\varepsilon_0 m_A m_B c^2}\left\{\frac{\vec{P}_A\cdot\vec{P}_B}{|\vec{R}_A-\vec{R}_B|} + \frac{\left[\vec{P}_A\cdot(\vec{R}_A-\vec{R}_B)\right]\left[\vec{P}_B\cdot(\vec{R}_A-\vec{R}_B)\right]}{|\vec{R}_A-\vec{R}_B|^3}\right\} \tag{5.16}$$

<u>Discussion physique</u>

- Retour aux 2 diagrammes 8a et 8b de la page II.4
Amplitude correspondante

$$-2\pi i\,\delta^{(T)}\left(E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}-\hbar\vec{k}} - E_{\vec{p}'+\hbar\vec{k}}\right)\ \times$$

$$\text{(8.a)} \to \left\{\frac{\langle A,\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k}|H_{I1}^B|A;\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}';\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle\langle A;\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}';\vec{k}\vec{\varepsilon}|H_{I1}^A|A,\vec{p};B,\vec{p}'\rangle}{\frac{\vec{p}^2}{2m_A}+\frac{\vec{p}'^2}{2m_B}-\frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_A}-\frac{\vec{p}'^2}{2m_B}-\hbar\omega}\right.$$

$$\text{(8.b)} \to \left.\frac{\langle A,\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k}|H_{I1}^A|A,\vec{p};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k};-\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle\langle A,\vec{p};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k};-\vec{k}\vec{\varepsilon}|H_{I1}^B|A,\vec{p};B,\vec{p}'\rangle}{\frac{\vec{p}^2}{2m_A}+\frac{\vec{p}'^2}{2m_A}-\frac{\vec{p}^2}{2m_A}-\frac{(\vec{p}'+\hbar\vec{k})^2}{2m_A}-\hbar\omega}\right\} \tag{5.17}$$

- Les 2 dénominateurs sont égaux à $-\hbar\omega$, (à des corrections près en $\hbar\omega/m_Ac^2$, $\hbar\omega/m_Bc^2$, p/m_Ac, $p'/m_Bc \ll 1$)

- 1er numérateur

$$\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_A)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_B)\exp i\vec{k}\cdot(\vec{R}_B-\vec{R}_A) \tag{5.18}$$

- 2ème dénominateur

$$\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_A)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_B) \exp i\vec{k}\cdot(\vec{R}_A - \vec{R}_B) \tag{5.19}$$

- En remplaçant dans (5.17) les 2 dénominateurs par $-\hbar\omega$ et en utilisant (5.18) et (5.19), on trouve que (5.17) peut s'écrire sous la forme

$$-2\pi i\, \delta^{(T)}\left(E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}'+\hbar\vec{k}} - E_{\vec{p}-\hbar\vec{k}}\right) \langle A, \vec{p}-\hbar\vec{k}\,; B, \vec{p}'+\hbar\vec{k} \,|\, H'_{AB} \,|\, A, \vec{p}\,; B, \vec{p}' \rangle \tag{5.20}$$

où H'_{AB} est donné par (5.15) ou (5.16)

- H'_{AB} représente donc un hamiltonien effectif décrivant le couplage entre les 2 particules lié à l'échange d'un photon transverse entre les 2 particules

Effets magnétiques : interaction courant-courant
\+ Effets de retard venant corriger l'interaction de Coulomb instantanée V_{AB}^{Coul}

<u>Démonstration</u> de (5.16)

-

$$H'_{AB} = -\frac{q_A q_B}{m_A m_B \varepsilon_0 c^2} \sum_{ij} (p_A)_i (p_B)_j\, S_{ij}(\vec{R}_A - \vec{R}_B) \tag{5.21}$$

$$S_{ij}(\vec{\rho}) = \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\varepsilon}} \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}}{k^2} = \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}}{k^2}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{4\pi\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}}{k^4} \tag{5.22}$$

- Régularisation de $\frac{1}{k^4}$: $\quad \frac{1}{k^4} \to \frac{1}{(k^2+\eta^2)^2} \qquad \eta \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}}{(k^2+\eta^2)^2} = \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{(-ik)e^{ik\rho}}{\rho(k^2+\eta^2)^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{(-ik)e^{ik\rho}}{\rho(k+i\eta)^2(k-i\eta)^2} \tag{5.23}$$

- Intégration par les résidus

$$\hookrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \left\{ \frac{1}{8\pi\eta} e^{-\eta\rho} \right\} = \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \left(\frac{1}{8\pi\eta} - \frac{\rho}{8\pi} + O(\eta) \right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(-\frac{\delta_{ij}}{\rho} + \frac{\rho_i \rho_j}{\rho^3} \right) \tag{5.24}$$

- Finalement, on obtient à partir de (5.22), (5.23), (5.24)

$$S_{ij}(\vec{\rho}) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{\rho} + \frac{\rho_i \rho_j}{\rho^3} \right) \tag{5.25}$$